

Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 5/9/2024

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D , il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione

$$f(x, y) = \frac{e^{x+y} - 1}{(x - y) \ln(x + y)}$$

- (b) (2 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(2, 2)$.
(c) (2 punti) L'insieme D è convesso? E' limitato? Si giustifichino le risposte.
2. (a) (3 punti) Si determini l'insieme dei punti di continuità della funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(y)\sin(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \cos(y) & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

3. (a) (2 punti) Si determini il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (n - n \cos(\frac{1}{n}))$.
(b) (3 punti) Si individui una serie di potenze che converga alla funzione $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ in un intervallo centrato in 0, determinando tale intervallo e provando la convergenza. (Suggerimento: si parta da una serie di potenze nota.)
(c) (3 punti) Si dimostri che ogni serie di Cauchy in $\mathbb{R}$ è limitata. Una serie limitata in $\mathbb{R}$ è sempre di Cauchy? Si giustifichi la risposta.
4. (a) (2 punti) Si dimostri che in un intorno del punto di coordinate $(-1, 1)$ la curva definita dall'equazione

$$y^3 + 2y + 4x + 1 = 0$$

è grafico di una funzione $y = g(x)$. Si scriva l'equazione della retta tangente alla curva in $(-1, 1)$.

5. (a) (2 punti) Si calcoli l'integrale di Riemann di

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sulla regione del piano delimitata dalle rette di equazione $y = x$, $x = 0$ e $x + y = 2a$, con $a > 0$.

6. (a) (3 punti) Si determinino i punti di massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$$

su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + (y + 1)^2 \leq 16\}$.

- (b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}.$$