1.4 Equazioni parametriche di sottospazi affini

Per fare qualche esempio delle situazioni sopra descritte, abbiamo bisogno di esprimere esplicitamente un sottospazio affine con delle equazioni. Per tale motivo, introduciamo qui una nozione utile allo scopo.

Definizione 1.4.1. Se T è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{A}$, diciamo *sottospazio affine generato da* T l'intersezione di tutti i sottospazi affini contenenti T e lo indichiamo con $[T]$. In particolare, se $P_0, P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{A}$, il sottospazio affine generato da tali punti si indicherà con $[P_0, P_1, \ldots, P_m]$.

Proposizione 1.4.1. *Se* $P_0, P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{A}$ *allora*

$$[P_0, P_1, \ldots, P_m] = P_0 + \langle P_1 - P_0, P_2 - P_0, \ldots, P_m - P_0 \rangle.$$

In particolare, $\dim([P_0, P_1, \ldots, P_m]) \leq m$.

<u>Dimostrazione</u>. Sia $\{T_i\}_{i \in I}$ la famiglia dei sottospazi affini contenenti i punti $P_0, P_1, \ldots, P_m$; quindi possiamo scrivere ognuno di essi come $T_i = P_0 + W_i$. Per la Proposizione 1.2.1-(iii), la giacitura W_i contiene i vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, \ldots, P_m - P_0$. Quindi, per la Proposizione 1.2.2,

$$[P_0, P_1, \ldots, P_m] = P_0 + \bigcap_{i \in I} W_i \supseteq P_0 + \langle P_1 - P_0, P_2 - P_0, \ldots, P_m - P_0 \rangle.$$

Basta ora provare che il sottospazio affine $P_0 + \langle P_1 - P_0, P_2 - P_0, \ldots, P_m - P_0 \rangle$ contiene tutti i punti $P_0, P_1, \ldots, P_m$. Contenendo P_0 ed essendo il vettore $P_1 - P_0$ nella sua giacitura, contiene anche il punto $P_0 + (P_1 - P_0) = P_1$; analogamente gli altri. □

Se lo spazio generato dai punti $P_0, P_1, \ldots, P_m$ è una retta, diremo che tali punti sono *allineati*; se è un piano diremo che essi sono *complanari*.

Definizione 1.4.2. Se per $P_0, P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{A}$ vale l'uguaglianza nella Proposizione 1.4.1, cioè se

$$\dim([P_0, P_1, \ldots, P_m]) = m,$$

allora diremo che tali punti sono *affinemente indipendenti*.

Dunque (con le notazioni della Proposizione 1.4.1) punti affinemente indipendenti generano un sottospazio $[P_0, P_1, \ldots, P_m]$ di dimensione massima; equivalentemente, la sua giacitura $\langle P_1 - P_0, P_2 - P_0, \ldots, P_m - P_0 \rangle$ ha dimensione m. A sua volta questo equivale al fatto che gli m vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, \ldots, P_m - P_0$ siano una sua base.

Se invece un sottospazio affine è fornito nel modo solito, cioè $S = Q+W$, con $\dim S = \dim_K(W) = s$, si scelga una base $(w_1, \ldots, w_s)$ di W. Allora, se P denota il generico punto di $\mathbb{A}$,

$$P \in S \iff \exists\, t_1, \ldots, t_s \in K \quad \text{tali che} \quad P = Q + t_1 w_1 + \cdots + t_s w_s.$$

Dunque si ottengono tutti e soli i punti di S al variare de *parametri* $t_1, \ldots, t_s$ in K.

Definizione 1.4.3. Con le notazioni precedenti, diremo che

$$S: \quad P = Q + t_1 w_1 + \cdots + t_s w_s$$

è una *equazione vettoriale* di S.

Si fissi ora un sistema di riferimento affine $(O; e_1, \ldots, e_n)$ su $\mathbb{A}$ e rispetto ad esso sia $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{A}$ e siano

$$w_1 = w_{11}e_1 + \cdots + w_{n1}e_n, \quad \cdots \quad , w_s = w_{1s}e_1 + \cdots + w_{ns}e_n.$$

Se P è il generico punto di $\mathbb{A}$, in tale sistema le coordinate di P si denotino con $(x_1, \ldots, x_n)$.

In questo modo, l'equazione vettoriale di S può essere letta scalarmente

$$S: \ (x_1, \ldots, x_n) = (q_1, \ldots, q_n) + t_1(w_{11}, \ldots, w_{n1}) + \cdots + t_s(w_{1s}, \ldots, w_{ns})$$

o anche

$$S: \quad \begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + \cdots + t_s w_{1s} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + \cdots + t_s w_{2s} \\ \qquad \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + \cdots + t_s w_{ns} \end{cases}.$$

Definizione 1.4.4. L'espressione precedente si dice *equazione parametrica* di S, dove $t_1, \ldots, t_s$ sono i *parametri*.

Esempio 1.4.1. Se L è una retta passante per il punto Q e vettore direzionale v, la sua equazione vettoriale è del tipo

$$L: \quad P = Q + tv$$

e, se $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$, quella parametrica è

$$L: \quad \begin{cases} x_1 = q_1 + tv_1 \\ x_2 = q_2 + tv_2 \\ \qquad \vdots \\ x_n = q_n + tv_n \end{cases}.$$

Esempio 1.4.2. Se L è una retta passante per i punti A e B, la sua equazione vettoriale è del tipo

$$L: \quad P = A + t(B - A)$$

e, se $A = (a_1, \dots, a_n)$ e $B = (b_1, \dots, b_n)$, quella parametrica è

$$L: \quad \begin{cases} x_1 = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + t(b_2 - a_2) \\ \qquad\vdots \\ x_n = a_n + t(b_n - a_n) \end{cases} .$$

Esempio 1.4.3. Siano $A = (1, 1, 0)$ e $B = (0, -2, 1)$ due punti di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. Il vettore $v = B - A = (-1, -3, 1)$ è un vettore direzionale per la retta r passante per A e B. Le sue equazioni parametriche sono

$$r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases} .$$

Esercizio A5. Scrivere le equazioni vettoriale e parametrica del piano di $\mathbb{A}^n$ passante per i punti A, B e C, dove $A = (a_1, \dots, a_n)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ e $C = (c_1, \dots, c_n)$.

1.5 Equazioni cartesiane di sottospazi affini

Per determinare un ulteriore tipo di equazione di un sottospazio affine (la sua "equazione cartesiana"), iniziamo con lo studiare il caso di un sottospazio vettoriale. Ricordiamo anzitutto un risultato di Algebra lineare.

Teorema 1.5.1. *Sia V un K-spazio vettoriale e sia $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una sua base. Valgono i seguenti fatti.*

i) Per ogni sistema lineare omogeneo Σ in n incognite di rango r, il suo spazio delle soluzioni S_Σ rappresenta un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ di dimensione $n - r$.

ii) Viceversa, se $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di dimensione $n - r$, esiste un sistema lineare omogeneo Σ in n incognite di rango r il cui spazio delle soluzioni S_Σ rappresenta W.

Osservazione 1.5.1.

i) Nell'enunciato precedente, "rappresenta" fa riferimento all'isomorfismo, indotto dalla scelta della base $\mathcal{B}$ di V e della base canonica $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ di K^n, dato da

$$\alpha : \quad V \longrightarrow K^n \quad \text{dove} \quad \alpha(v_i) = e_i, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

ii) Nel punto (i) del Teorema 1.5.1 per ogni Σ è individuato un unico sottospazio vettoriale W, mentre, nel punto (ii) del Teorema, per ogni sottospazio il sistema lineare omogeno che lo definisce non è unico.

iii) Il punto (i) del Teorema 1.5.1 consiste nel risolvere il sistema Σ; il punto (ii) fornisce invece un nuovo tipo di equazione per W.

Definizione 1.5.1. Un sistema lineare omogeneo Σ il cui spazio delle soluzioni rappresenta un sottospazio vettoriale W di V si dice *equazione cartesiana* di W.

Esempio 1.5.1. Siano $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \langle (1, 2, 3), (-4, 0, 5) \rangle$. Per trovare il sistema lineare omogeneo Σ in 3 incognite di rango $3 - \dim(W) = 1$ il cui spazio delle soluzioni S_Σ è W basta osservare che un vettore v appartiene a W se e solo se è combinazione lineare dei vettori della base scelta di W. Esplicitamente:

$$v = (x, y, z) \in W \iff \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando questo determinante si ottiene

$$v = (x, y, z) \in W \iff 10x - 17y + 8z = 0.$$

Nell'esempio precedente W era un iperpiano di V e dunque il sistema lineare associato era costituito da una sola equazione. Vediamo come procedere più in generale.

Sia $W = \langle w_1, \dots, w_s \rangle$ un sottospazio vettoriale di V di dimensione s. Sia vettore $v \in V$ un generico vettore. Allora

$$v \in W \iff \dim\langle v, w_1, \dots, w_s \rangle = s.$$

Posta $\dim(V) = n$, se $M \in K^{s+1,n}$ è la matrice avente per righe le componenti di $v, w_1, \dots, w_s$ su una base scelta $\mathcal{B}$ di V, allora

$$v \in W \iff \mathrm{rk}(M) = s.$$

Si osservi che $\mathrm{rk}(M) \geq s$ in quanto le ultime s righe di M sono linearmente indipendenti essendo $w_1, \dots, w_s$ vettori linearmente indipendenti. Dunque, per il Teorema degli orlati (vedi Appendice di questo Capitolo), $\mathrm{rk}(M) = s$ se e solo se tutti i minori $(s+1) \times (s+1)$ che orlano un minore non degenere $s \times s$ sono degeneri.

Per facilitare il ragionamento, si supponga che il minore N costituito dalle prime s componenti dei vettori $w_1, \dots, w_s$ sia non degenere. I minori $(s+1) \times (s+1)$ che orlano N si ottengono aggiungendo, di volta in volta, una delle colonne $C_{s+1}, \dots, C_n$ di M e dunque sono $n - s$ minori. Ognuno dei determinanti di tali minori è un'equazione lineare omogenea in $x_1, \dots, x_n$.

Pertanto $\mathrm{rk}(M) = s$ se e solo se le componenti $x_1, \dots, x_n$ di v soddisfano un sistema lineare omogeneo Σ di $n - s$ equazioni. Ovviamente tali equazioni risultano indipendenti in quanto lo spazio delle soluzioni S_Σ, rappresentando W, deve avere dimensione s. Diremo che Σ è un'*equazione cartesiana* di W.

Esempio 1.5.2. Siano $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \langle (1, 3, -1, 4), (2, 3, 0, 1) \rangle$. Per trovare l'equazione cartesiana di W, cioè il sistema lineare omogeneo Σ in 4 incognite di rango $4 - \dim(W) = 2$ il cui spazio delle soluzioni S_Σ è W basta osservare che

$$v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W \iff \mathrm{rk}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Per esprimere numericamente l'ultima condizione, osserviamo che il minore

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

è non degenere. Quindi, calcolando i determinanti dei due minori 3×3 che lo orlano (costituiti, rispettivamente, dalle prime 3 colonne e dalle colonne 1,2,4) si ottengono 2 equazioni lineari indipendenti. Pertanto un'equazione cartesiana di W è, ad esempio,

$$W : \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 & = 0 \\ -9x_1 + 7x_2 - 3x_4 & = 0 \end{cases}.$$

Ora ritorniamo alla questione iniziale. Tenendo conto della relazione tra lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare e quello del sistema omogeneo associato (vedi Osservazione 1.2.2), si prova immediatamente il risultato analogo al Teorema 1.5.1.

Teorema 1.5.2. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione n su V e si fissi un suo sistema di rifermento $(O;\mathcal{B})$. Valgono i seguenti fatti.*

i) Per ogni sistema lineare compatibile $\Sigma: \ AX = B$ in n incognite di rango r, il suo spazio delle soluzioni S_Σ rappresenta un sottospazio affine S di dimensione $n-r$.

ii) Viceversa, se S è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ di dimensione $n-r$, esiste un sistema lineare $\Sigma: \ AX = B$ in n incognite di rango r il cui spazio delle soluzioni S_Σ rappresenta S.

Definizione 1.5.2. Un sistema lineare $\Sigma: \ AX = B$ come nel Teorema 1.5.2 è detto una *equazione cartesiana* del sottospazio affine S.

Usando l'Osservazione 1.2.2, dato $S = Q + W$, con $Q \in \mathbb{A}$ e $W \subset V$ giacitura di S, è sufficiente determinare l'equazione cartesiana di W, cioè un sistema lineare omogeneo $\Sigma_0 : AX = 0$. A questo punto basta osservare che $P \in S \iff P - Q \in W \iff P - Q$ è soluzione di Σ_0. Quindi $A(P - Q) = 0$ è un'equazione cartesiana di S.

Abbiamo in tal modo provato il seguente risultato.

Proposizione 1.5.3. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione n e si fissi un sistema di riferimento $(O,\mathcal{B})$. Sia $S = Q + W$ un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ con $Q = (q_1, \dots, q_n)$. Se la giacitura W ha equazione cartesiana*

$$W : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n & = 0 \end{cases}$$

allora una equazione cartesiana di S è data da

$$S : \begin{cases} a_{11}(x_1 - q_1) + a_{12}(x_2 - q_2) + \cdots + a_{1n}(x_n - q_n) & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{r1}(x_1 - q_1) + a_{s2}(x_2 - q_2) + \cdots + a_{rn}(x_n - q_n) & = 0 \end{cases}.$$

□

Esempio 1.5.3. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}^3$. Vogliamo determinare l'equazione cartesiana della retta L passante per $Q = (1, 5, 2)$ e avente direzione $w = (2, -1, 4)$.

Anzitutto determiniamo l'equazione cartesiana della giacitura W di L che sarà un sistema lineare omogeneo di rango pari a

$$s = \dim(\mathbb{A}^3) - \dim(L) = 3 - 1 = 2.$$

Come visto tale equazione si ottiene da

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 1.$$

Questo impone, ad esempio, le 2 condizioni indipendenti (ottenute dai due minori che orlano il minore 1×1 costituito dal numero 2)

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Pertanto

$$W: \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 - x_3 & = 0 \end{cases}.$$

Quindi, per la Proposizione 1.5.3, l'equazione cartesiana della retta in questione è

$$L: \quad \begin{cases} (x_1 - 1) + 2(x_2 - 5) & = 0 \\ 2(x_1 - 1) - (x_3 - 2) & = 0 \end{cases}.$$

Esempio 1.5.4. Determinare il piano H passante per i punti di $\mathbb{A}^3$:

$$A = (0, 1, 2), \quad B = (1, -1, 3), \quad C = (1, 0, -1).$$

Si osservi innanzitutto che tale piano è unico se e solo se i 3 punti non sono allineati se e solo se i vettori $B - A$ e $C - A$ non sono paralleli. Tale condizione verrà verificata nello svolgimento.

Tenuto conto che $H = A + W$, determiniamo dapprima la giacitura W. Visto che $W = \langle B - A, C - A \rangle$ e $B - A = (1, -2, 1)$ e $C - A = (1, -1, -3)$, si ha

$$W: \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$W: \quad 7x + 4y + z = 0.$$

Pertanto, come visto in Proposizione 1.5.3, $H: \; 7x + 4(y - 1) + (z - 2) = 0$ da cui

$$H: \quad 7x + 4y + z - 6 = 0.$$

Esempio 1.5.5. Per passare dalle equazioni cartesiane alle equazioni parametriche di un sottospazio affine si può risolvere il sistema col metodo di eliminazione di Gauss. Vediamo un caso numerico: sia $L \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ il piano affine di equazioni cartesiane

$$L\colon \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad x_2 + 3x_3 - x_4 = -2 \end{cases} .$$

La soluzione del sistema in questo caso è immediata, e fornisce le equazioni parametriche per L

$$L\colon \begin{cases} x_1 = 5t_1 - 3t_2 + 5 \\ x_2 = -3t_1 + t_2 - 2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases} .$$

Esempio 1.5.6. Non tutti i sistemi di equazioni parametriche lineari in k parametri definiscono un sottospazio affine di dimensione k. Per esempio, le equazioni seguenti non definiscono un piano in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$

$$\begin{cases} x = 3s - 6t + 1 \\ y = -3s + 6t - 2 \\ z = s - 2t \end{cases} .$$

Infatti in questo caso i vettori colonna

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

formati dai coefficienti dei parametri s e t sono linearmente dipendenti essendo $2v + w = 0$.

1.6 Calcolo della posizione reciproca di sottospazi

Abbiamo visto le varie possibilità nei Paragrafi 1.2 e 1.3. Vediamo ora come procedere esplicitamente nel calcolo con l'uso dei vari tipi di equazioni visti in precedenza. L'ambiente sarà lo spazio affine $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_K$, di dimensione $n \geq 2$, sul campo K.

Iniziamo studiando la posizione reciproca di 2 iperpiani.

Iperpiani di $\mathbb{A}^2$ (rette nel piano)

In questo caso, gli iperpiani sono delle rette. Siano dunque date 2 rette in equazione cartesiana

$$r: \quad ax + by + c = 0, \qquad r': \quad a'x + b'y + c' = 0.$$

Come visto nell'Osservazione 1.3.2, ci sono solo due possibilità: o r e r' sono incidenti in un punto o sono parallele. Vediamo come determinare algebricamente la loro posizione reciproca.

Per definizione $r \parallel r'$ se e solo se hanno la stessa giacitura. Poiché tali giaciture sono, rispettivamente, $ax + by = 0$ e $a'x + b'y = 0$, questo accade se e solo se il sistema lineare omogeneo dato da tali equazioni ha rango 1. Tuttavia occorre distinguere, in questo caso, se le rette sono parallele e distinte o coincidenti. Le due possibilità sono determinate dallo studio del sistema costituito dalle equazioni di r e r', nel caso in cui non abbia soluzioni oppure nel caso che ne abbia infinite.

D'altra parte, r e r' sono incidenti in un unico punto P se e solo se le coordinate di P costituiscono l'unica soluzione comune alle equazioni delle due rette.

Abbiamo provato dunque il seguente risultato.

Teorema 1.6.1. *Sia $(O; (e_1, e_2))$ un sistema di riferimento in $\mathbb{A}^2$ e siano (x, y) le coordinate del generico punto. Siano date due rette*

$$r: \quad ax + by + c = 0, \qquad r': \quad a'x + b'y + c' = 0$$

e si consideri il sistema lineare

$$\Sigma: \quad \begin{cases} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{cases}$$

la cui matrice completa è

$$(A, B) := \left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right).$$

Allora:

i) $r \parallel r' \iff \mathrm{rk}(A) = 1$. *In tal caso,*

- $r \neq r' \iff \mathrm{rk}(A,B) = 2$
- $r = r' \iff \mathrm{rk}(A,B) = 1.$

ii) $r \cap r' = \{P\} \iff \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A,B) = 2.$

In tal caso, le coordinate del punto P sono l'unica soluzione del sistema lineare Σ. □

Iperpiani di $\mathbb{A}^3$ (piani nello spazio)

In completa analogia con quanto visto nel caso delle rette nel piano, vediamo il corrispondente enunciato riguardo agli iperpiani di $\mathbb{A}^3$ (la dimostrazione è omessa in quanto sostanzialmente identica al caso precedente).

Teorema 1.6.2. *Sia $(O;(e_1,e_2,e_3))$ un sistema di riferimento in $\mathbb{A}^3$ e siano (x,y,z) le coordinate del generico punto. Siano dati due piani*

$$\pi: \quad ax+by+cz+d=0, \qquad \pi': \quad a'x+b'y+c'z+d'=0$$

e si consideri il sistema lineare

$$\Sigma: \quad \begin{cases} ax+by+cz+d & =0 \\ a'x+b'y+c'z+d' & =0 \end{cases}$$

la cui matrice completa è

$$(A,B) := \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right).$$

Allora:

i) $\pi \parallel \pi' \iff \mathrm{rk}(A) = 1.$ *In tal caso,*

- $\pi \neq \pi' \iff \mathrm{rk}(A,B) = 2$
- $\pi = \pi' \iff \mathrm{rk}(A,B) = 1.$

ii) $\pi \cap \pi' = r$ *(retta)* $\iff \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A,B) = 2.$

In tal caso, le coordinate dei punti della retta r sono tutte e sole le soluzioni del sistema lineare Σ. □

Una retta e un piano di $\mathbb{A}^3$

Tenendo conto del Teorema 1.6.2 che descrive la posizione reciproca di 2 piani nello spazio, se è data una retta in $\mathbb{A}^3$ di equazione cartesiana

$$r: \quad \begin{cases} ax+by+cz+d & =0 \\ a'x+b'y+c'z+d' & =0 \end{cases}$$

allora la matrice dei coefficienti di tale sistema lineare e la sua matrice completa hanno entrambe rango 2. Se si considera un piano π, è chiaro che la posizione reciproca di r e π viene descritta da una matrice in cui compaiono tutti i coefficienti in gioco e che non può avere rango minore di 2. Si ha dunque il seguente risultato, la cui dimostrazione è lasciata al lettore.

Teorema 1.6.3. *Sia $(O;(e_1,e_2,e_3))$ un sistema di riferimento in $\mathbb{A}^3$ con coordinate (x,y,z). Siano dati una retta r e un piano π di equazioni*

$$r: \quad \begin{cases} ax+by+cz+d &= 0 \\ a'x+b'y+c'z+d' &= 0 \end{cases}, \qquad \pi: \quad a''x+b''y+c''z+d''=0$$

e sia Σ il sistema lineare costituito dalle 3 precedenti equazioni, la cui matrice è

$$(A,B) := \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right).$$

Allora:

i) $r \parallel \pi \iff \mathrm{rk}(A)=2$. *In tal caso,*

- $r \cap \pi = \emptyset \iff \mathrm{rk}(A,B)=3$
- $r \subset \pi \iff \mathrm{rk}(A,B)=2$.

ii) $r \cap \pi = \{P\}$ *(punto)* $\iff \mathrm{rk}(A)=\mathrm{rk}(A,B)=3$.

In tal caso, le coordinate di P sono l'unica soluzione del sistema Σ. □

Esempio 1.6.1. In $\mathbb{A}^3_{\mathbb{Q}}$ consideriamo la retta r di equazioni cartesiane

$$r: \begin{cases} x+2y-3z=0 \\ y+z=1 \end{cases}$$

e il piano π di equazione

$$\pi:\ x+y+z=1.$$

Risolvendo il sistema formato dalle equazioni di r e di π si ottiene la loro intersezione, che risulta il punto $P=(0,3/5,2/5)$.

Due rette di $\mathbb{A}^3$

Anche in questo caso, se sono date 2 rette nello spazio in equazione cartesiana, la descrizione della loro posizione reciproca si riconduce allo studio del sistema lineare costituito dalle rispettive equazioni. Tuttavia qui si presenta un caso nuovo, come descritto nell'Osservazione 1.3.3.

Come nel caso precedente, osserviamo preliminarmente che ognuna delle due rette ha come equazione cartesiana un sistema lineare di rango 2; pertanto anche il sistema lineare costituito dalle 4 equazioni ha la matrice dei coefficienti di rango almeno 2.

Teorema 1.6.4. *Sia $(O;(e_1,e_2,e_3))$ un sistema di riferimento in $\mathbb{A}^3$ con coordinate (x,y,z). Siano date due rette r e s di equazioni*

$$r:\quad \begin{cases} ax+by+cz+d &= 0\\ a'x+b'y+c'z+d' &= 0 \end{cases},\qquad s:\quad \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta &= 0\\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta' &= 0 \end{cases},$$

e sia Σ il sistema lineare costituito dalle 4 precedenti equazioni, la cui matrice è

$$(A,B) := \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d\\ a' & b' & c' & d'\\ \alpha & \beta & \gamma & \delta\\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{array}\right).$$

Allora:

i) $\mathrm{rk}(A)=2 \iff$ *r e s hanno la stessa giacitura. In tal caso,*

- (i_1) $r=s \iff \mathrm{rk}(A,B)=2$.
- (i_2) $r\cap s=\emptyset \iff \mathrm{rk}(A,B)=3$ *(le 2 rette sono parallele e distinte);*

ii) $\mathrm{rk}(A)=3 \iff$ *r e s hanno diverse giaciture. In tal caso,*

- (ii_1) $r\cap s=\{P\}$ *(punto)* $\iff \mathrm{rk}(A,B)=3$ *e le coordinate di P sono l'unica soluzione del sistema lineare Σ.*
- (ii_2) *r e s sono sghembe* $\iff \mathrm{rk}(A,B)=4$.

Dimostrazione. Per comodità si denotino con R_1,R_2,R_3,R_4 le righe della matrice A.

(i) È chiaro che $\mathrm{rk}(A)=2$ se e solo se $R_3,R_4\in\langle R_1,R_2\rangle$ e $R_1,R_2\in\langle R_3,R_4\rangle$. Quest'ultima condizione, a sua volta, è equivalente al fatto che i sistemi lineari omogenei

$$AX=0,\qquad \begin{pmatrix} R_1\\ R_2\end{pmatrix}X=0,\qquad \begin{pmatrix} R_3\\ R_4\end{pmatrix}X=0$$

sono equivalenti, cioè hanno lo stesso spazio delle soluzioni. D'altra parte gli spazi delle soluzioni del secondo e del terzo di tali sistemi sono, rispettivamente, la giacitura di r e s. Pertanto l'equivalenza è provata.

(i_1) Per il Teorema di Rouché–Capelli, il sistema Σ è risolubile se e solo se $\mathrm{rk}(A,B)=2$. In tal caso, esso ha ∞^1 soluzioni; dunque $r\cap s$ è costituita da infiniti punti e si ha la tesi.

(i_2) Se invece $\mathrm{rk}(A,B)=3$, ancora per il Teorema di Rouché–Capelli, il sistema Σ non è risolubile. Pertanto $r\cap s=\emptyset$. Viceversa, se $r\cap s=\emptyset$ necessariamente $2=\mathrm{rk}(A)\neq\mathrm{rk}(A,B)$. Pertanto deve essere $\mathrm{rk}(A,B)=3$.

(ii) L'equivalenza è una riformulazione dell'equivalenza (i).

Le affermazioni (ii_1) e (ii_2) sono lasciate al lettore. □

Posizione reciproca di sottospazi affini in equazione parametrica

La posizione reciproca di due sottospazi affini nel caso in cui uno sia in equazione parametrica e l'altro in cartesiana si determina sostituendo le coordinate del generico punto del primo nell'equazione cartesiana del secondo e risolvendo il sistema ottenuto.

Nel caso in cui entrambi siano in equazione parametrica, si possono uguagliare le rispettive coordinate, avendo cura di cambiare nome ai parametri.

Entrambi i casi vengono illustrati nei seguenti esempi.

Esempio 1.6.2. Determinare la posizione reciproca della retta r e del piano π di $\mathbb{A}^3$, dove

$$r: \begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= 3t \\ z &= -1+t \end{cases}, \quad \pi: \ 2x+3y+z-15=0.$$

Il generico punto di r è $P(t) = (1+2t, 3t, -1+t)$; sostituendo le sue coordinate nell'equazione di π si ottiene

$$2(1+2t)+3(3t)+(-1+t)-15=0 \quad \Rightarrow \quad t=1.$$

Pertanto r e π sono incidenti nel punto $P(1) = (3,3,0)$.

Esempio 1.6.3. Determinare la posizione reciproca delle rette r e s di $\mathbb{A}^3$, dove

$$r: \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2-t \\ z &= 2+t \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= 3t \\ z &= -1+t \end{cases}.$$

Si osservi inizialmente che le giaciture di r e s sono $\langle(1,-1,1)\rangle$ e $\langle(2,3,1)\rangle$, rispettivamente, le quali sono chiaramente distinte. Dunque le rette r e s non sono parallele. Per determinare se sono incidenti o sghembe, calcoliamo la loro intersezione.

Prima di tutto, occorre cambiare il nome al parametro di una delle due rette; ad esempio, chiamare λ il parametro di r.

Il generico punto di r è $R(\lambda) = (1+\lambda, 2-\lambda, 2+\lambda)$, mentre il generico punto di s è $S(t) = (1+2t, 3t, -1+t)$. Vediamo se esistono valori di λ e t per cui $R(\lambda) = S(t)$.

$$r \cap s: \begin{cases} 1+\lambda &= 1+2t \\ 2-\lambda &= 3t \\ 2+\lambda &= -1+t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda &= 2t \\ -\lambda &= -2+3t \\ \lambda &= -3+t \end{cases}.$$

Dalla prima e terza equazione si ottiene $2t = -3+t$, da cui $t=-3$. Sostituendo nel sistema precedente si ottiene

$$\begin{cases} \lambda &= -6 \\ -\lambda &= -11 \\ \lambda &= -6 \end{cases}.$$

e tale sistema è ovviamente incompatibile. Pertanto r e s sono sghembe.