

CONCETTI DELLA MECCANICA DEL CONTINUO

Prof. Daniele Zaccaria
Dipartimento di Ingegneria Civile
Università di Trieste
Piazzale Europa 1, Trieste

26 maggio 2005

Indice

1	Spazio-tempo dell'osservatore	2
2	Geometria del corpo continuo	3
3	Cinematica del corpo continuo	5
3.1	Deformazione	5
3.2	Proprietà della funzione di deformazione	7
3.3	Moto	8
4	Misure di deformazione	9
4.1	Dilatazione lineare	9
4.2	velocità di dilatazione lineare	11
4.3	Dilatazione quadratica e dilatazione cubica	12
4.4	Scorrimento tra due linee orientate	13
5	Descrizione del moto	14
5.1	Descrizione lagrangiana (meccanica dei solidi)	15
5.2	Descrizione lagrangiana relativa (problema incrementale)	17
5.3	Descrizione euleriana (meccanica dei fluidi)	17
6	Dinamica del corpo continuo	19
6.1	Equazioni di bilancio	19
6.2	Massa, quantità di moto e momento della quantità di moto	22
6.3	Forze, momenti e tensione interna	24
6.3.1	Forze e momenti delle forze	24
6.3.2	Forze e momenti specifici	26
	Riferimenti bibliografici	29

La *meccanica del continuo* studia da una parte il *moto* e la conseguente *deformazione* di un *corpo continuo* (*cinematica del corpo continuo*), dall'altra parte le *forze* che lo sollecitano e il conseguente *stato di sforzo* (*dinamica del corpo continuo*), per poi procedere ad un'analisi

delle relazioni esistenti tra le *variabili cinematiche* e quelle *dinamiche* (*Principi generali e legami costitutivi*).

Il moto del corpo continuo avviene nello *spazio* e la stessa natura del corpo continuo dipende dalla sua immersione nello spazio. Lo *spazio* si presenta quindi quale primo concetto da precisare. Risulta poi possibile precisare la natura, essenzialmente geometrica, del corpo continuo (*geometria del corpo continuo*), a cui è strettamente correlato il concetto di *moto*. Il moto può poi essere descritto in due modi complementari: *descrizione lagrangiana* o *materiale*, a cui è correlato il concetto di *configurazione di riferimento*, e *descrizione euleriana* o *spaziale*, a cui è correlato il concetto di *regione di controllo dello spazio*, anche se, nella descrizione euleriana, è sempre implicita una *descrizione lagrangiana relativa*.

1 Spazio-tempo dell'osservatore

La descrizione del moto è sempre relativa ad un *osservatore*. Lo spazio risulta quindi essere lo spazio legato ad un osservatore. Un osservatore deve essere in grado di identificare i punti del suo spazio e di stabilire la coincidenza, in determinati istanti di tempo, tra i punti del suo spazio e quelli dello spazio di un altro osservatore, così come tra i punti del suo spazio e quelli di un qualunque mezzo materiale. La descrizione, fatta da un osservatore, del moto dello spazio legato ad un altro osservatore, stabilisce le *leggi di trasformazione* che regolano un *cambiamento di osservatore*.

Per quel che riguarda la struttura dello spazio legato ad un osservatore e nel quale avviene il moto del corpo continuo, nell'ambito della *meccanica newtoniana* si fa riferimento ad una struttura di *spazio euclideo ordinario* (*tridimensionale*).¹ Oltre allo spazio euclideo $\mathcal{E}$, all'osservatore resta associata una struttura euclidea T monodimensionale indipendente che rappresenta l'*asse del tempo*.

Alla struttura $\mathcal{E}$ di spazio euclideo è associato lo spazio $\mathcal{V}$ dei *vettori geometrici* o, più semplicemente, dei *vettori tout court*,² che rappresentano i segmenti dello spazio orientati dalla scelta di un verso di percorrenza e a meno della relazione di equipollenza. La scelta di una unità di misura per valutare la lunghezza dei segmenti caratterizza poi i vettori geometrici quali enti dotati di un modulo (un numero reale positivo) di una direzione dello spazio e di un verso di percorrenza.³

In $\mathcal{E}$ è sempre possibile scegliere un riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ che permette di istituire, previa scelta di una unità di misura di lunghezza, una corrispondenza biunivoca tra i punti P di $\mathcal{E}$ e le triplette ordinate (x, y, z) dello spazio numerico tridimensionale $\mathbb{R}^3$ (fig. 1). Inoltre i versori $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$, ed $\mathbf{i}_z$ associati agli assi di riferimento individuano una *base ortonormale* per lo spazio $\mathcal{V}$ dei vettori. Infine, l'origine O permette di mappare $\mathcal{E}$ in $\mathcal{V}$ tramite il *vettore posizione*:

$$\mathbf{r} = P - O = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z, \quad (1)$$

¹La struttura euclidea dello spazio si presta a descrivere ottimamente i fenomeni della macromeccanica che avvengono a livello terrestre, oltre ad una buona parte dei fenomeni astronomici. Se si vuole, tale struttura può essere vista come una approssimazione della struttura relativistica dello spazio. Ma ciò è inessenziale sia da un punto di vista pratico che di principio. Da un punto di vista pratico poiché la sola teoria che continua ad essere utilizzata ai fini dello studio dei fenomeni macromeccanici a livello terrestre (e in parte anche astronomico) è la teoria newtoniana, intrinsecamente più semplice. Da un punto di vista di principio poiché non vi è limite al progresso della ricerca e nel futuro anche la teoria relativistica potrebbe perdere la sua funzione fondante.

²Quando nel seguito si parlerà di vettori senza nessuna specificazione aggiuntiva, resta sottinteso che si tratta di vettori geometrici.

³Come i numeri reali positivi rappresentano la misura, in una data unità, di grandezze scalari intrinsecamente diverse, così i vettori geometrici, quali enti dotati di un modulo e di una direzione orientata, si prestano a rappresentare la misura, ancora rispetto ad una data unità, di grandezze vettoriali tra loro diverse, come per es. gli spostamenti e le forze, ma caratterizzate entrambe da una direzione orientata dello spazio. Quando un vettore geometrico si usa per esprimere la misura di una data grandezza vettoriale, il suo modulo è naturalmente riferito all'unità di misura della grandezza in gioco.

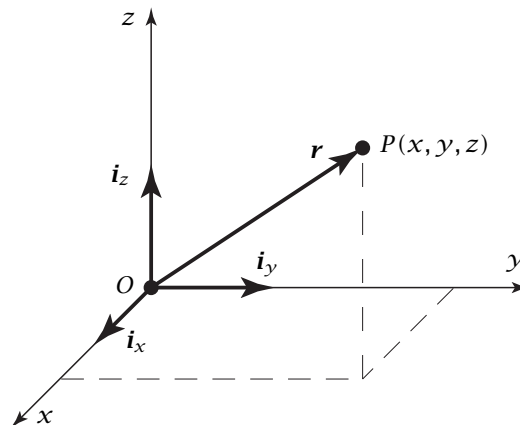


Figura 1: Sistema di coordinate cartesiano ortogonale

associato ad ogni punto P di $\mathcal{E}$.⁴

2 Geometria del corpo continuo

Un corpo risulta individuato, ad un dato istante, dalla sua *configurazione*, cioè dalla porzione dello spazio che esso occupa, e dalle *grandezze fisiche* che definiscono il suo stato. La natura geometrica di tale configurazione e la descrizione matematica di tali grandezze fisiche distingue il *modello molecolare (discreto)* della materia dal *modello continuo*.

Per quel che riguarda la configurazione, nel modello continuo si prescinde dalla struttura discreta della materia e si suppone che il corpo occupi una porzione $\mathcal{B}$ *continua* dello spazio. Tale posizione si può considerare come una semplificazione rispetto all'uso di un modello discreto nel quale si assuma che il corpo occupi solo un numero discreto di punti. Tuttavia, dato il numero enorme di punti che occorrerebbe considerare per affrontare un qualunque problema di macromeccanica, l'opzione discreta resta una pura petizione di principio, fatti salvi i risultati della meccanica statistica. Non solo, ma vi è un motivo più profondo che rende illusorio il modello discreto quale fondamento della macromeccanica, e cioè il fatto che la teoria delle particelle elementari è in continua evoluzione e non risulta quindi ben chiaro quale dovrebbe essere il modello discreto fondamentale. Naturalmente un modello discreto basato su ipotesi particolari e manipolato per il tramite della meccanica statistica è perfettamente legittimo, ma un tale modello particolare non ha niente, in linea di principio, che renda il modello continuo una sua approssimazione. Si tenga infine conto che molti fenomeni e caratteristiche a livello microscopico non si riflettono a livello macroscopico e che in ogni caso ciò che si riflette potrebbe essere in un qualche modo inglobato nel modello continuo.

Per quel che riguarda invece le grandezze fisiche che individuano lo stato del corpo, nel caso del modello continuo si assume che siano descritte da dei *campi continui* definiti nella configurazione $\mathcal{B}$ del corpo. La continuità di tali funzioni non è solo una semplice richiesta basata sull'esigenza di implementare un modello affrontabile matematicamente, dal quale possano quindi essere dedotte delle soluzioni quantitative di problemi pratici. Riposa invece anche, come si vedrà a suo tempo, su una esigenza più profonda legata alla descrizione del

⁴I vettori della base possono essere prescelti indipendentemente dalla unità di misura. In tal caso le componenti dipendono dalle unità di misura poiché debbono ricostruire, attraverso la base, un vettore che rappresenta la misura di una grandezza nelle date unità, e che quindi varia al loro variare. Quanto detto è in accordo con il fatto che nella relazione (1) compaiono le coordinate del punto, coordinate che sono determinate dalla misura di una lunghezza e che quindi dipendono dalla unità di misura di lunghezza.

moto di un corpo che nel corso del tempo attraversa configurazioni spaziali continue. Nella macromeccanica vi sono fenomeni discontinui, come quelli di propagazione di fratture o di onde, che possono essere affrontati nel modello continuo senza alcuna difficoltà, poiché le discontinuità riguardano essenzialmente un numero ristretto di punti, linee o superfici. Altri fenomeni di discontinuità, come il rimescolamento di un fluido che avviene nel corso di un moto turbolento, non possono essere descritti da funzioni continue della posizione dei punti del corpo. Ma se non può essere descritto il rimescolamento del fluido, ovverossia se non possono essere dedotte le traiettorie effettive, discontinue, che seguono i vari punti nel corso del moto, ciò non significa che non possano essere dedotte in modo soddisfacente altre grandezze fisiche legate alla posizione spaziale invece che ai punti del corpo. Ed in ogni caso il moto continuo descrivente le traiettorie dei singoli punti può spesso interpretarsi come moto medio, assumendo quindi un significato fisico preciso.

Come detto, un corpo continuo occupa una porzione $\mathcal{B}$ continua dello spazio (fig. 2). Tale

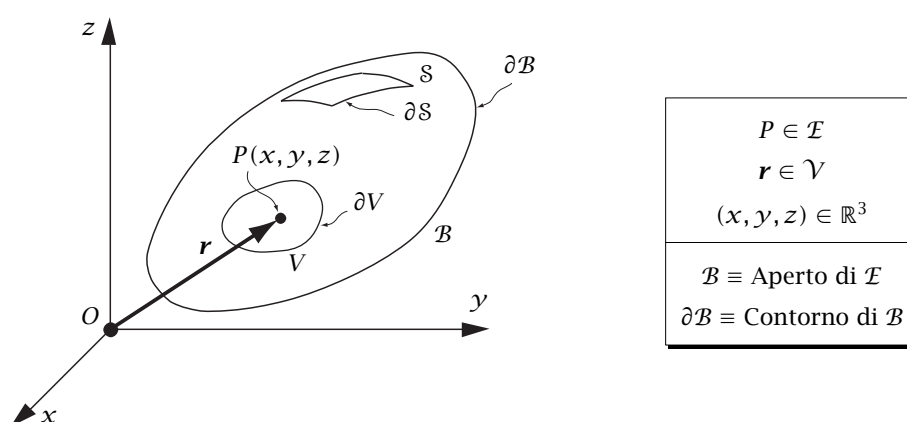


Figura 2: Geometria del corpo continuo

porzione viene identificata con un aperto dello spazio $\mathcal{E}$, di contorno $\partial\mathcal{B}$ sufficientemente regolare, nel senso che si assumono quelle regolarità che sono alla base delle trasformazioni integrali usate nel seguito: essenzialmente devono risultare verificate le ipotesi alla base della formula di Green. La supposta continuità di $\mathcal{B}$ ha come conseguenza che da $\mathcal{B}$ stesso possono essere estratti solo dei volumi e che, a qualunque scala, una partizione di $\mathcal{B}$ origina un insieme di volumi. Tali volumi, se presi singolarmente, possono identificarsi con un punto materiale (una particella), ma se presi globalmente, non costituiscono un sistema di punti materiali, poiché le loro superfici di separazione continuano ad essere in contatto.

Ad ogni punto del corpo continuo restano associati tre diversi tipi di enti geometrici:

1. **le linee uscenti dal punto**, le cui parti lineari o *elementi di linea*:

$$d\mathbf{P} = d\mathbf{P}s, \quad (2)$$

individuati dalle tangenti s nel punto alle linee, coincidono con i *segmenti orientati* uscenti dal punto (fig. 3a). Tali elementi di linea definiscono uno spazio (lineare), detto *spazio tangente (nel punto)*, che nel seguito sarà indicato con $\mathcal{V}_P$. Naturalmente lo spazio $\mathcal{V}_P$ coincide con lo spazio $\mathcal{V}$ dei vettori geometrici associato allo spazio euclideo $\mathcal{E}$ dell'osservatore;

2. **le superfici nell'intorno del punto**, le cui parti lineari o *elementi di area*:

$$d\mathbf{A} = d\mathbf{P}_1 \times d\mathbf{P}_2 = d\mathbf{A}\mathbf{n}, \quad (3)$$

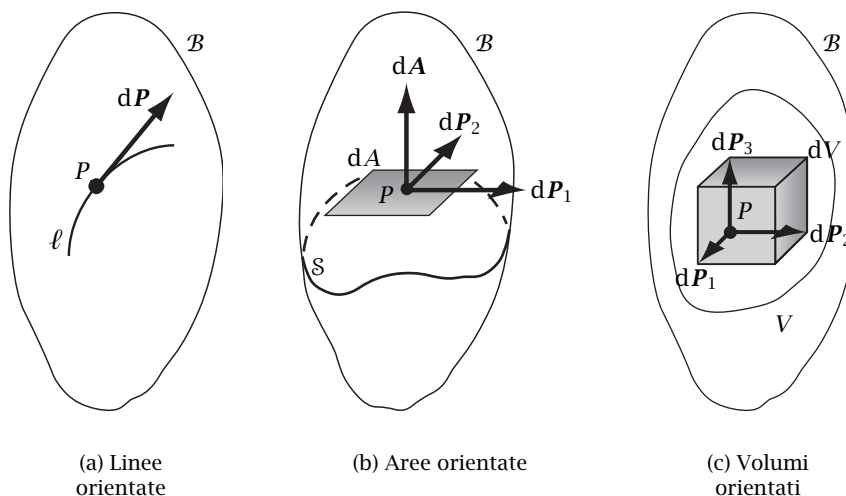


Figura 3: Enti geometrici associati ai punti di un corpo continuo

individuate dai piani tangenti nel punto, coincidono con le *aree orientate* nell'intorno del punto e definiscono uno spazio lineare che nel seguito sarà indicato con $\mathcal{A}_P$. Tali aree sono rappresentate da due vettori dP_1 e dP_2 giacenti nei piani tangenti alle superfici, i cosiddetti *bivettori*, oppure, equivalentemente in ambito euclideo, restano individuate dalle normali $\mathbf{n}$ alle superfici (fig. 3b). Nella (3) l'operazione $\times$ indica il prodotto vettoriale di due vettori;

3. **i volumi nell'intorno del punto**, le cui parti lineari o *elementi di volume*:

$$dV = (dP_1 \times dP_2) \cdot dP_3, \quad (4)$$

individuati dallo stesso spazio, coincidono con i *volumi orientati* nell'intorno del punto. Tali volumi sono rappresentati da tre vettori dello spazio, i cosiddetti *trivettori*, oppure, equivalentemente in ambito euclideo, restano individuati dalla misura del volume con segno, segno dipendente dalle orientazioni dello spazio e del volume stesso (fig. 3c).

3 Cinematica del corpo continuo

Un corpo continuo, come detto, è individuato ad ogni istante dai punti di un aperto dello spazio ambiente. Ognuno di questi infiniti punti traccia, nel corso del tempo, una traiettoria. La cinematica del corpo continuo si identifica quindi con la cinematica dei suoi punti. In definitiva, ad ognuno dei punti del mezzo continuo competono le variabili cinematiche proprie della cinematica del punto materiale. Appartenendo ai punti del corpo, i valori, ad un dato istante, di queste variabili individuano dei campi definiti nell'aperto dello spazio ambiente occupato, in quell'istante, dal mezzo continuo.

3.1 Deformazione

Un corpo continuo occupa, ad istanti diversi, diverse posizioni nello spazio. In un intervallo di tempo Δt , di istante iniziale t_1 e finale t_2 , il corpo continuo passa quindi dalla configurazione B_1 a quella B_2 , mentre un punto generico $P_1 \in B_1$ passa nella posizione $P_2 \in B_2$ descrivendo una linea che rappresenta la *traiettoria* del punto (fig. 4).

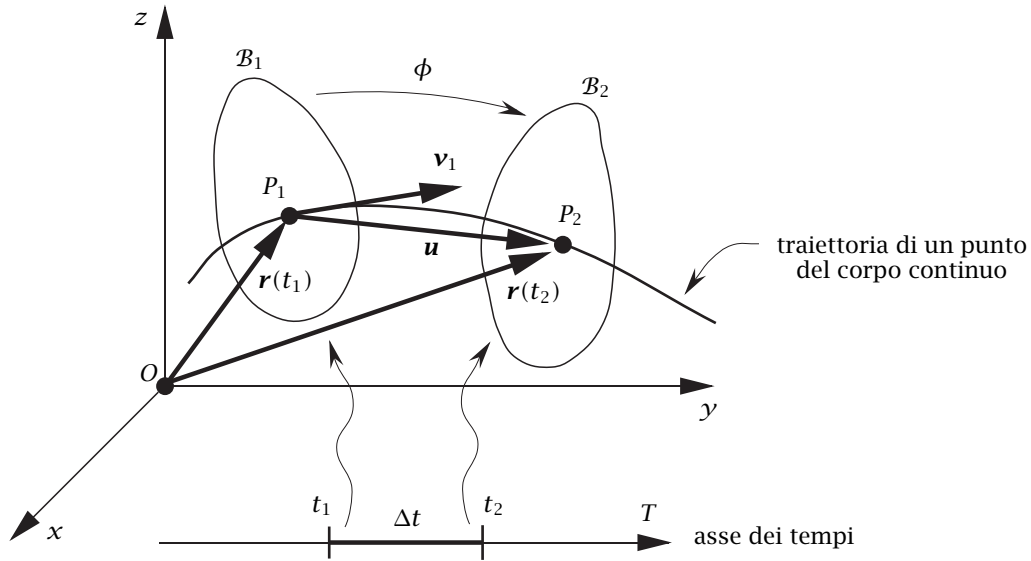


Figura 4: Moto di un corpo continuo

Questa corrispondenza tra punti di B_1 e B_2 genera una mappa suriettiva ϕ :

$$\phi: B_1 \rightarrow B_2, \quad P_1 \mapsto \phi(P_1) = P_2, \quad (5)$$

detta *funzione di deformazione* o più semplicemente *deformazione* del corpo. Si noti che se tale funzione di deformazione del corpo coincide con un moto rigido il corpo “non si deforma”, ovvero la “deformazione” del corpo è nulla.

La mappa:

$$\mathbf{u}: B_1 \rightarrow \mathcal{V}, \quad P_1 \mapsto \mathbf{u}(P_1) = P_2 - P_1 = \phi(P_1) - P_1, \quad (6)$$

rappresenta invece il campo degli *spostamenti* dei punti del corpo continuo. Nella (6) $\mathcal{V}$ è lo spazio dei vettori dello spazio ambiente.

Si noti che la funzione ϕ di deformazione e il campo $\mathbf{u}$ degli spostamenti sono associati ad un intervallo Δt di tempo. Per tale fatto lo spazio degli spostamenti è, concettualmente, distinto dallo spazio tangente in un punto del continuo, che invece rappresenta gli elementi di linea uscenti dal punto ad un dato istante.

L'ipotesi che la funzione ϕ di deformazione (5) individui in modo completo la cinematica del corpo continuo lo qualifica quale *corpo semplice*, e nel seguito faremo senz'altro riferimento a corpi continui semplici. Si potrebbe tuttavia costruire un modello più generale supponendo che ad ogni punto del corpo continuo sia associata una qualche “struttura” che necessiti di una descrizione indipendente, allo scopo di permettere di inglobare nel modello continuo delle proprietà micromeccaniche. Proprio per questo motivo tale modello è modernamente detto *microcontinuo*. I corpi microcontinui si distinguono principalmente in *corpi micropolari* (o, per usare vecchie denominazioni, *polari* o di *Cosserat*⁵) e in *corpi micromorfici* a seconda che la struttura associata ai punti sia rigida oppure, rispettivamente, deformabile. Per es., nel caso dei corpi micropolari ad ogni punto può essere associata una terna rigida di assi, che nel corso del moto non solo subisce uno spostamento (lo spostamento del punto a cui la terna è associata), ma anche una rotazione. Il punto acquista così una orientazione (da cui il termine polare) ed è allora possibile parlare di “rotazione in un punto”. Alla funzione ϕ di deformazione occorre di conseguenza associare una funzione che descriva tale rotazione. Le applicazioni del modello di corpo microcontinuo riguardano, per es., i materiali compositi,

⁵Dal nome dei fratelli Cosserat che, nel 1909, per primi esposero una teoria sull'argomento.

le sospensioni, i liquidi biologici (come il sangue), i cristalli liquidi, la turbolenza, i polimeri (materiali composti da grandi molecole), la microfratturazione diffusa, le dislocazioni, i mezzi granulari, i continui soggetti a forze elettromagnetiche.

3.2 Proprietà della funzione di deformazione

Si affronta ora il problema delle restrizioni da imporre alla funzione ϕ di deformazione (5). In accordo con le ipotesi del modello continuo occorre innanzitutto assumere la sua continuità.

Volendo preservare l'*impenetrabilità della materia*, ovvero l'identità dei punti nel corso del tempo, la deformazione ϕ dovrà essere iniettiva, oppure, in altri termini, a due punti distinti P_1 e Q_1 in $\mathcal{B}_1$ devono corrispondere due punti distinti P_2 e Q_2 in $\mathcal{B}_2$. La funzione ϕ è quindi invertibile con inversa $\phi^{-1}: \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1$ continua.

Volendo introdurre delle misure di deformazione legate agli enti geometrici (linee, superfici e volumi) nell'intorno di un punto, occorre preservare l'individualità locale di tali enti. Ciò imporrebbe innanzitutto la continuità della funzione di deformazione, se la continuità di tutte le funzioni implicate non fosse già parte fondante del modello continuo. In secondo ordine occorre che la funzione ϕ conservi le parti lineari dei tre enti geometrici, cioè gli elementi di linea, le giaciture e gli elementi di volume. Dato che le giaciture e gli elementi di volume dipendono dagli elementi di linea, occorre in definitiva richiedere che la funzione ϕ conservi gli elementi di linea e la loro individualità. Si indichino con $\mathcal{V}_{P_1}$ e $\mathcal{V}_{P_2}$ gli *spazi tangenti* nei

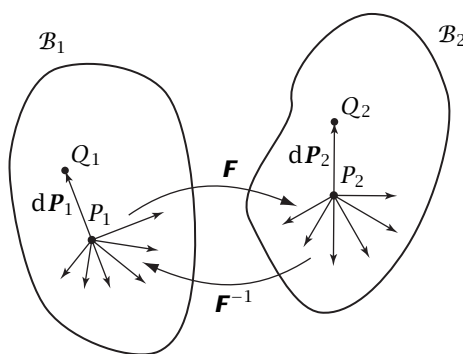


Figura 5: Gradiente della deformazione

punti P_1 di $\mathcal{B}_1$ e, rispettivamente, P_2 di $\mathcal{B}_2$ (fig. 5). Deve allora esistere una trasformazione $\mathbf{F}$ invertibile tale che:

$$\mathbf{F}: \mathcal{V}_{P_1} \rightarrow \mathcal{V}_{P_2}, \quad d\mathbf{P}_1 \mapsto d\mathbf{P}_2 = \mathbf{F} d\mathbf{P}_1. \quad (7)$$

Poiché $\mathbf{F}$ mette in relazione elementi di linea, elementi che forniscono la parte lineare della posizione dei punti, deve valere la relazione:

$$\phi(Q_1) - \phi(P_1) = \mathbf{F}(Q_1 - P_1) + o(|Q_1 - P_1|), \quad (8)$$

per ogni punto Q_1 in $\mathcal{B}_1$. Nella (8) il simbolo “o” rappresenta l’*o piccolo di Landau* e indica termini di ordine superiore. La relazione (8) qualifica $\mathbf{F}$ quale gradiente della deformazione ϕ :

$$\mathbf{F} = \text{grad } \phi, \quad (9)$$

e ne consegue che la funzione ϕ e la sua inversa devono essere derivabili con derivate continue.

Quale ultima condizione sulla funzione di deformazione, si richiede infine la *conservazione dell'ordine*: tre elementi di linea uscenti da un punto e costituenti, presi in un certo

ordine, una terna destra devono essere trasformati dalla deformazione ϕ in tre elementi di linea ancora costituenti, presi nello stesso ordine, una terna destra (fig. 6). Si osservi che le

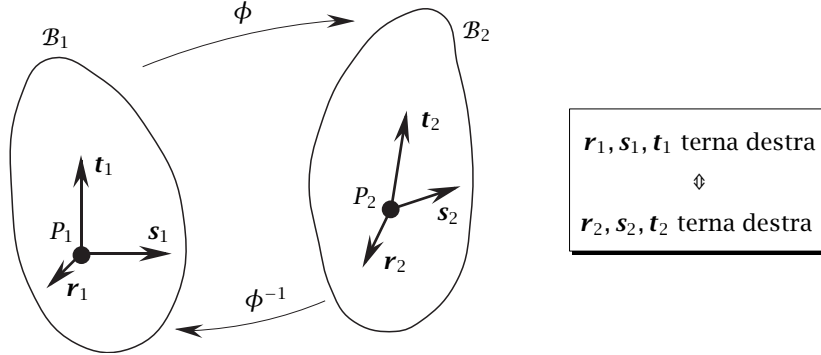


Figura 6: Conservazione dell'ordine

ipotesi di continuità e di derivabilità da sole non implicano la conservazione dell'ordine. Quale esempio si consideri una *riflessione*, funzione continua e derivabile con derivate continue ma che inverte la destra con la sinistra, modificando quindi l'orientazione.

3.3 Moto

Le caratteristiche del moto riguardano la traiettoria, la velocità e l'accelerazione dei punti del continuo.

La *traiettoria* è la curva che un punto del corpo P descrive nello spazio nel corso del moto (fig. 4 a pagina 6):

$$P : T \rightarrow \mathcal{E} \quad t \mapsto P(t). \quad (10)$$

La traiettoria può essere descritta introducendo il vettore posizione $\mathbf{r}$ del punto P rispetto ad un punto di riferimento O dello spazio:

$$\mathbf{r} : T \rightarrow \mathcal{V} \quad t \mapsto \mathbf{r}(t) = P(t) - O. \quad (11)$$

La *velocità* $\mathbf{v}$ di un punto del continuo è associata ad un istante di tempo t e si ottiene dallo spostamento $\mathbf{u}(\Delta t)$ eliminando l'intervallo di tempo Δt (fig. 7):

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(\Delta t)}{\Delta t}. \quad (12)$$

In altri termini rappresenta lo spostamento di un punto, a partire da una data posizione, nell'intervallo unitario di tempo, ovvero la parte lineare del moto o, se si vuole, *l'atto di moto*. Dalla (12) si ottiene un campo definito nella configurazione $\mathcal{B}$ che il corpo assume al tempo t e a valori nello spazio $\mathcal{V}$ dei vettori:

$$\mathbf{v} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V} \quad P \mapsto \mathbf{v}(P). \quad (13)$$

Poiché risulta che l'incremento $\Delta \mathbf{r}$ del vettore posizione $\mathbf{r}$ del punto P del corpo, nell'intervallo di tempo Δt , uguaglia lo spostamento nello stesso intervallo di tempo (fig. 4 a pagina 6), la velocità può essere calcolata derivando il vettore posizione del punto:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (14)$$

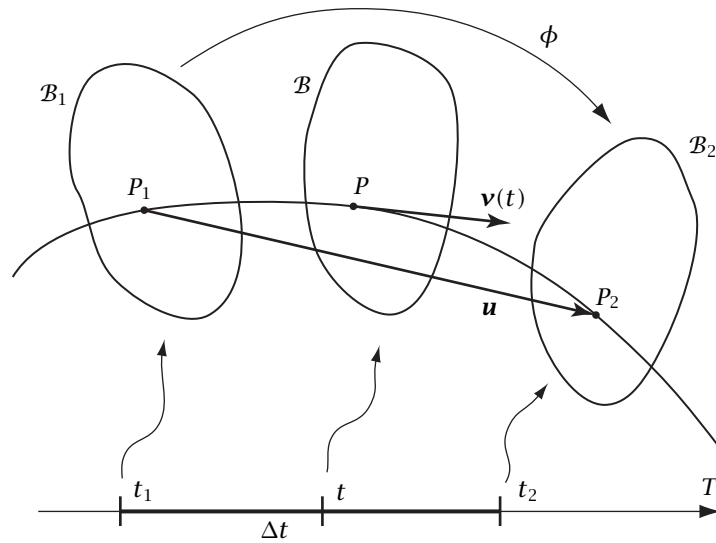


Figura 7: Velocità

La variazione nel corso del tempo della velocità conduce poi al concetto di *accelerazione* $\mathbf{a}$ di un punto del corpo:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (15)$$

Come per la velocità, dalla (15) si ottiene un campo definito nella configurazione $\mathcal{B}$ che il corpo assume al tempo t e a valori nello spazio $\mathcal{V}$ dei vettori:

$$\mathbf{a}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V} \quad P \mapsto \mathbf{a}(P). \quad (16)$$

Per quel che riguarda le restrizioni da imporre alle funzioni precedenti, innanzitutto alla traiettoria di un punto è richiesto di essere continua. Poi, se si vuole che esistano la velocità (12) e l'accelerazione (15) del dato punto, occorre richiedere che la sua traiettoria sia derivabile fino al secondo ordine e con derivate continue.⁶ Infine, in sintonia con il modello continuo, si richiede che i campi di velocità (13) e di accelerazione (16) ad un dato istante siano continui.

4 Misure di deformazione

In un moto rigido le linee tracciate all'interno di un corpo continuo conservano la loro *lunghezza*, così come due linee uscenti da un punto conservano l'*angolo* da esse formato, una superficie interna al corpo conserva la sua *area* ed infine un volume interno al corpo conserva la sua *misura del volume*. Se si ha deformazione in senso proprio queste misure variano nel tempo. La loro variazione risulta legata agli intervalli di tempo.

4.1 Dilatazione lineare

Si consideri allora un intervallo di tempo $\Delta t = [t_1, t_2]$ durante il quale il corpo passa dalla configurazione $\mathcal{B}_1$ a quella $\mathcal{B}_2$. Nello stesso intervallo, una linea ℓ_1 della configurazione $\mathcal{B}_1$

⁶Mentre una traiettoria discontinua è priva di qualunque significato fisico, così non è in generale per una traiettoria che presenti delle discontinuità nelle sue derivate, potendo queste discontinuità interpretare fenomeni fisici ben precisi. Per es., nel caso di un impulso concentrato ad un dato istante, fornito da un colpo di martello od altro, la velocità subisce una discontinuità a quell'istante. Al solito, l'ipotesi di continuità non preclude lo studio di discontinuità localizzate in un numero limitato di istanti di tempo.

si trasforma nella linea ℓ_2 della configurazione $\mathcal{B}_2$ (fig. 8). In tale processo la linea subisce un

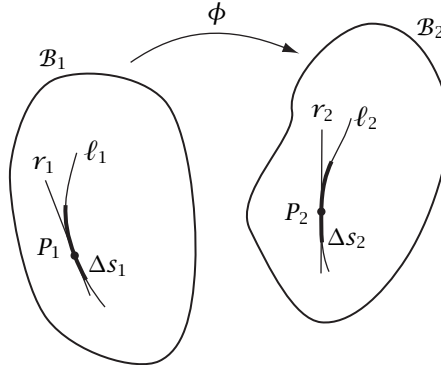


Figura 8: Dilatazione lineare

allungamento $\Delta\ell$:

$$\Delta\ell = \ell_2 - \ell_1, \quad (17)$$

definito dalla differenza tra le lunghezze delle linee,⁷ lunghezze indicate con gli stessi simboli utilizzati per le linee stesse. Si noti che l'allungamento dipende dalla linea e non dal punto.

Rapportando l'allungamento della linea alla sua misura iniziale si ottiene l'*allungamento per unità di linea* o *dilatazione lineare* ϵ :

$$\epsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1} = \frac{\Delta\ell}{\ell_1}, \quad (18)$$

mentre rapportando la lunghezza finale della linea ancora alla sua misura iniziale si ottiene lo *stiramento* (*stretch*) λ :

$$\lambda = \frac{\ell_2}{\ell_1}. \quad (19)$$

Le (18) e (19) forniscono due misure di deformazione⁸ legate ad una linea, misure che possono essere indicate con i simboli ϵ_ℓ e λ_ℓ se si vuole sottolineare tale fatto. Si noti che tra le due misure di deformazione corre la relazione:

$$\lambda = \epsilon + 1. \quad (20)$$

Si consideri ora una successione di parti Δs_1 della linea ℓ_1 che si racchiudano attorno al punto P_1 , appartenente alla linea stessa (fig. 8). La dilatazione lineare e lo stiramento della generica parte di linea Δs_1 valgono $(\Delta s_2 - \Delta s_1)/\Delta s_1$ e $\Delta s_2/\Delta s_1$ rispettivamente, avendo indicato con Δs_2 la corrispondente parte di linea nella configurazione finale $\mathcal{B}_2$. Queste espressioni possono considerarsi alla stregua di una dilatazione lineare e di uno stiramento medi sulla linea ℓ_1 nell'intorno del punto P_1 . Si perviene così a definire, al limite per $\Delta s_1 \rightarrow P_1$, la dilatazione lineare e lo stiramento nel punto P_1 nella direzione della linea ℓ_1 , che indichiamo ancora con ϵ e λ .⁹

$$\epsilon = \lim_{\substack{\Delta s_1 \rightarrow P_1 \\ \Delta s_1 \subset \ell_1}} \frac{\Delta s_2 - \Delta s_1}{\Delta s_1}, \quad \lambda = \lim_{\substack{\Delta s_1 \rightarrow P_1 \\ \Delta s_1 \subset \ell_1}} \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1}. \quad (21)$$

⁷Naturalmente se $\ell_2 < \ell_1$ l'"allungamento" diventa negativo e risulta quindi un "accorciamento".

⁸Se il moto è rigido lo stiramento vale 1, a differenza della dilatazione che invece si annulla.

⁹Per evitare ambiguità, si sottolinea il fatto che nel termine $\Delta s_1 \rightarrow P_1$ della (21) Δs_1 rappresenta una linea (che è parte della linea ℓ_1), ed infatti si indica così che il limite è eseguito su una successione di parti della linea Δs_1 che si racchiudono attorno al punto P_1 . Nella frazione $(\Delta s_2 - \Delta s_1)/\Delta s_1$ lo stesso simbolo compare invece con il significato di lunghezza della linea.

Tenendo conto che al limite la linea Δs_1 tende alla tangente alla linea ℓ_1 nel punto P_1 se ne deduce che i limiti (21) non dipendono tanto dalla linea ℓ_1 quanto dalla tangente r_1 alla linea nel punto P_1 . In altri termini, i limiti (21) coincidono se eseguiti su due diverse linee passanti per P_1 ed aventi medesima tangente in tale punto. In definitiva la relazione (21) definisce due misure di deformazione legate ai punti del solido ed alle direzioni uscenti da tali punti. Tali misure possono essere indicate con i simboli ϵ_r e λ_r per sottolineare tale fatto.

Per recuperare l'allungamento $\Delta\ell$ dell'intera linea occorre integrare la dilatazione lineare sulla linea stessa:

$$\Delta\ell = \int_{\ell_1} \epsilon_r ds_1, \quad (22)$$

dove ds_1 indica l'elemento di linea nella configurazione $\mathcal{B}_1$. L'integrale (22) è ben definito poiché in un generico punto P_1 della linea è definita la tangente r_1 alla linea stessa e quindi anche il corrispondente valore ϵ_r della dilatazione.

4.2 velocità di dilatazione lineare

Si consideri ora una successione di intervalli di tempo Δt che si racchiudano attorno all'istante t , e sia $\epsilon_r(\Delta t)$ la dilatazione lineare nell'intervallo Δt , nel punto P_1 e nella direzione r_1 , corrispondenti rispettivamente del punto P e della direzione r uscente da P relativi alla configurazione $\mathcal{B}$ che il corpo assume al tempo t . Rapportando tale misura di deformazione alla misura dell'intervallo di tempo si ottiene la velocità media di deformazione e, al limite per $\Delta t \rightarrow t$, la *velocità di dilatazione lineare (stretching)* d_r all'istante t , nel punto P e nella direzione r :

$$d_r = \lim_{\Delta t \rightarrow t} \frac{\epsilon_r(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow t} \frac{\Delta\ell}{\ell_1 \Delta t}. \quad (23)$$

Dalla (23) discende la seguente relazione tra l'incremento di lunghezza $d\ell$ e l'incremento dt di tempo, valida in un generico istante di tempo t :

$$\frac{d\ell}{\ell} = d_r dt, \quad (24)$$

dove ℓ e d_r sono lunghezza e velocità di dilatazione al dato istante.

Si noti che la dilatazione $\epsilon(\Delta t)$, quale funzione del dominio Δt dell'asse del tempo, non è sommabile. Si consideri infatti una linea di lunghezza ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 rispettivamente agli istanti crescenti t_1 , t_2 e t_3 . Posto $\Delta t = [t_1, t_3]$, $\Delta t_1 = [t_1, t_2]$ e $\Delta t_2 = [t_2, t_3]$, l'intervallo Δt coincide con l'unione dei due intervalli disgiunti Δt_1 e Δt_2 . Risulta:

$$\epsilon(\Delta t) = \frac{\ell_3 - \ell_1}{\ell_1} = \frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1} + \frac{\ell_3 - \ell_2}{\ell_1}, \quad (25a)$$

$$\epsilon(\Delta t_1) + \epsilon(\Delta t_2) = \frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1} + \frac{\ell_3 - \ell_2}{\ell_2}. \quad (25b)$$

Poiché in generale $\ell_1 \neq \ell_2$ si ha quindi:

$$\epsilon(\Delta t) \neq \epsilon(\Delta t_1) + \epsilon(\Delta t_2), \quad (26)$$

come volevasi dimostrare.¹⁰

Ne consegue che integrando la velocità di deformazione nell'intervallo di tempo Δt non si ottiene la dilatazione $\epsilon_r(\Delta t)$, ma una diversa misura di deformazione $\bar{\epsilon}_r(\Delta t)$ detta *dilatazione vera* oppure *dilatazione logaritmica*, il cui incremento, per via della (24), vale:

$$d\bar{\epsilon} = \frac{d\ell}{\ell}. \quad (27)$$

¹⁰Naturalmente se le dilatazioni lineari si calcolano rapportando tutti gli allungamenti alla lunghezza di una configurazione comune, per es. quella all'istante t_1 in cui la linea ha lunghezza ℓ_1 , la sommabilità viene ripristinata. Ma tale sommabilità riguarda gli intervalli non disgiunti $[t_1, t_2]$ e $[t_1, t_3]$.

In contrapposizione alla dilatazione vera, la dilatazione lineare ϵ precedentemente introdotta viene anche detta *dilatazione nominale* o *ingegneristica*.

La dilatazione vera $\bar{\epsilon}$ corrispondente ad un intervallo di tempo Δt nel quale la linea passa dalla lunghezza ℓ_1 alla lunghezza ℓ_2 vale quindi:

$$\bar{\epsilon} = \int_{t_1}^{t_2} d_r dt = \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{d\ell}{\ell} = [\ln \ell]_{\ell_1}^{\ell_2} = \ln \ell_2 - \ln \ell_1 = \ln \frac{\ell_2}{\ell_1}. \quad (28)$$

La relazione (28) giustifica la denominazione di dilatazione logaritmica. La relazione tra la dilatazione vera e quella nominale si ottiene manipolando la (28):

$$\bar{\epsilon} = \ln \frac{\ell_2}{\ell_1} = \ln \lambda = \ln (1 + \epsilon), \quad (29)$$

dove λ rappresenta lo stiramento.

4.3 Dilatazione quadratica e dilatazione cubica

Tutto quello che è stato detto per una linea appartenente al corpo si può dire per una sua superficie (interna) e per un suo volume. Siano allora Δt un intervallo di tempo e S_1 una superficie e V_1 un volume appartenenti alla configurazione iniziale $\mathcal{B}_1$ del solido nel dato intervallo (fig. 9 e fig. 10). Siano poi S_2 e V_2 i corrispondenti elementi geometrici nella

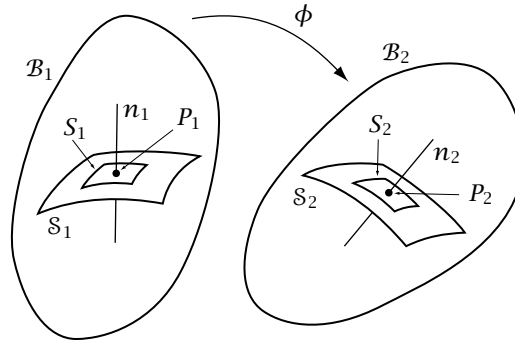


Figura 9: Dilatazione quadratica

configurazione finale $\mathcal{B}_2$. La *dilatazione quadratica* ς e la *dilatazione cubica* θ restano definite in modo analogo alla (18):

$$\varsigma = \frac{S_2 - S_1}{S_1}, \quad \theta = \frac{V_2 - V_1}{V_1}, \quad (30)$$

intendendo che gli stessi simboli impiegati precedentemente per gli enti geometrici indichino ora le loro misure (di superficie e di volume).

Introducendo poi una successione di superfici S_1 in S_1 , ed analogamente una successione di volumi ΔV_1 , che si racchiudono attorno al punto P_1 si ottengono le misure di dilatazione quadratica e cubica nell'intorno del punto materiale P_1 :

$$\varsigma = \lim_{\substack{S_1 \rightarrow P_1 \\ S_1 \subset S_1}} \frac{S_2 - S_1}{S_1}, \quad \theta = \lim_{\Delta V_1 \rightarrow P_1} \frac{\Delta V_2 - \Delta V_1}{\Delta V_1}. \quad (31)$$

Poiché al limite la superficie S_1 appartiene al piano tangente nel punto P_1 alla superficie S_1 , il limite espresso dalla prima delle (31) dipende solo da tale piano tangente, o, se si vuole, dalla direzione n_1 normale alla superficie nel punto P_1 (fig. 9). In altre parole, due diverse

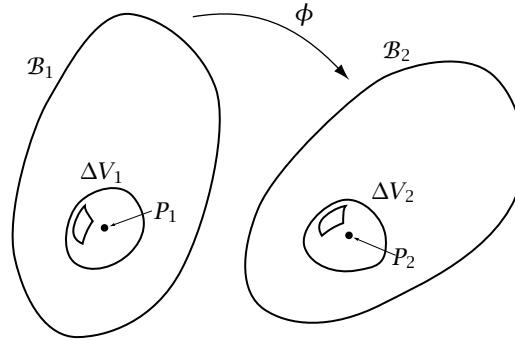


Figura 10: Dilatazione cubica

superfici per P_1 aventi lo stesso piano tangente, e quindi la stessa normale in P_1 , conducono allo stesso valore della dilatazione quadratica. In definitiva la prima delle (31) definisce una misura di deformazione legata ai punti materiali del solido ed ai piani di sostegno tali punti, piani rappresentati dalle direzioni normali. Per quel che riguarda la dilatazione cubica, la misura espressa dalla seconda delle (31) dipende solo dal punto P_1 .

4.4 Scorrimento tra due linee orientate

Si considerino ora due linee orientate ℓ_1 e m_1 passanti per il punto P_1 della configurazione iniziale B_1 , in un intervallo di tempo Δt . Nella fig. 11a l'orientamento delle due linee è

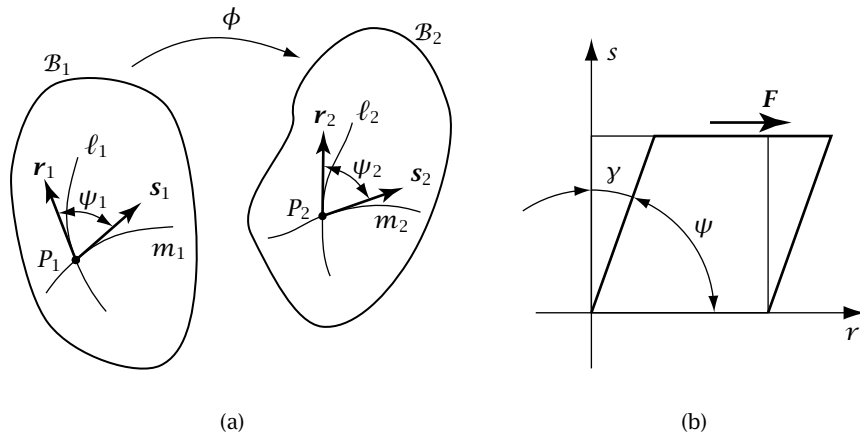


Figura 11: Scorrimento di due linee

individuato dai versori tangenti r_1 e s_1 nel punto P_1 alle linee ℓ_1 e m_1 rispettivamente. L'angolo ψ_1 tra le due linee orientate rappresenta l'angolo compreso tra le parti positive delle rette tangenti in P_1 alle due linee. Nel corso della deformazione le due linee materiali si trasformano nelle due linee ℓ_2 e m_2 , appartenenti alla configurazione finale B_2 e passanti per il punto P_2 corrispondente del punto P_1 . L'orientazione delle due linee iniziali ℓ_1 e m_1 si estende alle due linee finali ℓ_2 e m_2 : restano così individuati i due versori r_2 e s_2 tangenti nel punto P_2 e l'angolo ψ_2 tra questi (fig. 11a). Il decremento γ dell'angolo tra le due linee

che si ha nel corso della deformazione viene chiamato *scorrimento*:

$$\gamma = \psi_1 - \psi_2. \quad (32)$$

Lo scorrimento dipende dalle due linee orientate ℓ_1 e m_1 solo attraverso i versori tangenti $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{s}_1$, e quindi risulta già ridotto al punto senza bisogno di un'operazione di limite. In definitiva la (32) definisce una misura di deformazione legata ai punti del solido ed alle coppie di direzioni orientate uscenti da tali punti. Tale misura può essere indicata con il simbolo γ_{rs} per sottolineare tale fatto.

Per giustificare la scelta del decremento dell'angolo piuttosto che del suo incremento nella definizione (32) di scorrimento, si consideri un cubo la cui faccia laterale è illustrata nella fig. 11a. Se il cubo è sollecitato, nella sua faccia superiore, da una forza $\mathbf{F}$ concorde col il verso di $\mathbf{r}$, ci si aspetta che la faccia superiore “scorra” rispetto alla faccia inferiore nella direzione della forza e quindi di $\mathbf{r}$, provocando una diminuzione dell'angolo tra $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$. La convenzione adottata assicura che in tale caso lo scorrimento sia positivo.

Se le due linee sono inizialmente ortogonali, cioè se $\psi_1 = \pi/2$ e quindi $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}_1 = 0$, risulta:

$$\sin \gamma_{rs} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \psi_2 \right) = \cos \psi_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{s}_2. \quad (33)$$

Quindi il seno dello scorrimento di due linee inizialmente ortogonali uguaglia il prodotto scalare dei versori tangenti alle linee finali.¹¹

Analogamente alla velocità di dilatazione è possibile introdurre la velocità di scorrimento. Si consideri a tale scopo una successione di intervalli di tempo Δt che si racchiudano attorno al tempo t , e sia $\gamma_{rs}(\Delta t)$ lo scorrimento nell'intervallo Δt , nel punto P_1 e relativamente alle direzioni $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{s}_1$. Rapportando tale misura di deformazione alla misura dell'intervallo di tempo si ottiene la velocità media di deformazione e, al limite per $\Delta t \rightarrow t$, la *velocità di scorrimento* $d_{rs}^{(y)}$:

$$d_{rs}^{(y)} = \lim_{\Delta t \rightarrow t} \frac{\gamma_{rs}(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow t} \frac{\psi_1 - \psi_2}{\Delta t}. \quad (34)$$

La velocità di scorrimento (34) è relativa ad un istante t , a un punto P e a due direzioni orientate $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ uscenti dal punto dato.

Dalla (34) discende la seguente relazione tra l'incremento dell'angolo $d\psi$ tra due linee e l'incremento dt di tempo, valida in un generico istante di tempo t :

$$d\psi = -d_{rs}^{(y)} dt, \quad (35)$$

dove il segno meno dipende dal fatto che, come detto più sopra, lo scorrimento fornisce il decremento dell'angolo.

5 Descrizione del moto di un corpo continuo

La descrizione completa del moto di un mezzo continuo semplice richiede la conoscenza delle traiettorie dei singoli punti. Una tale descrizione non è però sempre necessaria ed è inoltre sensata solo se i punti del continuo sono distinguibili gli uni dagli altri in modo da poter essere identificati nel corso del tempo. A tale proposito, i mezzi continui vengono differenziati in due grandi famiglie: i *corpi solidi*, che “conservano” la propria forma o, quanto meno, conservano un ordine tra le sue parti che permette di identificarle ad ogni istante, e i *corpi fluidi*, che, all'opposto, non hanno una forma propria e sono soggetti a rimescolamenti che modificano l'ordine tra le sue parti. I corpi solidi sono quindi quelli che meglio aderiscono all'ipotesi di continuità della deformazione. All'opposto i corpi fluidi in diverse circostanze si allontanano da tale ipotesi, ma d'altra parte queste sono proprio quelle circostanze in cui conoscere la posizione effettiva dei singoli punti è privo di interesse.

¹¹Se due linee sono ortogonali ad un dato istante, la relazione (33) vale per qualunque intervallo di tempo che inizi da tale istante.

5.1 Descrizione lagrangiana (meccanica dei solidi)

Si ha una *descrizione materiale* o *lagrangiana* del moto di un corpo continuo quando si segue l'evoluzione nel tempo del corpo stesso. Un singolo punto del corpo è oggetto di osservazione per tutto il tempo in cui il moto viene studiato. A tal fine si adotta una *configurazione di riferimento* $\mathcal{B}_0$ del corpo continuo, detta anche *configurazione materiale* o *lagrangiana*, per mappare la posizione dei suoi punti nel corso del moto (fig. 12). I punti X della con-

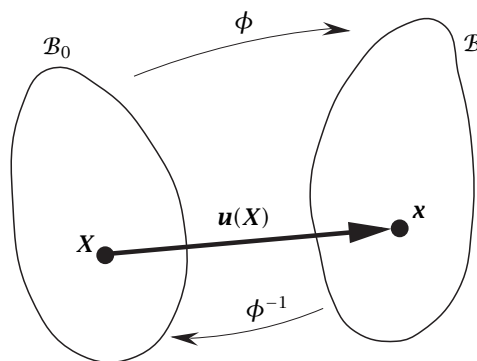


Figura 12: Descrizione lagrangiana

figurazione di riferimento, detti *punti materiali*, etichettano i punti del corpo continuo che nel corso del tempo possono trovarsi in posizioni diverse dello spazio. La configurazione $\mathcal{B}$ effettivamente assunta dal solido ad un dato istante è invece detta *configurazione deformata* (deformata relativamente alla configurazione di riferimento) oppure *configurazione spaziale* o *euleriana*, e i suoi punti x sono detti *punti spaziali*.

La funzione ϕ che mappa la configurazione materiale $\mathcal{B}_0$ nella configurazione spaziale $\mathcal{B}$ che il corpo assume ad un istante t generico è ancora detta *deformazione* del corpo:

$$\phi : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}, \quad X \mapsto x = \phi(X), \quad (36)$$

ma ora ϕ dipende dagli istanti di tempo e dalla configurazione $\mathcal{B}_0$ di riferimento. Dato che $\mathcal{B}_0$, per definizione, è una configurazione del corpo, alla funzione ϕ è ancora prescritto di essere continua, iniettiva, derivabile e con derivate continue, e di essere inoltre preservatrice dell'ordine: questo garantisce che $\mathcal{B}_0$ possa rappresentare la configurazione del corpo continuo ad un dato istante di un possibile moto. In un tale moto, e solo in un tale moto, ϕ può riacquisire il significato di deformazione del corpo continuo relativa ad un intervallo di tempo Δt , intervallo nel quale la configurazione di riferimento $\mathcal{B}_0$ deve coincidere con la configurazione all'istante iniziale.

In modo analogo, il vettore $\mathbf{u} = \mathbf{x} - X$ è ancora detto *spostamento*, anche se ora dipende, come ϕ , dagli istanti di tempo e dalla configurazione $\mathcal{B}_0$ di riferimento. Si noti come in tale descrizione il vettore spostamento $\mathbf{u}$ assuma il ruolo di un vettore posizione relativamente al punto X materiale assunto quale punto di riferimento (fig. 12). Facendo variare, ad un dato istante, il punto materiale X nella configurazione di riferimento si ottiene il campo degli spostamenti al dato istante:

$$\mathbf{u} : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{V}, \quad X \mapsto \mathbf{u} = \phi(X) - X. \quad (37)$$

Si consideri ora un moto del corpo. Come detto, la configurazione deformata $\mathcal{B}$ è funzione del tempo, così come la deformazione ϕ e il vettore spostamento $\mathbf{u}$ (fig. 13). Si indichi allora con $\mathbf{x}$ la *funzione del moto*, funzione che fornisce la posizione spaziale del punto materiale X al tempo t :

$$\mathbf{x} : \mathcal{B}_0 \times T \rightarrow \mathcal{E}, \quad (X, t) \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}(X, t), \quad (38)$$

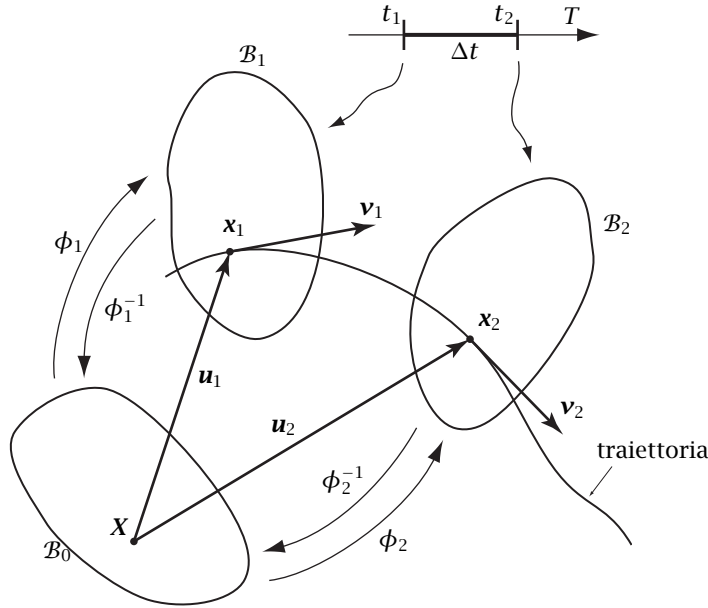


Figura 13: Descrizione lagrangiana del moto

dove $\mathcal{E}$ indica lo spazio dell'osservatore. Se si tiene costante il tempo t si ottiene la funzione $X \mapsto \mathbf{x}(X, t)$ che coincide con la deformazione ϕ al tempo t . Se invece si tiene costante il punto materiale X , si ottiene la funzione $t \mapsto \mathbf{x}(X, t)$ che coincide con la traiettoria del punto del corpo "etichettato" da X . Inoltre, anche il vettore spostamento $\mathbf{u}$ diventa una funzione del tempo oltre che del punto materiale. Nella fig. 13 sono indicate sia la traiettoria di un generico punto materiale X che le posizioni spaziali $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(X, t_1) = \phi_1(X)$ e $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(X, t_2) = \phi_2(X)$ che questo punto occupa ad un istante t_1 e rispettivamente ad un istante successivo t_2 , posizioni individuate dai vettori spostamento $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$.

Da quanto detto, consegue la seguente espressione della *velocità*:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}. \quad (39)$$

La funzione del moto $\mathbf{x}$ e gli spostamenti $\mathbf{u}$ risultano essere dei campi materiali, cioè dei campi definiti nel riferimento materiale $\mathcal{B}_0$, e così risulta di conseguenza il campo delle velocità, al tempo t generico, ottenuto tramite la (39):

$$\mathbf{v} : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{V}, \quad X \mapsto \mathbf{v}(X). \quad (40)$$

Si noti che mentre il campo è materiale, la velocità è invece spaziale, nel senso che descrive una proprietà delle configurazioni spaziali che il corpo attraversa nel corso del moto e che come tale è indipendente dalla scelta della configurazione di riferimento. In altri termini la funzione $X \mapsto \mathbf{v}(X)$ dipende dal riferimento ma non i suoi valori $\mathbf{v}(X)$.

L'esistenza della deformazione inversa ϕ^{-1} al tempo t generico permette di esprimere il campo delle velocità $\mathbf{v}$ nella configurazione spaziale $\mathcal{B}$. Si indichino, per evitare ambiguità, i campi materiale e spaziale della velocità con $\mathbf{v}_{\text{ref}}$ e, rispettivamente, $\mathbf{v}_{\text{sp}}$:

$$\mathbf{v}_{\text{ref}} : \mathcal{B}_0 \times T \rightarrow \mathcal{V}, \quad (X, t) \mapsto \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{ref}}(X, t). \quad (41a)$$

$$\mathbf{v}_{\text{sp}} : \mathcal{B} \times T \rightarrow \mathcal{V}, \quad (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{sp}}(\mathbf{x}, t). \quad (41b)$$

Risulta allora:

$$\mathbf{v}_{\text{sp}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_{\text{ref}}(\phi^{-1}(\mathbf{x}), t), \quad (42)$$

dove è stata utilizzata la deformazione inversa ϕ^{-1} corrispondente al tempo t per ottenere il punto materiale X che al tempo t occupa la posizione spaziale $\mathbf{x}$, dopodiché si è applicata la funzione velocità materiale per ottenere la velocità di tale punto materiale al tempo t .

L'accelerazione $\mathbf{a}$ dei punti del continuo si ottiene poi derivando rispetto al tempo la velocità $\mathbf{v}$ lungo le traiettorie, cioè eseguendone la *derivazione materiale*, derivazione indicata con il simbolo $\dot{\mathbf{v}}$. Nel caso in cui la velocità è descritta dal campo materiale (41a), il campo materiale delle accelerazioni si ottiene facendo la derivata parziale della velocità rispetto al tempo:

$$\mathbf{a}(X, t) = \dot{\mathbf{v}}(X, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{ref}}}{\partial t} \right|_{X=\text{cost}}, \quad (43)$$

poiché porre $X = \text{cost}$ significa seguire la traiettoria del punto P del corpo etichettato dal punto materiale X .

Se invece il campo delle velocità è quello spaziale $\mathbf{v}_{\text{sp}}$, si consideri la relazione inversa della (42):

$$\mathbf{v}_{\text{ref}}(X, t) = \mathbf{v}_{\text{sp}}(\mathbf{x}(X, t), t), \quad (44)$$

e se ne faccia la derivazione parziale rispetto al tempo tenendo conto della regola di derivazione di una funzione di funzione e trasformando il punto materiale X nel punto spaziale $\mathbf{x}$ tramite la deformazione. Si ottiene in tal modo il campo spaziale delle accelerazioni utilizzando esclusivamente operatori differenziali validi nella configurazione spaziale $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \{ \mathbf{v}_{\text{sp}}(\mathbf{x}(X, t), t) \} \right|_{X=\text{cost}} \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{sp}}}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{v}_{\text{sp}} \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} (\phi^{-1}(\mathbf{x}), t) \right\} = \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{sp}}}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{v}_{\text{sp}} (\mathbf{v}_{\text{sp}}). \end{aligned} \quad (45)$$

Nella (45) compare il gradiente spaziale della velocità $\text{grad } \mathbf{v}_{\text{sp}}$, che rappresenta, in un punto spaziale P , una trasformazione lineare nello spazio $\mathcal{V}_P$ tangente allo stesso punto e tale che:

$$\mathbf{v}_{\text{sp}}(Q) - \mathbf{v}_{\text{sp}}(P) = \text{grad } \mathbf{v}_{\text{sp}} (Q - P) + o(|Q - P|), \quad (46)$$

per ogni punto spaziale Q nell'intorno di P .

5.2 Descrizione lagrangiana relativa (problema incrementale)

Se oggetto di studio, sempre da un punto di vista lagrangiano, è l'evoluzione del moto di un corpo continuo a partire dalla configurazione $\mathcal{B}$ che questi assume al tempo t , può risultare comodo assumere $\mathcal{B}$ quale riferimento lagrangiano. Tale riferimento è chiamato *riferimento lagrangiano relativo*. La sua, eventuale, comodità è riferita allo studio della evoluzione del moto a partire dalla configurazione $\mathcal{B}$ del tempo t e non alla evoluzione dello stesso moto a partire da una generica configurazione. In opposizione alla dizione "riferimento lagrangiano relativo", un riferimento $\mathcal{B}_0$ per lo studio di tutto il moto viene anche detto *riferimento lagrangiano totale*. Se ϕ rappresenta la deformazione del riferimento lagrangiano relativo $\mathcal{B}$ rispetto al riferimento lagrangiano totale $\mathcal{B}_0$, e se $\hat{\phi}$ e $\hat{\phi}_R$ rappresentano la deformazione della configurazione $\hat{\mathcal{B}}$ del tempo $\hat{t}$ generico relativamente alle configurazioni di riferimento, totale $\mathcal{B}_0$ e relativo $\mathcal{B}$ rispettivamente, risulta (fig. 14):

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}_R \circ \phi. \quad (47)$$

5.3 Descrizione euleriana (meccanica dei fluidi)

Come già detto, un *fluido* nel corso del moto non conserva in generale l'identità delle singole parti. In tal caso non interessa seguire il moto (le traiettorie) dei punti del fluido, ma interessa invece osservare le proprietà che hanno le parti di fluido che nel corso del tempo

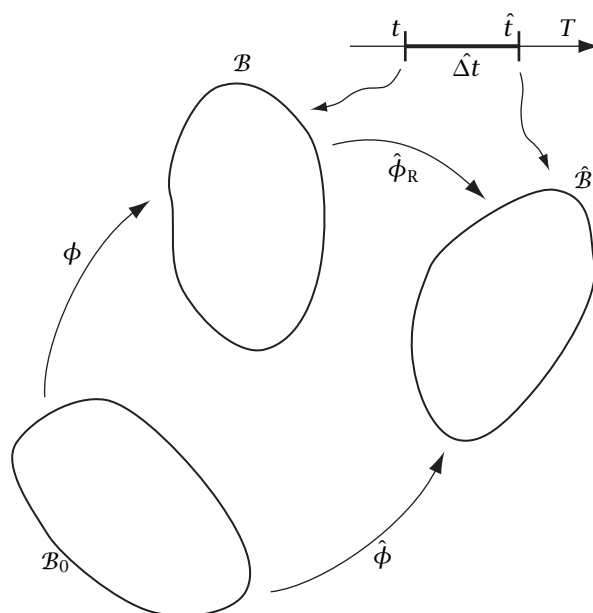


Figura 14: Riferimento lagrangiano relativo

occupano una stessa regione dello spazio $\mathcal{R}$, detta *regione di controllo*. Per es., nel caso di un *liquido*, cioè di un fluido incompressibile, la regione di controllo potrebbe essere una condotta in pressione come nel caso di fig. 15.

La descrizione dello stato di un fluido che consegue alla scelta di una regione di controllo dello spazio è detta descrizione *spaziale* o *euleriana*. Naturalmente la regione di controllo può anche essere infinita, per esempio nel caso della modellazione del moto di un corpo in un fluido. Se il fluido rappresenta l'atmosfera terrestre, e quindi il moto avviene internamente ad essa, la regione di controllo occuperà l'intero spazio, se invece il fluido rappresenta l'acqua del mare e il moto avviene alla sua superficie, la regione di controllo occuperà un semispazio.

Nuove particelle, al trascorrere del tempo, entrano nella regione di controllo dello spazio mentre altre ne escono definitivamente. Per descrivere il moto, occorre fornire il campo spaziale delle velocità nella regione di controllo $\mathcal{R}$ in funzione del tempo, campo che rappresenta le velocità dei punti che ad un dato tempo t occupano la regione di controllo. Eventualmente, se non tutta la regione di controllo è occupata dal fluido, occorre fornire in aggiunta la descrizione della superficie libera del fluido (come nel caso delle correnti a superficie libera studiate dall'idraulica). Per determinare le velocità non è necessario conoscere le traiettorie

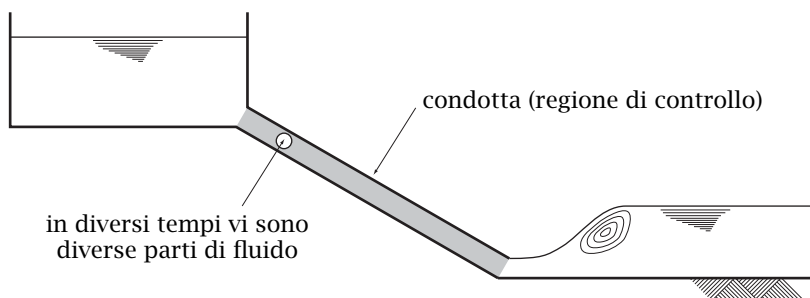


Figura 15: Descrizione euleriana

complete dei singoli punti, ma è sufficiente assumere la regione di controllo $\mathcal{R}$ quale riferimento lagrangiano relativo e descrivere, nell'intorno del tempo t , l'evoluzione dei punti del mezzo continuo che all'istante t occupano la regione di controllo, evoluzione che porta tali punti nella configurazione $\hat{\mathcal{R}}$ al tempo $\hat{t}$ generico (fig. 16).

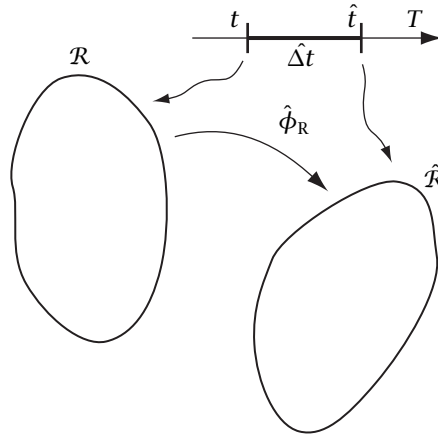


Figura 16: Regione di controllo

Noto il campo spaziale della velocità, la relazione euleriana (45) permette poi di dedurre il campo delle accelerazioni.

6 Dinamica del corpo continuo

Le variabili dinamiche descrivono le cause del moto del corpo, in altri termini le azioni che l'ambiente esterno al corpo esercita sul corpo stesso oppure sulle sue parti. Per poter descrivere le azioni esercitate su una parte del corpo, occorre isolare, almeno in via concettuale, tale parte dal resto del corpo. Questo fatto impone che le variabili dinamiche siano legate ai volumi e non ai punti, dato che i punti non sono isolabili da un corpo continuo.

Poiché si suppone che un corpo continuo sia indefinitamente suddivisibile, esso non è assimilabile ad un sistema di punti materiali. Infatti un insieme di particelle può assimilarsi ad un sistema di punti materiali se le dimensioni delle particelle stesse sono piccole rispetto alle loro distanze. D'altronde, comunque si suddivida in parti un corpo continuo, le singole parti sono sempre a contatto, e quindi le distanze sono nulle. Tuttavia ciò non toglie che una singola parte del corpo continuo, sufficientemente piccola, possa assimilarsi ad un punto materiale, assumendo quindi il ruolo di particella, ruolo che è invece precluso ai punti del continuo. Si noti comunque che, per assumere il ruolo di particelle, le parti del corpo devono conservare la loro individualità durante il moto e questo è possibile se e solo se la deformazione è continua. Questo fatto mostra che la continuità della deformazione, come già anticipato al §2, è qualcosa di più che una semplice ipotesi strumentale, rappresentando invece una condizione imprescindibile per la descrizione dinamica del corpo continuo.

6.1 Equazioni di bilancio

Per inquadrare il problema delle equazioni di bilancio nella giusta prospettiva, come prima cosa si farà un excursus sulle variabili dinamiche associate ai sistemi di particelle e sulle loro interrelazioni.

Sia allora dato un sistema composto di n particelle, e si consideri per il momento il moto della generica particella di tale sistema. Tale moto è caratterizzato fondamentalmente dalla

posizione della particella, determinata per es. dal vettore posizione $\mathbf{r}_i$, dalla sua velocità $\mathbf{v}_i$ e dalla resistenza che presenta alle variazioni di velocità. L'azione $\mathbf{I}_i$ che in un dato intervallo di tempo Δt agisce sulla particella modificandone la sua velocità è detta *impulso*. L'impulso per unità di tempo rappresenta la *forza* $\mathbf{F}_i$ applicata alla particella ad un dato istante di tempo t :

$$\mathbf{F}_i = \lim_{\Delta t \rightarrow t} \frac{\mathbf{I}_i}{\Delta t}. \quad (48)$$

L'impulso necessario per annullare la velocità della particella ad un dato istante rappresenta infine la *quantità di moto* $\mathbf{P}_i$ della particella a quell'istante. Ne consegue che nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ l'impulso vale la differenza della quantità di moto e che quindi la forza $\mathbf{F}_i$ applicata coincide con la derivata della quantità di moto:

$$\mathbf{I}_i(\Delta t) = \mathbf{P}_i(t_2) - \mathbf{P}_i(t_1) \Rightarrow \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{P}_i}{dt}. \quad (49)$$

La quantità di moto, impulso necessario ad un dato istante per annullare la velocità della particella, è coassiale alla velocità, ne ha cioè la stessa direzione. Inoltre, per velocità sufficientemente piccole rispetto alla velocità della luce nel vuoto il legame tra velocità e quantità di moto può ritenersi lineare. Ne risulta quindi:

$$\mathbf{P}_i = m_i \mathbf{v}_i, \quad (50)$$

dove il coefficiente di proporzionalità m_i rappresenta la *massa* della particella. Si noti che la relazione (50) assume il ruolo di un legame costitutivo tra la variabile cinematica velocità e la variabile dinamica quantità di moto, come risulta chiaramente dal diagramma di Tonti relativo alla dinamica di una particella (fig. 17).

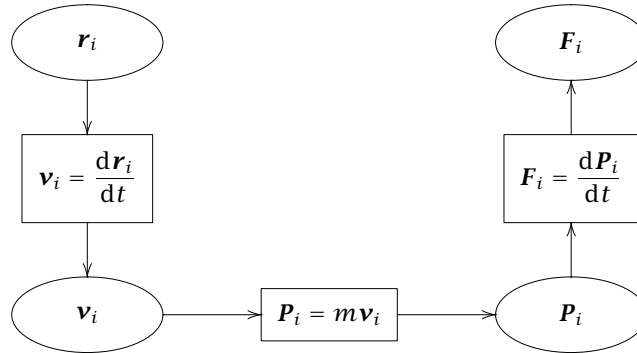


Figura 17: Dinamica della particella

Si passi ora a considerare l'intero sistema di particelle. L'impulso $\mathbf{I}$, la *forza* $\mathbf{F}$ e la *quantità di moto* $\mathbf{P}$ totali, definiti dalla somma delle quantità relative alle singole particelle:

$$\mathbf{I} = \sum_i \mathbf{I}_i, \quad \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{P} = \sum_i \mathbf{P}_i, \quad (51)$$

soddisfano la *prima equazione di bilancio*:

$$\mathbf{I}(\Delta t) = \mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1), \quad (\text{forma integrale}), \quad (52a)$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \quad (\text{forma differenziale}). \quad (52b)$$

Si definiscano poi i *momenti*, rispetto a un punto O scelto quale polo, delle quantità precedenti. Per quel che riguarda le forze e la quantità di moto, quantità relative ad un istante,

non vi sono problemi, poiché il vettore posizione da mettere in conto è quello, $P_i(t) - O$ che individua la posizione del punto a quell'istante. Per quel che riguarda l'impulso, quantità relativa ad un intervallo Δt , si suddivida l'intervallo in un certo numero di parti Δt_h , e sia t_h un istante interno alla generica parte Δt_h . Si individuano così un numero discreto di vettori posizione $P_i(t_h) - O$ che permettono di definire il momento di un impulso come limite di una somma, limite guidato dalla “finezza” δ della partizione, caratterizzata dalla massima ampiezza degli intervalli Δt_h che la compongono. Ciò premesso, il *momento degli impulsi* I_M , il *momento delle forze* M e il *momento della quantità di moto* L totali, valutati rispetto al polo O prescelto, sono definiti come segue:

$$I_M(\Delta t) = \sum_i \left\{ \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_h [P_i(t_h) - O] \times I_i(\Delta t_h) \right\}. \quad (53a)$$

$$M(t) = \sum_i [P_i(t) - O] \times F_i(t), \quad (53b)$$

$$L(t) = \sum_i [P_i(t) - O] \times P_i(t), \quad (53c)$$

e ne risultano, da una parte la relazione, analoga della (48), che definisce M in funzione di I_M :

$$M = \lim_{\Delta t \rightarrow t} \frac{I_M}{\Delta t}. \quad (54)$$

e dall'altra parte la *seconda equazione di bilancio*:

$$I_M(\Delta t) = L(t_2) - L(t_1), \quad (\text{forma integrale}), \quad (55a)$$

$$M = \frac{dL}{dt}, \quad (\text{forma differenziale}). \quad (55b)$$

Le due equazioni di bilancio in forma differenziale (52b) e (55b), insieme al legame costitutivo (50), relazioni che devono valere non solo per l'intero sistema di particelle ma anche per ogni sua parte, sono equivalenti alle leggi di Newton. Le due equazioni di bilancio in forma integrale (52a) e (55a) sono invece più generali delle leggi di Newton, poiché si prestano a descrivere quei casi in cui gli impulsi sono concentrati, come il colpo di martello, casi nei quali le forze e i momenti delle forze esistono solo nel senso delle distribuzioni. Non solo, ma la struttura delle equazioni di bilancio (52) e (55), insieme alle definizioni (48) di forza e (54) di momento delle forze, permette di generalizzare il problema svincolando il momento degli impulsi I_M e il momento delle forze M dall'essere definiti come “momenti” dalle (53a) e (53b). Si apre in tal modo la possibilità di introdurre nel modello dei momenti degli impulsi e dei momenti delle forze “intrinseci”.

Da quanto detto consegue che le equazioni di bilancio possono essere poste alla base della dinamica dei sistemi di punti materiali ed è in questa forma che la dinamica dei sistemi di punti materiali si presta ad una generalizzazione alla dinamica dei mezzi continui:

Assunzione fondamentale della dinamica del corpo continuo. *Ad ogni parte, cioè ad ogni volume, di un corpo continuo si richiede di soddisfare le equazioni di bilancio.*

Per rendere operativa tale assunzione, occorre precisare, relativamente al modello di corpo continuo, sia i concetti di impulso, forza e quantità di moto che quelli di momento degli impulsi, momento delle forze e momento della quantità di moto.

Si consideri allora al generico istante t un volume V del corpo, volume che al dato istante appartiene alla configurazione $\mathcal{B}$ del corpo. Si consideri poi un intervallo di tempo $\Delta t = [t_1, t_2]$ durante il quale il dato volume passa dalla configurazione V_1 a quella V_2 (fig. 18). L'azione che viene esercitata su tale volume del corpo nel dato intervallo di tempo è descritta dall'*impulso* $I(\Delta t)$ e dalla *momento degli impulsi* $I_M(\Delta t)$. La quantità di moto $P(t)$ e il momento della quantità di moto $L(t)$ relativi allo stesso volume e al dato istante di tempo sono poi definiti dalle due equazioni di bilancio:

$$I(\Delta t) = P(t_2) - P(t_1), \quad (\text{bilancio della quantità di moto}), \quad (56a)$$

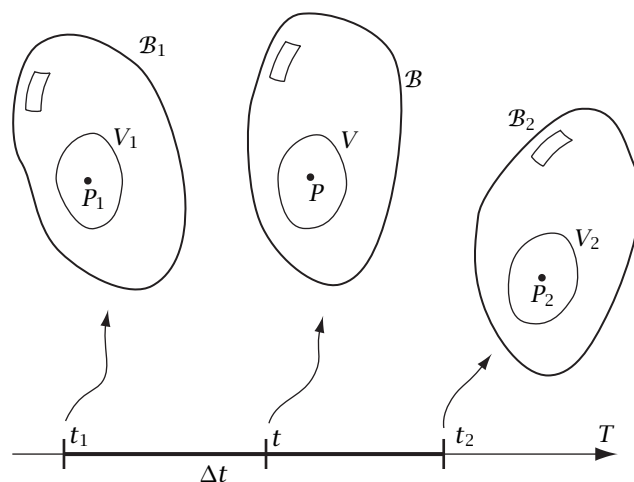


Figura 18: Moto di un generico volume

$$\mathbf{I}_M(\Delta t) = \mathbf{L}(t_2) - \mathbf{L}(t_1), \quad (\text{bilancio del momento della quantità di moto}). \quad (56b)$$

Infine la *forza* $\mathbf{F}(t)$ e il *momento delle forze* $\mathbf{M}(t)$ agenti nel dato volume all'istante t sono definiti quali impulso e rispettivamente coppia di impulso per unità di tempo a tale istante:

$$\mathbf{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow t} \frac{\mathbf{I}}{\Delta t}, \quad \mathbf{M} = \lim_{\Delta t \rightarrow t} \frac{\mathbf{I}_M}{\Delta t}. \quad (57)$$

Con tali assunzioni le equazioni di bilancio (56) assumono allora la forma:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}}, \quad (\text{bilancio della quantità di moto}), \quad (58a)$$

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}, \quad (\text{bilancio del momento della quantità di moto}), \quad (58b)$$

dove il punto indica derivazione materiale, o, in altri termini, derivazione nel tempo seguendo il dato volume. È evidente che nella forma (58) le equazioni di bilancio sono meno generali di quelle nella forma (56) poiché è ora richiesto che esistano i limiti (57) che definiscono le forze e i momenti delle forze. Come già detto, le equazioni di bilancio nella forma (58) sono equivalenti a quelle nella forma (56) solo se si interpretano nell'ambito della teoria delle distribuzioni e non delle funzioni ordinarie.

Si ribadisce infine che le equazioni di bilancio (56) oppure (58), devono essere definite per ogni volume V estraibile dal corpo: le sole equazioni di bilancio globali (relative a tutto il corpo $\mathcal{B}$) sono sufficienti a stabilire la dinamica del corpo rigido ma non quella del corpo continuo deformabile.

6.2 Massa, quantità di moto e momento della quantità di moto

Come già accennato, mentre non è possibile considerare, nemmeno al limite, un corpo continuo come un sistema di punti materiali, è invece lecito considerare un intorno V di un punto P , al limite, come un punto materiale. Le “parti lineari” della quantità di moto e del momento della quantità di moto di tale intorno risultano dunque esprimibili tramite la relazione costitutiva (50) valida per il punto materiale:

$$\mathbf{P}(V) = m(V)\mathbf{v}(P), \quad \mathbf{L}(V) = m(V)\mathbf{r}(P) \times \mathbf{v}(P), \quad (59)$$

dove $m(V)$ rappresenta la *massa* associata al volume V , $\mathbf{v}(P)$ la velocità del punto P e $\mathbf{r}(P)$ il vettore posizione del punto P . Si ricordi che le grandezze cinematiche come la velocità competono ai punti del mezzo continuo, a differenza di quelle dinamiche che invece competono ai volumi.

Ad ogni volume estraibile dal corpo (fig. 19) viene associata la sua massa $m(V)$. La massa

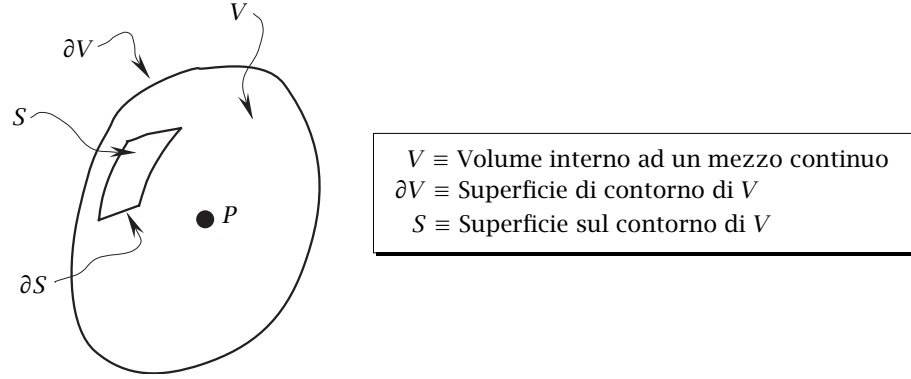


Figura 19: Elementi geometrici di un generico volume

risulta quindi una *funzione scalare di dominio*: $V \mapsto m(V)$.

La *massa per unità di volume* ρ , detta *densità* o *massa specifica*, definita in un qualunque punto P del corpo, risulta:

$$\rho = \lim_{V \rightarrow P} \frac{m(V)}{V}. \quad (60)$$

Se la massa per unità di volume esiste, ovvero se esiste il limite (60), la massa associata ad un dato volume V viene recuperata via integrazione:

$$m(V) = \int_V \rho \, dV. \quad (61)$$

Un caso in cui il limite (60) non esiste è, per es., quello di una massa concentrata $\bar{m}$ in un punto P :

$$m(V) = \begin{cases} \bar{m} & \text{se } P \in V \\ 0 & \text{se } P \notin V \end{cases}. \quad (62)$$

Conservazione della massa. Con riferimento alla fig. 18 nella pagina a fronte, il principio di conservazione della massa si esprime imponendo:

$$m(V_1) = m(V_2), \quad (63)$$

dove i volumi V_1 e V_2 si corrispondono nella deformazione.

Si suddivida ora il volume generico V , appartenente al corpo $\mathcal{B}$, in un certo numero di parti ΔV_h , e siano P_h un punto interno alla generica parte ΔV_h , $\mathbf{v}(P_h)$ la sua velocità ed infine $\mathbf{r}(P_h)$ il vettore posizione del punto P_h rispetto al polo O di riduzione dei momenti (fig. 20). La “finezza” δ della partizione viene caratterizzata dal massimo diametro delle sfere circoscritte ai volumi ΔV_h .

Con riferimento alle (59), la quantità di moto e il momento della quantità di moto globali (di tutto il volume V), valutati rispetto al polo O , si otterranno allora dal limite della somma dei contributi di tutte le parti ΔV_h , limite guidato dalla finezza della suddivisione:

$$\mathbf{P} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_h m(\Delta V_h) \mathbf{v}(P_h), \quad (64a)$$

$$\mathbf{L} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_h \mathbf{r}(P_h) \times [m(\Delta V_h) \mathbf{v}(P_h)]. \quad (64b)$$

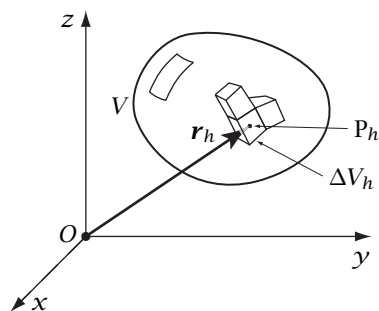


Figura 20: Partizione del volume generico

Per definizione di integrale triplo e tenendo conto della definizione (60) di densità, dalle (64) si ottiene infine:

$$\mathbf{P} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_h \frac{m(\Delta V_h)}{\Delta V_h} \mathbf{v}(P_h) \Delta V_h = \int_V \rho \mathbf{v} dV, \quad (65a)$$

$$\mathbf{L} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_h \frac{m(\Delta V_h)}{\Delta V_h} \mathbf{r}(P_h) \times \mathbf{v}(P_h) \Delta V_h = \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV. \quad (65b)$$

Si è così completato il problema della dinamica del continuo, come riassunto nel diagramma di fig. 21.

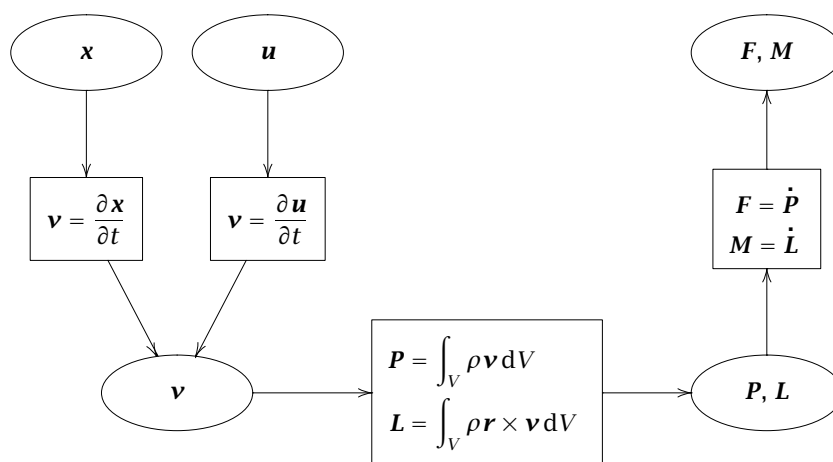


Figura 21: Dinamica del continuo

6.3 Forze, momenti e tensione interna

6.3.1 Forze e momenti delle forze

Le forze e i momenti applicati ad un generico volume V di un corpo continuo rappresentano l'azione che l'ambiente esterno al volume esercita sul volume stesso. Queste azioni si distinguono in *azioni a distanza*, che competono direttamente al volume, e in *azioni di contatto* trasmesse attraverso una qualunque porzione S della superficie di contorno del volume (fig. 19 nella pagina precedente). Occorre distinguere quindi tra *forze di volume* $\mathbf{F}(V)$ e *forze di superficie* $\mathbf{F}(S)$, e tra *momenti di volume* $\mathbf{M}(V)$ e *momenti di superficie* $\mathbf{M}(S)$, dove ancora V

indica un generico volume, eventualmente coincidente con il corpo $\mathcal{B}$, e S una qualunque superficie interna (eventualmente inclusa nel contorno di un volume interno V) oppure esterna (e quindi appartenente al contorno del corpo continuo).

Con tali posizioni, le equazioni di bilancio (58) di un generico volume V si specializzano dunque nella seguente forma:

$$\mathbf{F}(\partial V) + \mathbf{F}(V) = \dot{\mathbf{P}}, \quad \mathbf{M}(\partial V) + \mathbf{M}(V) = \dot{\mathbf{L}}, \quad (66)$$

dove ∂V è la superficie di contorno del volume V .

Le forze di volume rappresentano in generale delle azioni esterne, mentre le forze di superficie rappresentano delle azioni esterne od interne a seconda che competano alla superficie di contorno del corpo oppure, rispettivamente, ad una superficie interna che idealmente tagli il corpo a cui il volume appartiene. Si noti che se si volesse mettere in conto l'interazione a distanza delle diverse parti del corpo, dovuta, per esempio, alla mutua attrazione newtoniana, vi sarebbero delle forze di volume che rappresenterebbero delle azioni interne.

Un esempio di forza di volume è fornito dalla forza peso, forza dovuta all'attrazione gravitazionale terrestre. Anche le forze elettromagnetiche, dovute alla presenza di cariche elettriche sia statiche che in moto, costituiscono esempi di forze di volume. La pressione di un fluido costituisce invece un esempio tipico di forza di superficie. Ma anche un corpo pesante appoggiato sulla superficie di contorno di un corpo trasmette una forza superficiale. Inoltre, le parti di un corpo interagiscono attraverso le superfici che le separano generando quindi delle forze superficiali. In realtà, queste forze superficiali sono dovute alle mutue interazioni tra le particelle che compongono la materia alla microscala. Avendo tali interazioni un raggio di azione che, anche se piccolo, non è nullo, ne risulta che rappresentano solo approssimativamente delle forze di superficie. Nel caso si voglia tenere conto del raggio d'azione delle interazioni alla microscala non è comunque necessario rimuovere la loro modellizzazione tramite delle forze di superficie, potendo ottenere lo stesso effetto semplicemente legando il valore delle forze superficiali a quell'intorno della superficie che rientra nell'ambito del raggio di azione della interazione stessa.

Come detto al §6.1, è possibile considerare il “momento delle forze” come concetto separato da quello di forza. Il significato di tale momento viene quindi a dipendere essenzialmente dalla seconda equazione di bilancio, riportata nella seconda delle (66). In generale il momento delle forze si comporrà di una quota intrinseca, indipendente dalle forze stesse, e da una quota dipendente dalle forze e valutata come loro “effettivo” momento. Poiché le forze e i momenti delle forze competono sempre ad un volume o ad una superficie e non ad un punto, per calcolare la quota di momento dipendente dalle forze occorrerà, al solito,

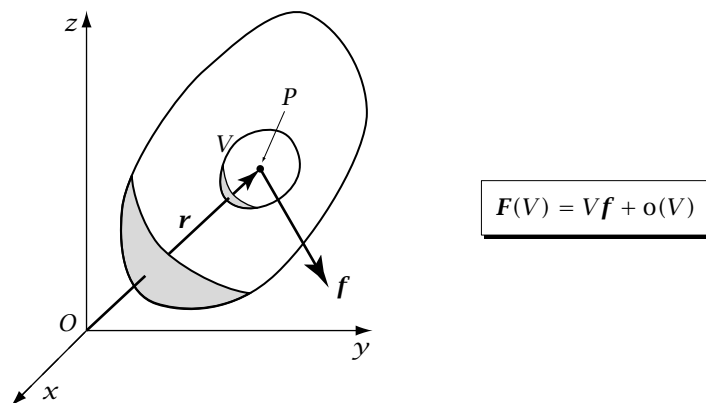


Figura 22: Forza di volume

basarsi sulla possibilità di partizionare il volume e di eseguire un limite basato sulla finezza della partizione stessa.

6.3.2 Forze e momenti specifici

Al fine di generare variabili dinamiche legate al punto, costituenti quindi dei campi definiti in $\mathcal{B}$, si introducono le forze e i momenti specifici:

1. **Forza (esterna) per unità di volume.** La *forza per unità di volume* $\mathbf{f}$, associata ad un punto P (fig. 22), resta definita come il limite della forza rapportata alla misura del volume:

$$\mathbf{f}(P) = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\mathbf{F}(V)}{V}, \quad (67)$$

dove V rappresenta sia un generico volume nell'intorno del punto P che la sua misura.

2. **Forza esterna per unità di superficie.** Se P è un punto della superficie di contorno $\partial\mathcal{B}$ del mezzo continuo e se S rappresenta una generica superficie, nell'intorno del punto P , contenuta in $\partial\mathcal{B}$, la *forza esterna per unità di superficie* $\mathbf{p}$ associata al punto P (fig. 23) resta definita dal limite della forza rapporto l'area della superficie:

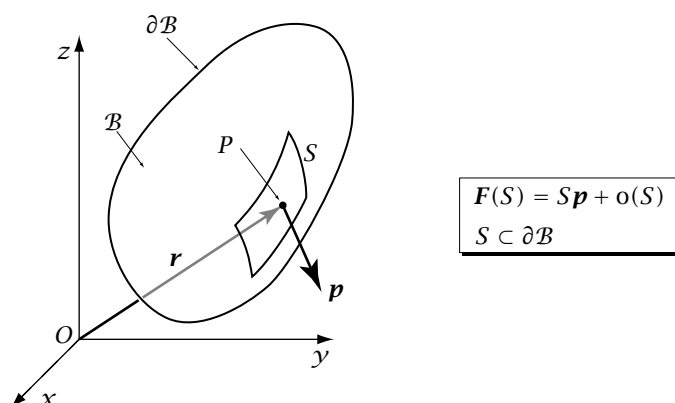


Figura 23: Forza di superficie

$$\mathbf{p}(P) = \lim_{\substack{S \rightarrow P \\ S \subset \partial\mathcal{B}}} \frac{\mathbf{F}(S)}{S}. \quad (68)$$

3. **Tensione interna o forza interna per unità di superficie.** Sia S una generica superficie contenuta nel mezzo continuo e contenente il punto P (fig. 24). La superficie S separa il corpo mettendo in luce due facce attraverso le quali si esercitano le azioni di una parte sull'altra. Allo scopo di distinguere le azioni sulle due facce della stessa superficie interna si orienti esternamente la superficie scegliendo un verso di attraversamento, per es. orientando la normale in un punto generico della superficie, come fatto nella fig. 24. Si assuma poi la convenzione che le forze interne associate alla superficie orientata siano quelle che agiscono sulla parte del corpo da cui esce la parte positiva della normale.

Ciò premesso, la *forza interna $\mathbf{t}$ per unità di superficie*, detta *vettore di tensione* o più semplicemente *tensione* associata al punto P ed alla superficie orientata S risulta:

$$\mathbf{t}(P, S) = \lim_{\substack{S \rightarrow P \\ S \subset S}} \frac{\mathbf{F}(S)}{S}. \quad (69)$$

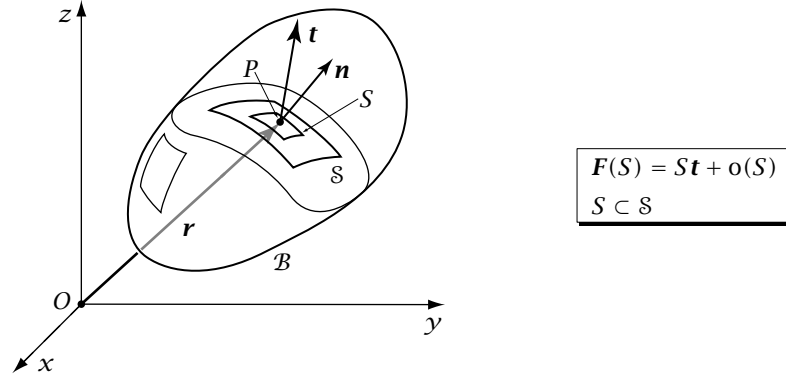


Figura 24: Tensione interna

Si ribadisce che la tensione interna definita dalla (69) dipende, oltre che dal punto, dalla superficie orientata $\mathcal{S}$ su cui sono valutate le forze interne.

4. **Momenti specifici.** In accordo con l'assunzione di considerare i soli mezzi continui semplici (si veda il §3.1), assumeremo che i momenti specifici siano generati dalle forze specifiche. Si prescinde quindi dalla possibilità, sopra accennata, di considerare la presenza di *momenti intrinseci*, ovvero non generati dalle forze.¹² Per i mezzi continui semplici si assume dunque la validità dei seguenti limiti dei momenti rapporto la misura dell'elemento geometrico cui competono:

$$\lim_{\substack{V \rightarrow P \\ V \subset B}} \frac{\mathbf{M}(V)}{V} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}, \quad (\text{momento per unità di volume}), \quad (70a)$$

$$\lim_{\substack{S \rightarrow P \\ S \subset \partial B}} \frac{\mathbf{M}(S)}{S} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (\text{momento esterno per unità di superficie}), \quad (70b)$$

$$\lim_{\substack{S \rightarrow P \\ S \subset \mathcal{S}}} \frac{\mathbf{M}(S)}{S} = \mathbf{r} \times \mathbf{t}, \quad (\text{momento interno per unità di superficie}), \quad (70c)$$

dove l'operazione $\times$ indica il prodotto vettoriale di due vettori e $\mathbf{r}$ il vettore posizione del punto P rispetto al polo di riduzione dei momenti. Inoltre la (70c), analogamente alla (69), è relativa ad una superficie interna orientata.

Non sempre i limiti (67), (68), (69) e (70) esistono, come succede, per es., nel caso di una forza $\bar{\mathbf{F}}$ concentrata in un punto $\bar{P}$:

$$\mathbf{F}(V) = \begin{cases} \bar{\mathbf{F}} & \text{se } \bar{P} \in V \\ \mathbf{0} & \text{se } \bar{P} \notin V \end{cases}. \quad (71)$$

In tal caso il limite (67) vale $\mathbf{0}$ se $P \neq \bar{P}$ mentre il modulo del limite diventa infinito se $P = \bar{P}$, e dunque la funzione $\mathbf{f}$ non è definita in $\bar{P}$.¹³

Come sempre quando si eseguono dei limiti di funzioni di dominio rapporto la misura del dominio (nel nostro caso funzioni di volume e di superficie) si recuperano le funzioni di

¹²Nel caso dei corpi microcontinui la presenza di momenti intrinseci viene invece senz'altro ipotizzata. La presenza di momenti intrinseci è comunque compatibile anche con la descrizione del moto del continuo tramite il solo campo degli spostamenti. A tale scopo basta infatti considerare un continuo micropolare nel quale le "rotazioni" delle terne rigide di assi associate ai punti viene fatto dipendere univocamente dal campo degli spostamenti. Se questo è il caso, si parla di *pseudo-continui di Cosserat*.

¹³La funzione $\mathbf{f}$ risulta invece definita nel senso esteso di *distribuzione*.

dominio da quelle puntuali via integrazione nel dominio:

$$\mathbf{F}(V) = \int_V \mathbf{f} dV, \quad \mathbf{M}(V) = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV, \quad (72a)$$

$$\mathbf{F}(S) = \int_S \mathbf{p} dS, \quad \mathbf{M}(S) = \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{p} dS, \quad S \subset \partial\mathcal{B}, \quad (72b)$$

$$\mathbf{F}(S) = \int_S \mathbf{t} dS, \quad \mathbf{M}(S) = \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS, \quad S \subset \mathcal{S}. \quad (72c)$$

Si ricordi infine che alle due facce di una stessa superficie corrispondono due versori normali opposti per cui a tali facce non corrisponde la stessa tensione. D'altronde tali tensioni agiscono su parti diverse del corpo. Relativamente a tali tensioni si dimostra il teorema:

Principio di azione e reazione. *Le tensioni agenti sulle due facce di una stessa superficie sono l'una l'opposta dell'altra, oppure, in altri termini hanno uguale direzione e modulo, e verso opposto (fig. 25):*

$$\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n}). \quad (73)$$

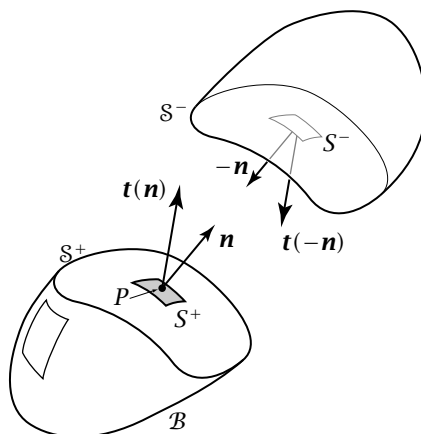


Figura 25: Azione e reazione

Dimostrazione. Si consideri infatti il bilancio della quantità di moto relativo a tutto il corpo:

$$\mathbf{F}(\mathcal{B}) + \mathbf{F}(\partial\mathcal{B}) = \dot{\mathbf{P}}. \quad (74)$$

Se nell'intorno di un punto P si esegue un taglio internamente al corpo lungo la superficie S di normale $\mathbf{n}$, si evidenziano le due facce S^+ e S^- di normale $\mathbf{n}$ e $-\mathbf{n}$ rispettivamente, su cui agiscono, nel punto P , le tensioni $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ e $\mathbf{t}(-\mathbf{n})$ (si veda la fig. 25). Poiché per il *teorema della media*¹⁴ risulta $\int_S \mathbf{t} dS = S\bar{\mathbf{t}}$, dove $\bar{\mathbf{t}}$ rappresenta la tensione in un punto interno alla superficie S , il bilancio di tutto il corpo si scrive:

$$\mathbf{F}(\mathcal{B}) + \mathbf{F}(\partial\mathcal{B}) + S\bar{\mathbf{t}}_+ + S\bar{\mathbf{t}}_- = \dot{\mathbf{P}}, \quad (75)$$

dove $\bar{\mathbf{t}}_+$ e $\bar{\mathbf{t}}_-$ sono il valor medio su S^+ e S^- rispettivamente. Il bilancio (74) riduce il bilancio (75) alla:

$$S\bar{\mathbf{t}}_+ + S\bar{\mathbf{t}}_- = \mathbf{0}, \quad (76)$$

¹⁴Il teorema della media afferma che l'integrale di una funzione continua in un dominio connesso si esprime come prodotto del valore $\bar{f}$ che la funzione assume in un punto particolare del dominio, detto *valore medio*, moltiplicato per la misura del dominio. Inoltre, se è data una successione di domini che si restringe in un punto P il valore medio su tali domini tende al valore $f(P)$. Si veda per es. Gilardi (1996, § 7, pp. 457-459)

da cui si ottiene la tesi (73) dividendo per S , eseguendo il limite per $S \rightarrow P$ e tenendo conto che $\bar{\mathbf{t}}_+ \rightarrow \mathbf{t}(\mathbf{n})$ e $\bar{\mathbf{t}}_- \rightarrow \mathbf{t}(-\mathbf{n})$. ■

Introducendo le forze e i momenti specifici nelle equazioni di bilancio (66), queste assumono la seguente forma:

$$\int_{\partial V} \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{f} dV + \sum_i \bar{\mathbf{F}}_i = \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \quad (77a)$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV + \sum_i \mathbf{r}_i \times \bar{\mathbf{F}}_i = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (77b)$$

dove si è anche tenuto conto della presenza di eventuali forze concentrate $\bar{\mathbf{F}}_i$ in un numero finito di punti di V .¹⁵ Nel caso statico, cioè quando le accelerazioni sono nulle, le (77) si specializzano nelle *equazioni di equilibrio*:

$$\int_{\partial V} \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{f} dV + \sum_i \bar{\mathbf{F}}_i = \mathbf{0}, \quad (78a)$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV + \sum_i \mathbf{r}_i \times \bar{\mathbf{F}}_i = \mathbf{0}, \quad (78b)$$

equazioni che rappresentano le *equazioni cardinali della statica* per il corpo continuo. Si ricorda ancora una volta che tali equazioni devono valere per un qualunque volume V contenuto nel corpo.

Riferimenti bibliografici

Gilardi, G. (1996) *Analisi Due*. Collana di Istruzione Scientifica, Serie di Matematica. McGraw-Hill Libri Italia, Milano, seconda edizione.

¹⁵Si noti che la presenza di forze concentrate nella versione integrale (77) delle equazioni di bilancio non crea alcuna difficoltà formale, a differenza di quello che succede nel caso delle *equazioni del moto*, che invece rappresentano la versione differenziale delle equazioni di bilancio.