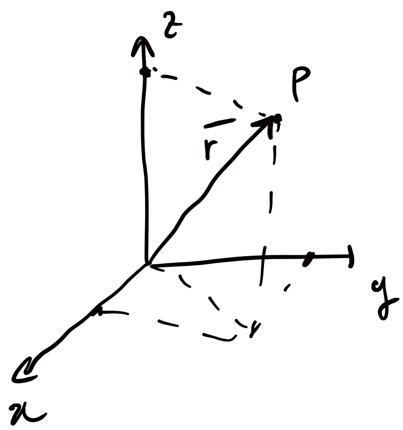
FORMALISMO LAGRANGIANO

Permette di scrivere le eq. del moto in un sistema di coordinate adatto al problema in esame.

Consideriamo un pto materiale (di massa m).
Nota la forza $\bar{F}$ che agisce su esso, l'eq. di Newton ci fornisce un'eq. diff. per il moto $\bar{r}(t)$

$$\bar{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto \bar{r}(t)$$



$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

↑ coordinate

Un set di coordinate di $\mathbb{R}^3$ è un insieme di tre numeri che individuano UNIVOCAMENTE un pto di $\mathbb{R}^3$.

Ci sono infiniti set di coord. Per es. in $\mathbb{R}^3$ ci sono anche le coord. POLARI $\bar{r} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$

Il moto è descritto da una funz. $\bar{r}(t)$ a valori in $\mathbb{R}^3$ cioè da tre funz. $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ t.c.

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$ per ogni t vengono assegnati 3 numeri, che individuano univocam. dove si trova il pto all'istante t.

Cambio di coordinate

$$\{x, y, z\} \qquad \{q_1, q_2, q_3\}$$

Per passare da un set di coord. all'altro, abbiamo bisogno di tre funzioni:

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

"trasf. di coordinate"

Es. $(q_1, q_2, q_3) = (r, \varphi, z)$ coord. cilindriche

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$\downarrow$

Deve essere INVERTIBILE, cioè la matrice jacobiana della mappa è una matrice invertib. ($\leftrightarrow$ det $\neq 0$)

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

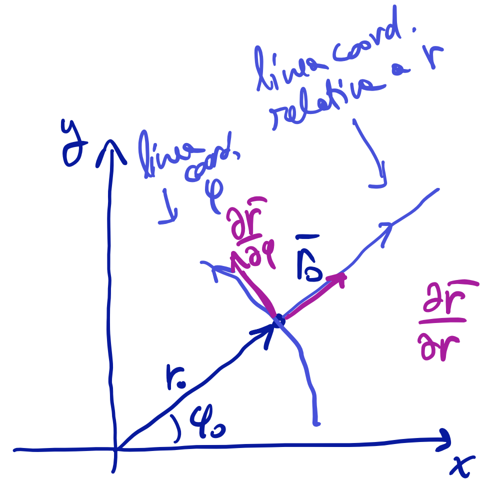
$$\underbrace{\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3}}_{\text{vettori tangenti alle linee coordinate}}$$

devono essere LINEARM. INDEP.

cioè devono formare una BASE per $\mathbb{R}^3$

ES.) $\mathbb{R}^2$ (x,y) (r,φ)

Trasf. coord.: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\text{sen}\,\varphi \end{cases}$

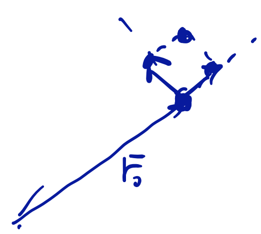


(r,φ) è un buon sist. di coord. se dati r e φ, qti individuano un pto e se ogni pto del piano è individuato da una coppia (r,φ).

In particolare, se parto da un punto $\bar{r}_0$ (individuato da (r_0,φ_0)), variando r e φ in un intorno di r_0,φ_0 devo essere in grado di toccare tutti i pti dell'intorno di $\bar{r}_0$!

linee coord.: r $\begin{pmatrix} x(r,\varphi_0) \\ y(r,\varphi_0) \end{pmatrix}$ ← parametro della curva — tenendo fisso φ_0 e variando r

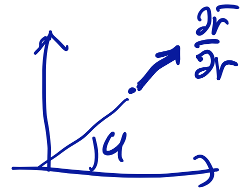
linea coord.: φ $\begin{pmatrix} x(r_0,\varphi) \\ y(r_0,\varphi) \end{pmatrix}$ (circonferenza di raggio r_0)



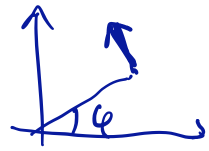
← i vett. tg alle linee coord. devono essere LINEARMENTE INDIPENDENTI

(cioè le linee coord. si intersecano trasversalmente)

$$\frac{\partial \bar r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$



$$\frac{\partial \bar r}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$



Punto vincolato a stare su una SUPERFICIE Q in $\mathbb{R}^3$:

"spazio delle CONFIGURAZIONI"

Come descriviamo la superficie Q in $\mathbb{R}^3$?

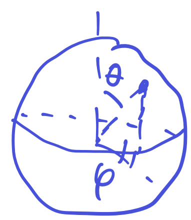
1) Luogo di pti che soddisfano
$f(x, y, z) = 0$ con f regolare e t.c. $\bar\nabla f \neq 0$ $\forall$ pto di Q

2) In forma parametrica

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2) \\ y = y(q_1, q_2) \\ z = z(q_1, q_2) \end{cases} \qquad \bar r = \bar r(q_1, q_2)$$

(q_1, q_2) sono coordinate su Q

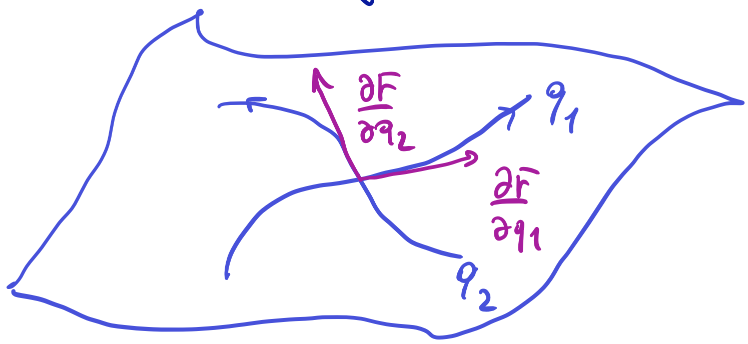
ES.) SFERA in $\mathbb{R}^3$ di raggio R



1) $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

2) $$\begin{cases} x = R\cos\varphi \sin\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$ $(q_1, q_2) \equiv (\theta, \varphi)$

Torniamo a una superficie generica descritta in forma parametrica.



$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}$, $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2}$ sono <u>due</u> vett. indipend. tg alla superficie (altrimenti la parametrizzazione non sarebbe buona).

$\Downarrow$

Tutti i vettori tangenti alla superficie[*] in un pto $(q_1^{(0)}, q_2^{(0)})$ sono esprimibili come combinaz. lineare di $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2}$.

(*) cioè vettori tg a curve che giacciono su superficie; gli stanno su piano tang. a superf.

L'insieme di tutti i vett. tg nel pto P è chiamato SPAZIO TANGENTE $T_P Q$

$\delta \bar{r} \in T_P Q$ "spostamento virtuale"

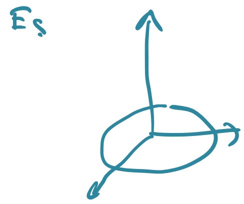
$\hookrightarrow \delta \bar{r} = \sum_{h=1}^{2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} \delta q_h \qquad \delta q_h \in \mathbb{R}$

coeff. del vett. $\delta \bar{r}$ rispetto alla base coordinata

Le coordinate q_1 e q_2 sono dette COORD. LIBERE

Punto materiale vincolato a stare su una CURVA Q in $\mathbb{R}^3$:

1) $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$



$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2-R^2=0 \end{cases}$

2) $\bar{r} = F(q)$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad q \equiv \varphi$

Formalmente la descrizione parametrica è analoga per tutti i tre casi visti (pto in $\mathbb{R}^3$ in coord. $q_1, \dots, q_3$; pto su superf., pto su linea)

$$\bar{r} = F(\underbrace{q_1, \dots, q_n}_{\text{coord. libere}}) \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{NUMERO DI GRADI DI LIBERTA'}}}{n} = 1, 2, 3$$

DINAMICA

Il VINCOLO è fisicamente realizzato da una FORZA (REAZIONE VINCOLARE) che in generale NON è nota a priori.

In presenza di un vincolo, l'eq. di Newton può essere scritta

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{\Phi}$$

$\bar{F}$: forza esterna attiva

$\bar{\Phi}$: reazione vincolare (ulteriore incognita del problema)

Def. VINCOLI sono IDEALI se la superficie o la curva sono "lisce", cioè se la reazione vincolare in P è sempre ortogonale alla superf. o alla curva in P:

$$\bar{\Phi} \cdot \delta \bar{r} = 0 \qquad \forall\, \delta \bar{r} \in T_p Q \qquad (*)$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{\Phi} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} = 0 \qquad \forall h = 1, \dots, m$$

Condizione realizzata (approssim.) in molti casi reali

$(*) \Rightarrow \bar{\Phi}$ compie LAVORO NULLO per ogni spostam. virtuale.

$(*) \Rightarrow$ permette di ottenere m eq. diff pure (in cui non appaiono le reaz. vincolari), proiettando le eq. di Newton sulla superficie (in realtà su T_pQ):

$$m\bar{a} - \bar{F} = \bar{\Phi} \xrightarrow[\text{proiettiamo sui vettori di base di } T_pQ]{} (m\bar{a} - \bar{F}) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} = 0 \qquad h = 1, \dots, m \qquad (\star)$$

m equazioni

Il moto su Q è descritto dalle funzioni $q_h(t)$

$$t \mapsto (q_1(t), \dots, q_m(t)) \qquad \leftarrow m \text{ funzioni } \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Se conosciamo le funzioni $q_h(t)$, possiamo descrivere il moto in $\mathbb{R}^3$:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(q_1(t), \dots, q_m(t))$$

$(\star)$ sono m equaz. nelle m incognite $q_h(t)$ $h = 1, \dots, m$