

Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 28/6/2024

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D , il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{(x+2)(2-x)}}{\ln(9-x^2-y^2)}$$

- (b) (3 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(2, \sqrt{5})$, $(2, 2)$.
(c) (2 punti) L'insieme D è convesso? E' limitato? Si giustificino le risposte.
2. (a) (3 punti) Si calcoli il limite, se esiste, in $(0, 0)$ della funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{6x^4y^2}{x^4+y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

3. (a) (2 punti) L'affermazione "Se una successione non è monotona, allora non è convergente" è vera? Si giustifichi la risposta.
(b) (2 punti) Si studi il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+5} \frac{3(n+1)}{n^2+3n+2}$.
(c) (3 punti) Si determini l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^2} (4x-1)^n$.
4. (a) (2 punti) Si dimostri che in un intorno del punto di coordinate $(1, 1)$ la curva definita dall'equazione

$$\sqrt{2}xy - \sqrt{x+y} = 0$$

è grafico di una funzione $y = g(x)$. Si scriva l'equazione della retta tangente alla curva in $(1, 1)$.

5. (a) (2 punti) Data una funzione h definita su un rettangolo $Q \subseteq \mathbb{R}^2$, $Q = [a, b] \times [c, d]$, a valori reali e limitata, si dia la definizione di somma superiore, somma inferiore e di integrale di Riemann per h .
6. (a) (3 punti) Si determinino i punti di massimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = e^{x+y^2}$$

su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$.

- (b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x, y) = -\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}.$$