Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 13/2/2025

NB: IL TESTO OCCUPA IN PARTE ANCHE IL RETRO DEL FOGLIO

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D, il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{x + y - 1}}}{y - x^2}$$

   (b) (4 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(0, \frac{3}{2})$, $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$, $(1, 1)$.

   (c) (1 punto) Si dica se la frontiera dell'insieme di definizione D è connessa per poligonali, giustificando la risposta.

2. (a) (2 punti) Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(9x^2 - 16y^2 + 2\pi)}{3x - 4y}$$

   .

   (b) (2 punti) Si scriva la formula di Taylor fino al secondo ordine con resto secondo Peano in $(0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = e^{(x^2+y)}$$

3. (a) (2 punti) Si determini il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^2}$.

   (b) Si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}$, $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.

      i. (2 punti) Si determini per quali valori di x la serie converge puntualmente.

      ii. (2 punti) Si dimostri che la serie converge uniformemente negli intervalli $[0, a]$, $a > 0$.

4. (a) (2 punti) Si dimostri che in un intorno del punto di coordinate $(0, -1)$ la curva definita dall'equazione

$$x^3 + y^3 - 3xy + 1 = 0$$

   è grafico di una funzione $y = g(x)$. Si determini se il punto $(0, -1)$ è un punto di massimo o di minimo locale per la funzione g.

5. (a) (2 punti) Si calcoli l'integrale di Riemann di

$$f(x, y) = x$$

   sulla regione E del piano cartesiano contenuta nel primo quadrante e delimitata dalla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$, dalla retta $y = x$ e dall'asse delle x.

6. (a) (4 punti) Si determinino i punti di massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2 + 1}$$

sull'insieme vincolo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

(b) (2 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x,y) = 2x^3 + y^2 - 3x^2 - 3y.$$