Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 23/1/2025

NB: IL TESTO OCCUPA IN PARTE ANCHE IL RETRO DEL FOGLIO

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D, il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione

$$f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2-1)}{(2x-1)\sqrt{2-x}}$$

   (b) (3 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(1,0)$,(2,0), $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

   (c) (1 punto) Si consideri l'insieme $F = D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leq -1\}$. Si dica se l'insieme F è chiuso, giustificando la risposta.

   (d) (1 punto) Si dica se la funzione f ammette punti di massimo assoluto e punti di minimo assoluto, giustificando la risposta.

2. (a) (1 punto) Sia data la funzione $g(x,y) = 1 + \sqrt[3]{y(x-1)^2}$. Si calcolino le derivate direzionali di g rispetto ad un generico versore $v = (v_1, v_2)$ nel punto $(1,0)$.

   (b) (2 punti) Si dimostri che la funzione g non è differenziabile in $(1,0)$.

3. (a) (2 punti) Si determini il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2n^2+4n+\pi}}{n^3+\pi}$.

   (b) (3 punti) Si considerino la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $x \in [0,1]$, e la successione delle sue derivate $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$. Si verifichi se tali successioni di funzioni convergono puntualmente e, in caso affermativo, a quali funzioni e se la convergenza è uniforme. Si giustifichino le risposte date.

   (c) (2 punti) Dati una funzione $h : E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (x_0, y_0) punto di accumulazione per E, tali che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = +\infty$, si dimostri che la funzione h non ha punti di massimo assoluto.

4. (a) (2 punti) Si dimostri che in un intorno del punto di coordinate $(1,0)$ la curva definita dall'equazione

$$y^5 + 2y - 5x + 5 = 0$$

   è grafico di una funzione $y = g(x)$. Si scriva l'equazione della retta tangente alla curva in $(1,0)$.

5. (a) (2 punti) Si calcoli l'integrale di Riemann di

$$f(x,y) = x - y^2$$

   sulla regione del piano delimitata dalle rette di equazione $y = -x$, $y = 5$ e $y = x-2$.

6. (a) (3 punti) Si determinino i punti di massimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = y - x$$

su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \leq 1,\ -x \leq 0,\ y \leq 3\}$.

(b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2x^2 + 4xy.$$