Geometria 2

Anno accademico 2024-2025

Foglio di esercizi n.2

14 marzo 2025

1) Determinare l'equazione parametrica della retta r di $\mathbb{A}^2$ passante per il punto $Q = (1, 2)$ e avente direzione $v = (3, 4)$.

2) Determinare l'equazione parametrica della retta s di $\mathbb{A}^3$ passante per il punto $Q = (1, 2, 0)$ e avente direzione $v = (3, 4, 0)$.

3) Determinare le equazioni cartesiane delle rette dei due esercizi precedenti.

4) In uno spazio affine $\mathbb{A}$ su un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, provare che $\forall\, P, Q \in \mathbb{A}$, $\forall\, v \in V$ vale

$$(Q + v) - (P + v) = Q - P.$$

5) Sia π_1 il piano di $\mathbb{A}^3$ passante per $P = (1, 2, 3)$ e di giacitura $\langle(0, 1, 0), (2, -1, 1)\rangle$. Inoltre sia π_2 il piano di $\mathbb{A}^3$ passante per i punti $A = (1, 0, 0), B = (0, 0, 1), C = (3, 1, 2)$.

Determinare le equazioni cartesiane e la posizione reciproca dei piani π_1 e π_2.

6) Nello spazio affine reale $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si consideri il punto $P = (1, 0, -1)$. Si determini la retta passante per P e parallela alla retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -1 \\ -x + z = 0. \end{cases}$$

7) Si consideri il piano $L \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ di equazioni cartesiane

$$L\colon \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Determinare equazioni parametriche per L.

8) Si verifichi che i due piani affini L ed L' in $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ definiti dalle equazioni cartesiane seguenti sono sghembi:

$$L\colon \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_4 = -1 \end{cases} \qquad L'\colon \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

9) Siano $Q_1, \ldots, Q_m$ punti dello spazio affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Dimostrare che il sottospazio affine $L = [Q_1, \ldots, Q_m]$ generato dai punti dati è l'insieme di tutti e soli i punti P della forma

$$P = \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_m Q_m$$

al variare degli $\alpha_i \in \mathbb{K}$ con

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1.$$

Si dimostri inoltre che per un punto qualunque $P \in L$ una tale combinazione lineare è unica se e solo se i punti $Q_1, \ldots, Q_m$ sono affinemente indipendenti.