

CALCOLO TENSORIALE

Prof. Daniele Zaccaria
Dipartimento di Ingegneria Civile
Università di Trieste
Piazzale Europa 1, Trieste

25 giugno 2005

Indice

1	Orientazioni sulla retta, nel piano e nello spazio	3
1.1	Orientazione interna di una retta: vettori	3
1.2	Orientazione esterna di una retta: vettori assiali	4
1.3	Orientazione interna di un piano: bivettori	5
1.4	Orientazione esterna di un piano nello spazio: dualità tra rette e piani	6
1.5	Orientazione interna dello spazio: trivettori	7
1.6	Orientazione esterna dello spazio: dualità tra punti e volumi	8
2	Algebra vettoriale	10
2.1	Operazioni tra vettori	10
2.2	Vettori assiali	12
2.3	Bivettori	13
2.4	Prodotto vettoriale	14
2.5	Trivettori	15
2.6	Prodotto misto	16
2.7	Covettori	16
3	Algebra Tensoriale	19
3.1	Forme multilineari	19
3.2	Trasformazioni lineari	20
3.2.1	Spazio di trasformazioni lineari	20
3.2.2	Trasformazioni lineari e tensori doppi	21
3.2.3	Prodotto di trasformazioni lineari	22
3.2.4	Trasformazioni lineari inverse	22
3.2.5	Prodotti tensoriali	22
3.2.6	Forme bilineari trasposte	23
3.2.7	Tensore metrico	24
3.3	Operazioni tensoriali	25
3.3.1	Spazio dei tensori doppi	25
3.3.2	Prodotto di due tensori doppi	26
3.3.3	Prodotto tensoriale di due vettori	27
3.4	Tensore trasposto	28
3.4.1	Forma bilineare associata ad un tensore doppio	28
3.4.2	Definizione di tensore trasposto	29
3.4.3	Tensori doppi simmetrici, emisimmetrici e definiti positivi	29
3.5	Trasformazioni ortogonali	30

4	Rappresentazione in componenti	31
4.1	Rappresentazione dei vettori	31
4.1.1	Componenti controvarianti di un vettore	31
4.1.2	Base duale e componenti covarianti	31
4.1.3	Basi ortonormali	32
4.1.4	Rappresentazione delle operazioni vettoriali	34
4.1.5	Rappresentazione ortonormale del prodotto vettoriale, del prodotto misto e del doppio prodotto vettoriale	34
4.2	Rappresentazione dei tensori doppi	36
4.2.1	Rappresentazione delle operazioni tensoriali	36
4.2.2	Base di tensori doppi	36
4.2.3	Rappresentazione matriciale delle operazioni tensoriali	37
4.3	Rappresentazione delle trasformazioni lineari sullo spazio duale	38
4.4	Rappresentazione delle forme bilineari	39
4.5	Componenti del tensore metrico e del tensore trasposto	40
4.5.1	Componenti del tensore metrico	40
4.5.2	Corrispondenze tra le diverse forme di componenti di un tensore doppio	41
4.5.3	Estensione della rappresentazione in componenti delle operazioni tensoriali	41
4.5.4	Rappresentazione del tensore trasposto	42
4.5.5	Rappresentazione dei tensori simmetrici e emisimmetrici	43
4.6	Cambiamento di basi	44
4.6.1	Trasformazione tra due basi di vettori	44
4.6.2	Trasformazione delle componenti vettoriali e tensoriali	45
4.6.3	Cambiamento di basi ortonormali	45
5	Direzioni principali di un tensore doppio	46
5.1	Definizione di autovalore e autovettore di un tensore doppio	46
5.2	Calcolo degli autovalori e degli autovettori di un tensore doppio	47
5.3	Proprietà degli autovalori e degli autovettori di un tensore doppio simmetrico	47
6	Invarianti scalari di un tensore doppio	49
6.1	Traccia di un tensore doppio	50
6.1.1	Parte sferica e parte deviatorica di un tensore doppio	50
6.1.2	Prodotto scalare di tensori	50
6.2	Determinante di un tensore doppio	52
7	Assiale di una trasformazione emisimmetrica	53
8	Trasformazione di bivettori e trivettori	54
8.1	Trasformazione del prodotto misto (trivettori)	54
8.2	Trasformazione del prodotto vettoriale (bivettori)	54
8.3	Componenti covarianti del prodotto vettoriale	55
	Riferimenti bibliografici	56

Nella meccanica del continuo viene fatto un ampio uso degli strumenti matematici forniti dal calcolo tensoriale. Si può senz'altro affermare che, tra questi strumenti, i vettori geometrici¹ e le trasformazioni lineari nello spazio dei vettori geometrici rappresentano i principali, e a volte gli unici, strumenti utilizzati. Tutto, o quasi tutto, viene normalmente ridotto, fin dove possibile, al calcolo dei vettori geometrici e delle loro trasformazioni lineari. Questo

¹Come già detto, quando nel seguito si parlerà di vettori senza nessuna specificazione aggiuntiva, resta sottinteso che si tratta di vettori geometrici.

modo di procedere potrebbe risultare eccessivo, se non mitigato dalla chiara consapevolezza che le proprietà basilari a cui occorre riferirsi provengono dai concetti fisici sottostanti la rappresentazione e non dalla rappresentazione stessa. Per esempio, un'area orientata è qualcosa di diverso da un segmento orientato e lo strumento che concettualmente si presta meglio a descriverlo risulta essere il bivettore, così come una grandezza legata alle aree orientate, quale è il tensore degli sforzi, viene meglio rappresentato da una trasformazione lineare dallo spazio dei bivettori allo spazio delle "forze", a loro volta vettori, oppure, più in generale, "covettori" dello spazio degli spostamenti. Se un'area orientata viene descritta da un prodotto vettoriale, ovvero da un vettore normale all'area stessa, ciò non toglie che tale vettore si comporta, nel corso della deformazione di un corpo continuo, in modo essenzialmente diverso da un vettore che rappresenti una linea orientata. Infatti, una linea ortogonale ad una superficie non resta, in generale, ortogonale alla superficie stessa dopo la deformazione: il vettore che rappresenta la linea si trasforma in modo diverso dal vettore normale alla superficie e che la rappresenta.

Nel seguito, senza alcuna pretesa di completezza, saranno affrontati alcuni concetti relativi all'algebra e all'analisi tensoriale utili per le applicazioni alla meccanica del continuo. Si farà riferimento ad uno spazio ambiente euclideo tridimensionale. L'associato spazio dei vettori risulta dunque uno spazio vettoriale con prodotto interno. Il prodotto scalare tra vettori permette di rappresentare come vettori geometrici tutta una serie di oggetti concettualmente distinti, e le loro trasformazioni lineari come trasformazioni lineari nello spazio dei vettori geometrici.

È forse opportuno sottolineare che occorre distinguere tra i concetti astratti di spazio, quale il concetto di spazio vettoriale o quello di spazio euclideo, cui possono adattarsi diversi insiemi di oggetti, e gli spazi di oggetti "ben determinati", quali, per esempio, lo spazio ambiente (per ipotesi, esempio "concreto" di uno spazio euclideo tridimensionale) e l'associato spazio dei vettori geometrici (esempio "concreto" di uno spazio vettoriale tridimensionale).

Viene fatto ampio uso sia della notazione compatta o invariante (caratteri in grassetto), che della notazione in componenti (caratteri con indici). Nella notazione invariante, un simbolo rappresenta un oggetto indipendentemente dalla possibilità di rappresentarlo in componenti, una volta scelto un opportuno riferimento. La scelta di sistemi di riferimento diversi modifica le componenti dell'oggetto, ma non l'oggetto stesso.

1 Orientazioni sulla retta, nel piano e nello spazio

I concetti di vettore, bivettore e trivettore sono direttamente collegati alle proprietà di orientamento e di congruenza dei segmenti, delle aree e dei volumi. È dunque opportuno precisare innanzi tutto il concetto di *orientazione* delle figure geometriche. L'orientazione delle figure geometriche dipende essenzialmente dalle proprietà di ordinamento dei punti su una retta, nel piano e nello spazio. Nell'ambito della geometria euclidea classica tali proprietà sono introdotte dagli *assiomi di ordinamento* e dalle loro conseguenze (Hilbert, 1970, pp. 5-11).

1.1 Orientazione interna di una retta: vettori

I punti di una retta (così come quelli di un segmento di retta e di una curva piana o sghemba) possono essere ordinati in due modi diversi (fig. 1), modi che rappresentano i due possibili versi di percorrenza sulla retta. La scelta di uno dei due possibili versi di percorrenza orienta *internamente* la retta. Tale orientamento è detto interno in quanto non dipende dalle proprietà di immersione della retta nel piano o nello spazio. L'orientazione interna di una retta orienta tutti i segmenti contenuti nella retta stessa e, viceversa, l'orientazione interna di un segmento orienta internamente la retta che lo contiene e tutti gli altri segmenti contenuti in essa. Inoltre, traslando una retta orientata, è possibile orientare in modo univoco tutte le

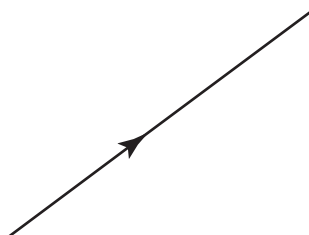


Figura 1: Orientazione interna di una retta

rette ad essa parallele. Dunque, due rette parallele, ed anche due segmenti paralleli, possono avere orientazione concorde oppure discorde, o, in altri termini, avere lo stesso verso oppure verso opposto, a seconda che il verso dell'uno sia concorde oppure discorde con quello che si ottiene per trasporto parallelo dell'altro.

Due segmenti orientati, paralleli tra loro, di verso concorde e di uguale lunghezza² sono detti *equipollenti*. L'insieme dei segmenti orientati, a meno della relazione di equipollenza, genera lo spazio $\mathcal{V}$ dei *vettori*.

1.2 Orientazione esterna di una retta: vettori assiali

Una retta divide un piano che la contiene in due parti. Due punti qualunque del piano giacciono dalla stessa parte o da parti opposte rispetto alla retta. Un segmento che unisce due punti situati da parti opposte rispetto alla retta taglia la retta stessa. La scelta di un verso positivo di percorrenza, attraverso la retta, da una parte all'altra del piano orienta *esternamente* la retta nel piano (fig. 2a). Una retta qualunque nel piano può dunque essere

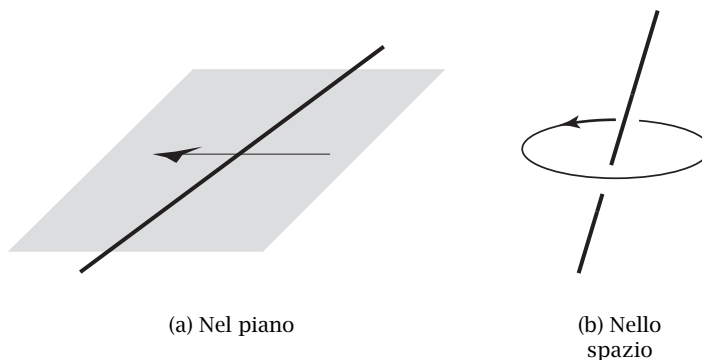


Figura 2: Orientazione esterna di una retta

orientata internamente ed esternamente scegliendo contemporaneamente un verso positivo di percorrenza sulla retta ed un verso positivo di percorrenza attraverso la retta da una parte all'altra del piano.

La scelta di un verso positivo della circolazione attorno ad una retta, tramite la scelta di un verso positivo di percorrenza su di una curva chiusa attorno alla retta orienta invece esternamente la retta nello spazio (fig. 2b). Una retta qualunque nello spazio può essere

²Come già detto è importante sottolineare che il concetto di uguale lunghezza non implica la misura dei segmenti.

orientata internamente ed esternamente scegliendo contemporaneamente un verso positivo di percorrenza sulla retta ed un verso positivo di circolazione attorno alla retta.

Traslando nello spazio un segmento orientato esternamente, è possibile orientare esternamente in modo univoco tutti i segmenti ad esso paralleli. Ne consegue che due segmenti, paralleli tra loro ed orientati esternamente, possono avere orientazione concorde oppure discorde a seconda che l'orientazione dell'uno sia concorde oppure discorde con quella che si ottiene per trasporto parallelo dell'altro. Come già per i segmenti orientati internamente, due segmenti orientati esternamente nello spazio (oppure nel piano), paralleli tra loro, di orientazione concorde e di uguale lunghezza sono detti *equipollenti*. L'insieme dei segmenti orientati esternamente nello spazio (oppure nel piano) generano, a meno della relazione di *equipollenza*, lo spazio dei *vettori assiali*.³

1.3 Orientazione interna di un piano: bivettori

La scelta di un verso di circolazione su di un piano (oppure su di una superficie, piana oppure no), tramite la scelta di un verso positivo di percorrenza su di una qualunque curva chiusa contenuta in esso, orienta internamente il piano (oppure la superficie). L'orientazione della curva chiusa prescelta può estendersi, in modo unico, a tutte le altre curve chiuse del piano (fig. 3a). La scelta di una coppia di assi del piano, orientati internamente, (oppure,

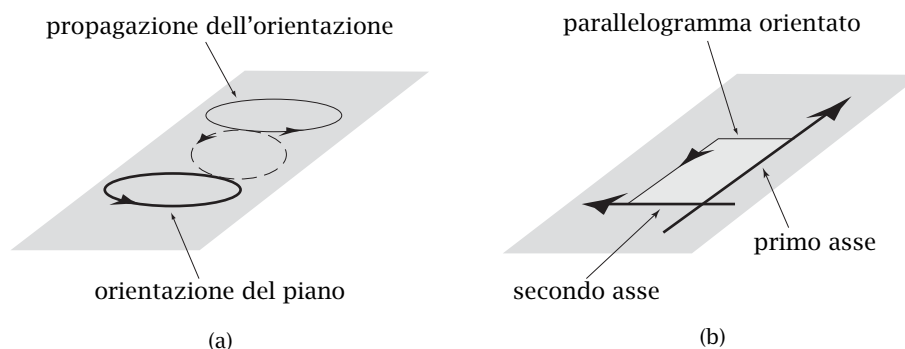


Figura 3: Orientazione interna di un piano

equivalentemente, la scelta di un asse del piano orientato internamente ed esternamente) individua un parallelogramma orientato, per es., dal primo asse e dunque orienta il piano (fig. 3b).

Traslando nello spazio una superficie piana orientata internamente, è possibile orientare in modo univoco tutte le superfici piane ad essa parallele. Dunque, due superfici piane parallele possono avere orientazione concorde oppure discorde a seconda che l'orientazione dell'una sia concorde oppure discorde con quella che si ottiene per trasporto parallelo dell'altra.

Due superfici piane, di uguale giacitura (cioè parallele tra loro), di orientazione concorde e di uguale area⁴ sono dette *equipollenti*. L'insieme delle superfici piane dello spazio orientate internamente genera, a meno della relazione di *equipollenza*, lo spazio $\mathcal{A}$ dei *bivettori*. Il termine bivettore dipende dal fatto che un qualunque elemento di tale spazio può venire rappresentato da un parallelogramma orientato, che a sua volta può venire rappresentato da una coppia di vettori (fig. 4a). È evidente che uno stesso bivettore può essere rappresentato da diverse coppie di vettori (fig. 4b).

³Nella letteratura inglese il termine utilizzato è quello di *twisted vectors* (Burke, 1985, p. 13).

⁴Come già per le lunghezze, il concetto di uguale area non implica la misura delle aree.

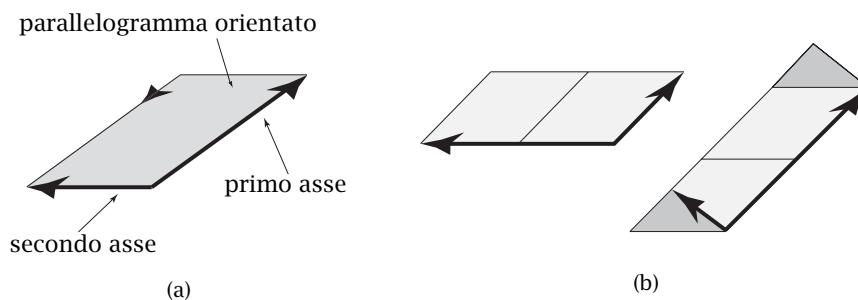


Figura 4: Bivettori

1.4 Orientazione esterna di un piano nello spazio: dualità tra rette e piani

Un piano divide lo spazio che lo contiene in due parti. Due punti qualunque dello spazio giacciono dalla stessa parte o da parti opposte rispetto al piano. Un segmento che unisce due punti situati da parti opposte rispetto al piano interseca il piano stesso. La scelta di un verso positivo di percorrenza, attraverso il piano, da una parte all'altra dello spazio, orienta *esternamente* il piano nello spazio. (fig. 5a).

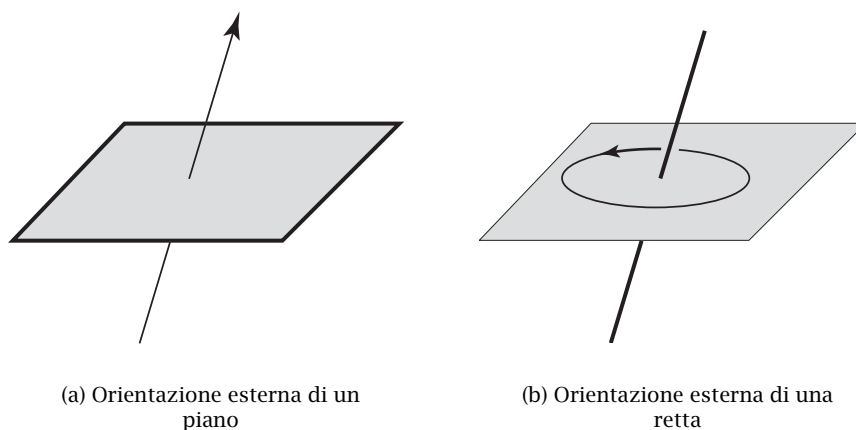


Figura 5: Orientazione esterna nello spazio

Si noti che l'orientazione interna di un piano che interseca una retta orienta esternamente la retta nello spazio poiché tale orientazione equivale alla scelta di un verso positivo della circolazione attorno alla retta (fig. 5b). Inversamente, una retta orientata esternamente orienta internamente un piano attraversato dalla retta. In modo analogo un piano orientato esternamente orienta internamente una retta che attraversa il piano e, inversamente, una retta orientata internamente orienta esternamente un piano attraversato dalla retta. Si istituisce in tal modo una sorta di *dualità* tra rette e piani (oppure superfici e linee), ovvero tra figure geometriche "complementari" dello spazio.

Infine una retta qualunque può essere orientata internamente ed esternamente nello spazio scegliendo contemporaneamente un verso positivo di percorrenza sulla retta ed un verso positivo di circolazione attorno alla retta. Naturalmente, anche un piano può essere orientato contemporaneamente sia internamente che esternamente. D'altronde orientare una retta sia

internamente che esternamente equivale, per la dualità, ad orientare un qualunque piano che intersechi la retta, e viceversa.

1.5 Orientazione interna dello spazio: trivettori

Per orientare lo spazio si orienta internamente una superficie chiusa dello spazio stesso (fig. 6).

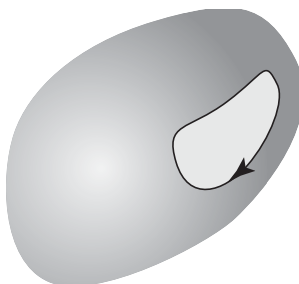


Figura 6: Orientazione interna dello spazio

Allo stesso modo dello spazio, l'orientazione della superficie di contorno di un volume orienta il volume stesso. L'orientazione della superficie chiusa prescelta può estendersi, in modo unico, a tutte le altre superfici chiuse dello spazio e quindi agli altri volumi dello spazio. Ne consegue che due volumi orientati dello spazio possono avere orientazione concorde oppure discorde a seconda che l'orientazione dell'uno sia concorde oppure discorde con quella che si ottiene per propagazione dell'orientazione dell'altro.

La scelta di una terna di assi dello spazio, orientati internamente (oppure, equivalentemente, la scelta di un piano o di una retta orientati internamente ed esternamente) individua un parallelepipedo orientato dai primi due assi e dunque orienta internamente lo spazio (fig. 7).

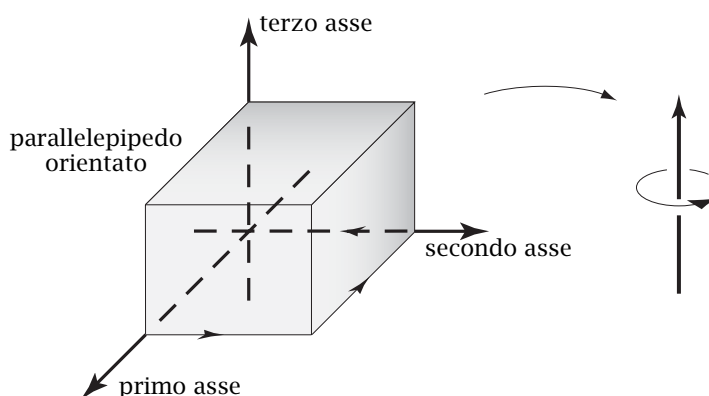


Figura 7: Orientazione interna dello spazio tramite una terna di assi

Se si atteggia il pollice della mano destra, oppure di quella sinistra, secondo la direzione di una retta, il verso del pollice orienta la retta internamente mentre il verso delle altre dita individua la circolazione intorno alla retta e quindi la sua orientazione esterna. Tale operazione fornisce dunque un'orientazione allo spazio. Le due possibili orientazioni dello spazio sono di conseguenza dette *orientazione destra* oppure *orientazione sinistra*. Equivalente al-

l'uso delle mani per orientare lo spazio risulta l'utilizzazione di una vite, destra o sinistra che sia.

Due volumi dello spazio, orientati internamente, di orientazione concorde e di uguale misura di volume sono detti *equipollenti*. L'insieme dei volumi dello spazio, orientati internamente, generano, a meno della relazione di *equipollenza*, lo spazio dei *trivettori*. Un qualunque elemento di tale spazio può venire rappresentato da un parallelepipedo orientato, che a sua volta può venire rappresentato da una terna di vettori geometrici, circostanza che giustifica il termine trivettore (fig. 8).

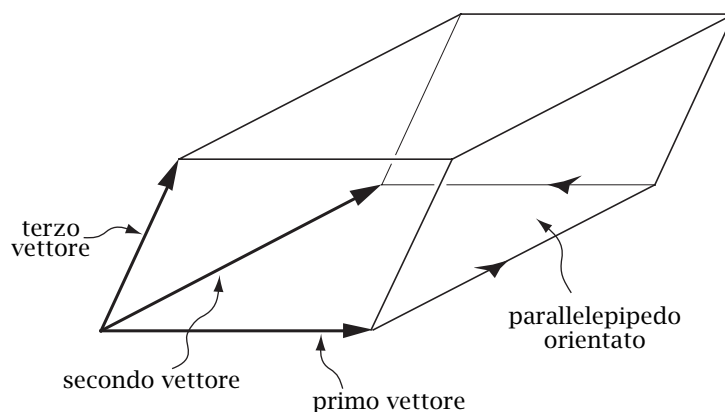


Figura 8: Trivettori

È inoltre evidente che diverse terne di vettori possono rappresentare lo stesso trivettore.

1.6 Orientazione esterna dello spazio: dualità tra punti e volumi

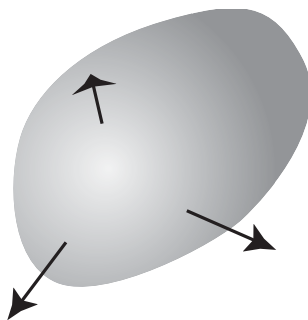


Figura 9: Orientazione esterna dello spazio

Lo spazio può essere orientato orientando una superficie chiusa oltre che internamente anche esternamente. Naturalmente, l'orientazione di un volume non può che essere "interna", mancando un'ulteriore spazio contenitore da cui acquisire proprietà esterne. Nonostante ciò, allo scopo sia di distinguere i due tipi di orientazione che di mettere in dualità un volume con un suo punto interno, elementi geometrici complementari dello spazio, si parla di *orientazione esterna dello spazio* se è scelta una orientazione esterna per una superficie chiusa dello spazio⁵ (fig. 9).

⁵Si noti che tale tipo di orientazione esterna è definibile anche nel caso del piano, utilizzando l'orientazione esterna di una sua curva chiusa in luogo di quella interna. In problemi a due dimensioni questa è l'unica orientazione esterna definibile, venendo a mancare l'immersione nello spazio tridimensionale

Per orientare i punti occorre fare riferimento alle semirette di estremità il punto stesso e alle loro orientazioni. L'orientazione interna di una di queste semirette *orienta internamente il punto*. Tale orientazione interna della semiretta si può estendere a tutte le altre semirette

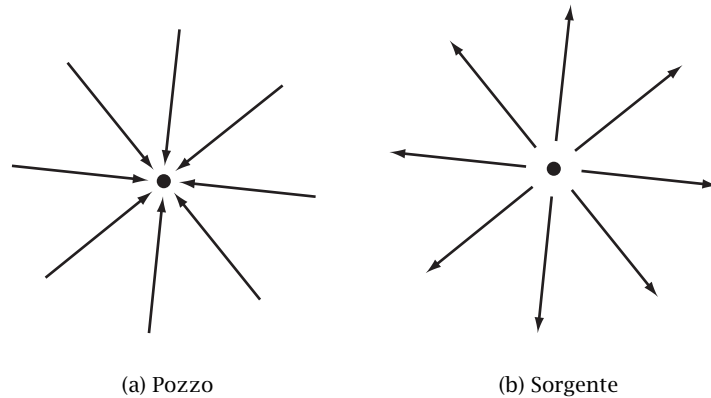


Figura 10: Orientazione interna di un punto

con estremità sul punto in questione. Un punto può dunque essere orientato come *pozzo* (fig. 10a), cioè con la scelta di una percorrenza verso il punto, oppure come *sorgente* (fig. 10b), ovvero scegliendo una percorrenza uscente dal punto.

D'altronde, un punto resta orientato anche dalla scelta di una orientazione esterna per una semiretta che si appoggia al punto in questione (fig. 11a).

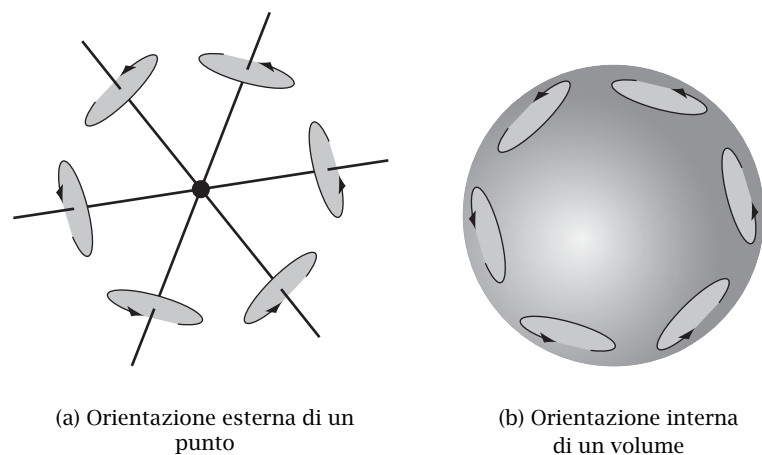


Figura 11: Dualità tra punti e volumi

Anche in tal caso (e non può che essere così, altrimenti non sarebbe lecito parlare di orientazione), l'orientazione della semiretta prescelta può estendersi a tutte le altre semirette con estremità sul punto in questione. Un punto non ha struttura ed è quindi ovvio che le sue orientazioni non possono che essere “esterne”, dovendo obbligatoriamente dipendere dalla sua immersione nello spazio. Nonostante ciò, il desiderio⁶ di estendere ad un volume e ad

⁶Naturalmente, tale desiderio dipende dalla semplificazione, dalla chiarezza formale e dalle generalizzazioni che discendono dalla istituzione della dualità in questione.

un suo punto interno (elementi geometrici complementari dello spazio) la dualità esistente tra una superficie ed una linea che la attraversa, conduce alla scelta di chiamare “interna” l’orientazione del punto quale pozzo o sorgente, e di riservare invece la denominazione di *orientazione esterna di un punto* alla scelta di una orientazione esterna per una semiretta che si appoggia al punto in questione. È evidente infatti che con tale scelta l’orientazione interna di un punto orienta esternamente un volume che lo contiene e viceversa, mentre l’orientazione esterna del punto orienta internamente un volume che lo contiene e viceversa (fig. 11).

2 Algebra vettoriale

La teoria dei vettori associati allo spazio euclideo tridimensionale ha storicamente rappresentato l’archetipo del concetto astratto di spazio vettoriale, concetto che si presta a descrivere le proprietà formali di più insiemi di oggetti, anche molto diversi fra loro, quando in tali insiemi siano state introdotte certe operazioni algebriche soddisfacenti certe proprietà. Come già detto, il concetto di vettore è direttamente collegato al concetto di segmento orientato ed alla possibilità di confrontare tra loro segmenti diversi.

Il confronto di segmenti, nell’ambito della geometria euclidea classica, è l’oggetto degli *assiomi di congruenza* (Hilbert, 1970, pp. 12-13). Gli assiomi di congruenza rendono possibile il confronto tra tutti i segmenti dello spazio, creando quindi una struttura di spazio euclideo, con la possibilità della scelta di una unità di misura per le lunghezze dei segmenti. Una forma più debole di tali assiomi, sufficienti a definire lo spazio vettoriale associato ai segmenti orientati, rende possibile il confronto solo tra segmenti paralleli, creando una struttura di *spazio affine*. In quest’ultimo caso manca allo spazio la struttura metrica, dalla quale dipende il concetto di distanza tra due punti e i concetti collegati, quale quello di perpendicolarità di due rette.

Se la struttura dello spazio ambiente è euclidea, ad ogni segmento orientato è possibile associare la sua lunghezza. Ne risulta allora che un *vettore* $\mathbf{v}$ ⁷ è caratterizzato da un numero reale non negativo $|\mathbf{v}|$, detto *modulo*, e, se $|\mathbf{v}| \neq 0$, da una *direzione orientata internamente* (da una direzione e da un verso) dello spazio euclideo ordinario $\mathcal{E}$. Se $|\mathbf{v}| = 1$, il vettore $\mathbf{v}$ è detto *versore* o *vettore unitario*.⁸ L’insieme dei vettori geometrici verrà indicato con $\mathcal{V}$.

2.1 Operazioni tra vettori

La *somma* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è il vettore definito dalla regola del parallelogramma (fig. 12a). Il vettore di modulo nullo è detto *vettore nullo* e sarà indicato con $\mathbf{0}$. Inoltre, ad ogni vettore $\mathbf{v}$ corrisponde il *vettore opposto* $-\mathbf{v}$, di uguale modulo e direzione, e di verso opposto a quella di $\mathbf{v}$ (fig. 12b). Le operazioni di somma e di inverso e il vettore nullo così introdotti godono delle seguenti proprietà:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}), \quad (\text{associatività}) \quad (1a)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \quad (\text{commutatività}) \quad (1b)$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}, \quad (\text{vettore nullo}) \quad (1c)$$

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (\text{opposto}) \quad (1d)$$

per ogni vettore $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Un insieme di elementi qualunque munito di una operazione di addizione soddisfacente le proprietà (1) è detto *gruppo additivo*.

⁷Seguendo le raccomandazioni UNI CEI ISO 31-11 (1998), che riprendono le raccomandazioni ISO 31-11 (1992) dell’Organizzazione Internazionale di Standardizzazione (ISO), i vettori saranno rappresentati nel seguito da caratteri in *grassetto corsivo romano* (in inglese *bold roman italic type*)

⁸Poiché fisicamente i vettori rappresentano la misura di grandezze fisiche vettoriali, il modulo di un versore rappresenta l’unità di misura della grandezza (per es. una lunghezza). Modificando l’unità di misura lo stesso versore rappresenta quindi una grandezza diversa.

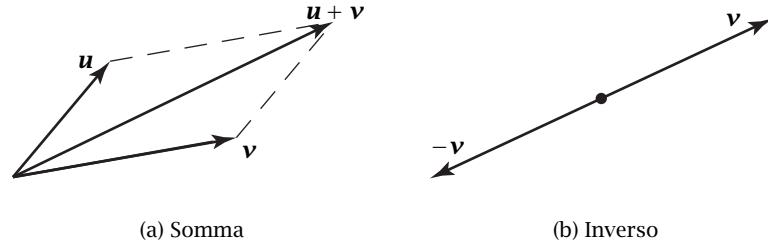


Figura 12: Operazioni vettoriali

Il *prodotto* di un numero reale $\alpha \in \mathbb{R}$ per un vettore $\mathbf{v}$, indicato con $\alpha\mathbf{v}$, è il vettore caratterizzato dal modulo $\alpha|\mathbf{v}|$ e dalla direzione orientata di $\mathbf{v}$ se $\alpha > 0$, oppure da quella opposta se $\alpha < 0$. Tale operazione gode delle seguenti proprietà algebriche:

$$\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}, \quad (\text{associatività}) \quad (2a)$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}, \quad (\text{distributività}) \quad (2b)$$

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}, \quad (\text{distributività}) \quad (2c)$$

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}, \quad (\text{identità scalare}) \quad (2d)$$

per ogni numero reale α e β , e per ogni vettore $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Un gruppo additivo munito di un prodotto per gli elementi di un campo (il campo dei numeri reali, nel nostro caso) soddisfacente le proprietà (2), è detto *spazio vettoriale*. Gli elementi del campo sono detti genericamente *scalari* e il campo è detto *campo degli scalari*. Se il campo degli scalari è quello reale, oppure quello complesso, si parla di *spazio vettoriale reale* oppure, rispettivamente, di *spazio vettoriale complesso*. In questo senso, l'insieme $\mathcal{V}$ dei vettori è un caso particolare di spazio vettoriale reale e i suoi scalari sono dei numeri reali.

Il *prodotto scalare* o *prodotto interno* di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, indicato con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, è il numero reale definito dalla uguaglianza:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \varphi, \quad (3)$$

dove φ indica l'angolo tra le direzioni orientate di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (fig. 13). Il prodotto scalare di due

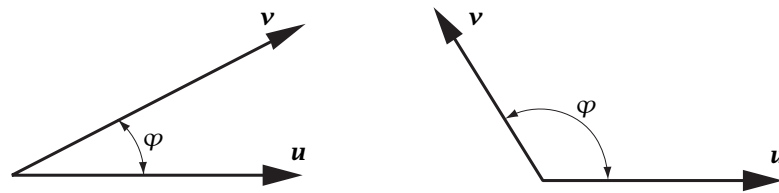


Figura 13: Prodotto scalare

vettori soddisfa le seguenti proprietà:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad (\text{simmetria}) \quad (4a)$$

$$(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}), \quad (\text{linearità}) \quad (4b)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \quad \text{e} \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}), \quad (\text{definitezza positiva}) \quad (4c)$$

per ogni numero reale α e β , e per ogni vettore $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Si noti che risulta:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (5)$$

e che di conseguenza un versore è caratterizzato dalla proprietà $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1$. Uno spazio vettoriale reale munito di un “prodotto scalare” soddisfacente le proprietà (4) è detto *spazio con prodotto interno*.⁹

In un tale spazio, il modulo di un vettore è definito tramite la (5), mentre l'angolo φ tra due vettori si ottiene dalla (3):

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}} \quad (6)$$

Lo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ è quindi un caso particolare di spazio con prodotto interno.

2.2 Vettori assiali

I vettori assiali si differenziano dai vettori geometrici, le cui operazioni sono state descritte nel § precedente, per il fatto di rappresentare segmenti orientati esternamente (§1.2). Ne risulta allora che un *vettore assiale* $\mathbf{v}$ è caratterizzato da un modulo $|\mathbf{v}|$ e, se $|\mathbf{v}| \neq 0$, da una *direzione orientata esternamente* (da una direzione e da una circolazione) dello spazio euclideo ordinario $\mathcal{E}$. Le operazioni tra vettori assiali sono definibili allo stesso modo di quelle riguardanti i vettori geometrici, compresa la regola del parallelogramma (fig. 14a). Non es-

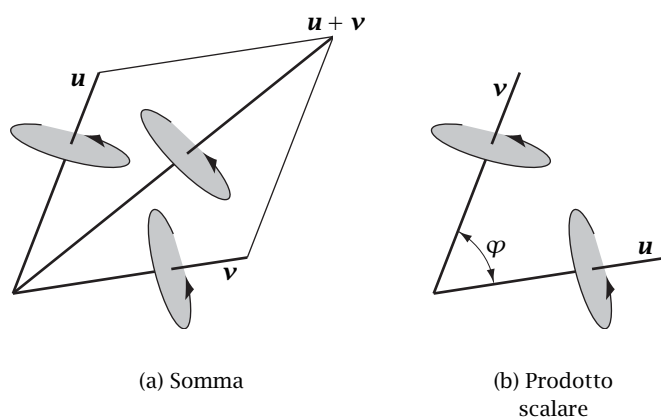


Figura 14: Operazioni tra vettori assiali

sendoci in tal caso una prima e una seconda estremità dei segmenti, occorre incardinarli a un punto in modo che si ottenga la circolazione dell'uno per rotazione dell'altro attorno al punto cardine. Allo stesso modo si ottiene la circolazione attorno al vettore assiale somma e si individua l'angolo che permette di definire il prodotto scalare (fig. 14b).

⁹Uno spazio con prodotto interno è sempre uno spazio vettoriale reale. Nel caso di uno spazio vettoriale complesso occorre sostituire la condizione (4a) di simmetria con la seguente condizione di *simmetria coniugata*:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}, \quad (4a^*)$$

dove con $\overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$ si è indicato il complesso coniugato di $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$. Questa condizione assicura che se $\mathbf{v}$ è un vettore allora $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ è un numero reale, il che rende significativa la condizione (4c) di definitezza positiva, condizione indispensabile per potere definire il modulo del vettore tramite la (5). Si noti inoltre che la condizione (4b) di linearità va intesa come linearità sinistra, poiché da questa e dalla simmetria coniugata discende non la linearità destra, e quindi la bilinearità, che vale nel caso reale, ma la *linearità coniugata destra*:

$$\mathbf{u} \cdot (\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) = \overline{\alpha}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \overline{\beta}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}).$$

A volte si usa il termine *sesquilineare* per indicare che un'operazione binaria è lineare a sinistra e lineare coniugata a destra. Uno spazio vettoriale complesso munito di un prodotto interno soddisfacente la simmetria coniugata (4a*), la linearità sinistra (4b) e la definitezza positiva (4c) è detto *spazio unitario*.

La scelta di una orientazione dello spazio, equivalente ad orientare una retta internamente ed esternamente, permette di rappresentare un vettore assiale come vettore geometrico, scegliendo quale suo verso quello che associato alla sua circolazione definisca la data orientazione dello spazio (fig. 15). Non occorre però dimenticare che cambiando l'orientazione



Figura 15: Equivalenza tra vettori e vettori assiali

dello spazio cambia l'orientazione del vettore che rappresenta il vettore assiale. Per tale motivo si dice spesso che un "vettore assiale" inverte il suo "verso" per effetto dell'inversione dell'orientazione dello spazio, anche se in realtà non è il vettore assiale a modificare la sua orientazione, ma bensì la sua rappresentazione come vettore geometrico.

2.3 Bivettori

Si ricordi che i bivettori rappresentano delle aree orientate internamente e che possono essere sempre rappresentati da due vettori definenti un parallelogramma orientato internamente (si veda il §1.3). Aggiungendo la misura dell'area, ne risulta che un *bivettore* $\mathbf{a}$ è caratterizzato da un modulo $|\mathbf{a}|$ e, se $|\mathbf{a}| \neq 0$, da una *giacitura orientata internamente* (da una giacitura e da una circolazione) dello spazio euclideo ordinario $\mathcal{E}$. L'insieme dei bivettori verrà indicato con $\mathcal{A}$.

La somma di due bivettori si ottiene rappresentando i due bivettori con due parallelogrammi aventi un lato uguale, il che poi equivale a rappresentarli tramite due coppie di vettori $(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)$ e $(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)$ con un vettore, per es. il primo, coincidente. Si sovrappongano allora due lati uguali e di verso concorde, il che equivale a tracciare i due bivettori sul vettore comune. I lati restanti individuano un parallelogramma la cui diagonale, insieme con il lato comune, definisce il bivettore somma (fig. 16a). In termini delle coppie di vettori, il bivettore somma è rappresentato dalla coppia $(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$.

Inoltre, come per i vettori, il bivettore $\mathbf{0}$ di modulo nullo è detto *bivettore nullo* mentre il bivettore $-\mathbf{a}$, opposto di un bivettore $\mathbf{a}$, ha lo stesso modulo e la stessa giacitura di $\mathbf{a}$, e circolazione opposta (fig. 16b).

Analogamente al caso dei vettori e dei vettori assiali, l'orientazione dello spazio permette di trasformare l'orientazione interna di un'area (fig. 5a a pagina 6) in una orientazione esterna e viceversa. Ciò significa che le aree orientate esternamente possono essere descritte dai bivettori, via orientazione dello spazio. Se si modifica l'orientazione dello spazio, per es. da destra a sinistra, si modifica contestualmente l'orientazione esterna dell'area descritta da uno stesso bivettore.

Si noti che la tensione interna a un corpo continuo agisce sulle due facce di una superficie interna al corpo, ovverossia agisce su una superficie orientata esternamente dalla presenza della materia del corpo da una parte oppure dall'altra rispetto alla superficie.

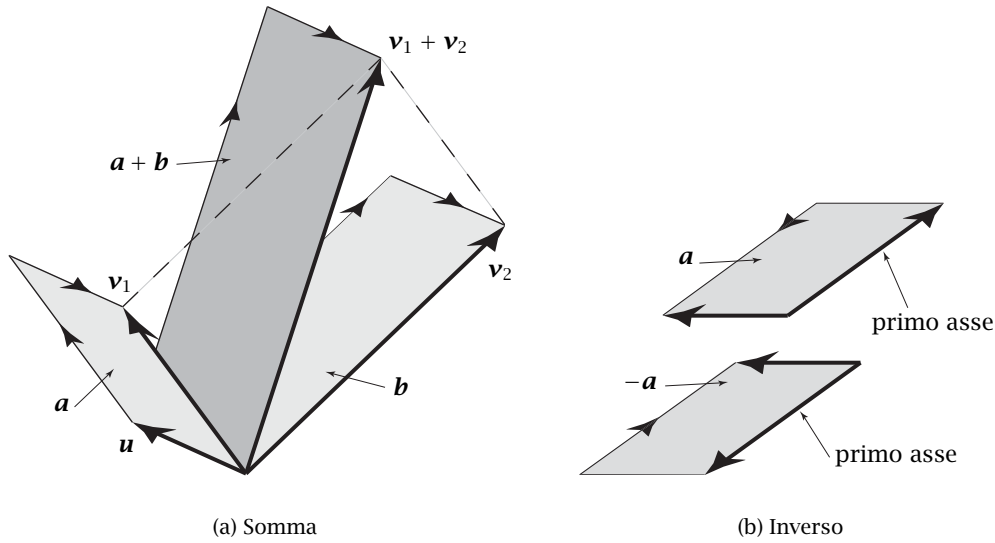


Figura 16: Operazioni tra bivettori

2.4 Prodotto vettoriale

Nello spazio $\mathcal{V}$ dei vettori, sfruttando la struttura euclidea dello spazio, risulta definibile il *prodotto vettoriale* o *prodotto esterno* di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, indicato con $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Tale prodotto genera il vettore assiale caratterizzato dalla direzione ortogonale al piano dei due vettori, di orientazione esterna definita dalla coppia dei vettori nell'ordine dato e di modulo:

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \alpha, \quad (7)$$

dove α è ancora l'angolo tra le direzioni orientate di $\mathbf{u}$ e di $\mathbf{v}$ (fig. 17). Il prodotto vettoriale

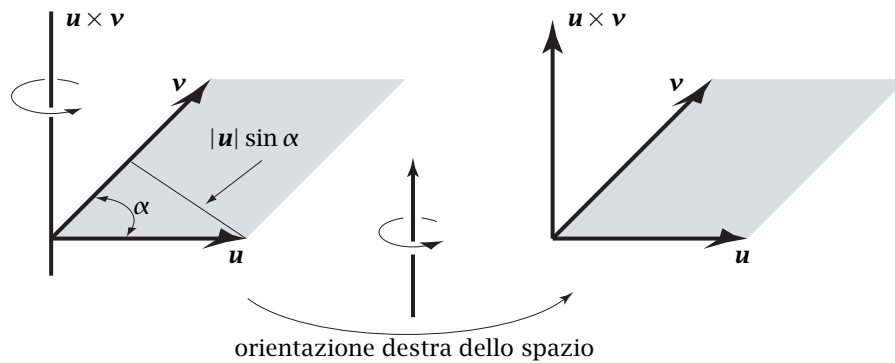


Figura 17: Prodotto vettoriale

non è commutativo, poiché risulta:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \quad (8)$$

per ogni vettore $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Vale invece la proprietà distributiva rispetto alla somma di due vettori:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}, \quad (9)$$

per ogni vettore $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Naturalmente, nel secondo membro della (9) compare la somma di due vettori assiali.

Se lo spazio è orientato, all'orientazione esterna di $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ si può far corrispondere l'orientazione interna individuata dall'orientazione dello spazio. In tal caso il prodotto vettoriale si può rappresentare in modo unico con un vettore geometrico (fig. 17), continuando a valere le proprietà (8) e (9). Non occorre però dimenticare che cambiando l'orientazione dello spazio cambia l'orientazione del vettore che rappresenta il prodotto vettoriale.

Poiché il modulo del prodotto vettoriale di due vettori uguaglia l'area del parallelogramma individuato dagli stessi vettori, ne risulta evidente che in ambito euclideo un bivettore si rappresenta con un prodotto vettoriale e quindi con un vettore assiale, oppure con un vettore geometrico se in più si introduce un'orientazione dello spazio. Ne risulta dunque che un bivettore è rappresentato da un vettore di direzione normale all'area.

Salvo avvertenza in contrario, nel seguito si suppone che per lo spazio sia stata scelta un'orientazione destra ed il prodotto vettoriale sarà di conseguenza rappresentato da un vettore geometrico.

2.5 Trivettori

Analogamente ai bivettori, i *trivettori* rappresentano dei volumi orientati internamente e possono sempre essere rappresentati da tre vettori definenti un parallelepipedo orientato internamente (si veda il §1.5). Al solito, con l'aggiunta della *misura del volume*, risulta che un trivettore $\mathbf{a}$ è caratterizzato da un modulo $|\mathbf{a}|$ e, se $|\mathbf{a}| \neq 0$, dallo *spazio orientato internamente*.

La somma di due trivettori si ottiene rappresentando i due trivettori con due parallelepipedi con una base uguale, il che poi equivale a rappresentarli con due triplette di vettori $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}_1)$ e $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$ con due vettori, per es. il primo e il secondo, coincidenti. Si sovrappongono allora due basi uguali e di orientazione concorde, il che equivale a tracciare i due trivettori sui due vettori comuni. I lati restanti individuano un parallelogramma la cui diagonale, insieme con la base comune, definisce il trivettore somma (fig. 18). In termini delle

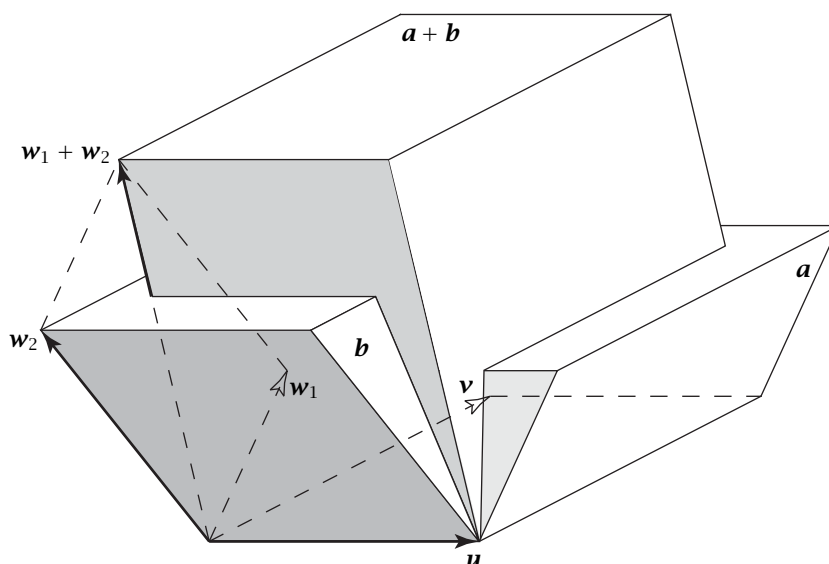


Figura 18: Somma di trivettori

triplette di vettori, il trivettore somma è rappresentato dalla tripletta $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$.

Si consideri ora che lo spazio è unico e può essere orientato in due modi, e che quindi di spazi orientati ce ne sono due. La scelta di una orientazione dello spazio rende allora possibile associare ad ogni trivettore $\mathbf{a}$ un numero reale, $|\mathbf{a}|$ oppure $-|\mathbf{a}|$, a seconda che l'orientazione prescelta dello spazio rispettivamente coincida oppure sia opposta a quella associata al trivettore. In altri termini l'orientazione dello spazio rappresenta i trivettori tramite lo spazio $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Per tale motivo i trivettori sono spesso citati quali “volumi con segno”.¹⁰ Se si modifica l'orientazione dello spazio, per es. da destra a sinistra, si modifica contestualmente il segno del numero reale che rappresenta lo stesso trivettore.

2.6 Prodotto misto

Il *prodotto misto* di tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ individua lo scalare $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$. Se β rappresenta l'angolo che il prodotto vettoriale $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ forma con il vettore $\mathbf{w}$, risulta:

$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos \beta. \quad (10)$$

Per la proprietà del prodotto vettoriale di rappresentare l'area del parallelogramma individuato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, ne segue che il modulo del prodotto misto rappresenta il volume del parallelepipedo individuato da $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (fig. 19). Il prodotto misto di tre vettori, nell'ordine dato,

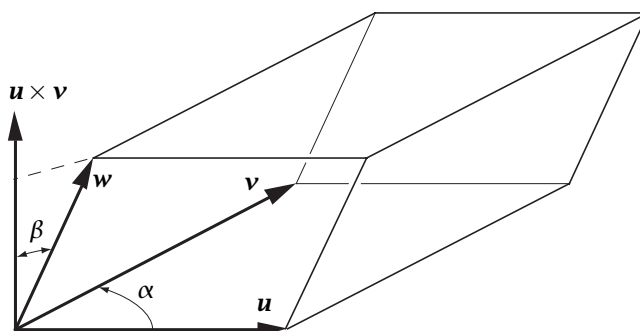


Figura 19: Prodotto misto

risulta positivo oppure negativo a seconda che i tre vettori individuino rispettivamente un'orientazione concorde oppure discorde con quella dello spazio. Nel caso si sia rispettata la convenzione usuale di scegliere per lo spazio una orientazione destra, il prodotto misto sarà positivo oppure negativo a seconda che l'orientazione dei tre vettori sia rispettivamente destra oppure sinistra. Ne consegue che, una volta scelta l'orientazione dello spazio, un volume orientato, o trivettore che dir si voglia, può essere rappresentato dallo scalare individuato dal prodotto misto dei tre vettori di una qualunque delle terne di vettori che lo rappresentano.

2.7 Covettori

Una forma lineare¹¹ $\mathbf{a}^*$ che “trasforma” un vettore in un numero reale viene detto *covettore*:

$$\mathbf{a}^* : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{a}^* \mathbf{u}. \quad (11)$$

¹⁰Più precisamente “misura di volume con segno”.

¹¹Una *forma* è una trasformazione (una funzione) tra uno spazio vettoriale generico e il campo degli scalari dello spazio vettoriale stesso. Si noti che anche il campo degli scalari può essere considerato quale spazio vettoriale sullo stesso campo degli scalari, per cui una forma non è altro che una particolare trasformazione tra spazi vettoriali.

La linearità di $\mathbf{a}^*$ significa che deve valere la relazione:

$$\mathbf{a}^*(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{a}^*(\mathbf{u}) + \beta \mathbf{a}^*(\mathbf{v}), \quad (12)$$

dove α e β sono generici scalari e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ generici vettori. In altri termini (equivalenti) un covettore $\mathbf{a}^*$ è omogeneo di grado 1 ed additivo:

$$\begin{cases} \mathbf{a}^*(\alpha \mathbf{u}) = \alpha \mathbf{a}^*(\mathbf{u}) & \text{omogeneità di grado 1,} \\ \mathbf{a}^*(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{a}^*(\mathbf{u}) + \mathbf{a}^*(\mathbf{v}) & \text{additività.} \end{cases} \quad (13)$$

Per esempio, una “forza” può essere rappresentata da un covettore: l’azione della forza si esplica sui vettori spostamento originando lo scalare che rappresenta il lavoro della forza.

La somma di covettori, il loro prodotto per un numero reale, il covettore nullo e il covettore opposto possono essere definiti in modo standard:

$$(\mathbf{a}^* + \mathbf{b}^*)\mathbf{u} = (\mathbf{a}^*\mathbf{u}) + (\mathbf{b}^*\mathbf{u}), \quad (14a)$$

$$(\alpha \mathbf{a}^*)\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{a}^*\mathbf{u}), \quad (14b)$$

$$\mathbf{0}^*\mathbf{u} = 0, \quad (14c)$$

$$(-\mathbf{a}^*)\mathbf{u} = -(\mathbf{a}^*\mathbf{u}), \quad (14d)$$

per ogni scalare α e per ogni vettore $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. L’insieme dei covettori, con le operazioni (14), forma uno spazio vettoriale $\mathcal{V}^*$ che ha la stessa dimensione di $\mathcal{V}$ e che viene detto *spazio duale* di $\mathcal{V}$. Naturalmente, il concetto di covettore e di spazio duale si può applicare ad un qualunque spazio vettoriale.

Un covettore $\mathbf{a}^*$ può essere rappresentato geometricamente da una coppia di piani. L’azione del covettore su un qualunque vettore rappresenta la misura del vettore rispetto all’unità intercettata dalla coppia di piani sulla direzione del vettore, con il segno individuato dalla concordanza o meno del verso del vettore con il verso individuato dalla coppia di piani (fig. 20). Se tutti i vettori si applicano in un punto dello spazio, il secondo piano della coppia è indi-

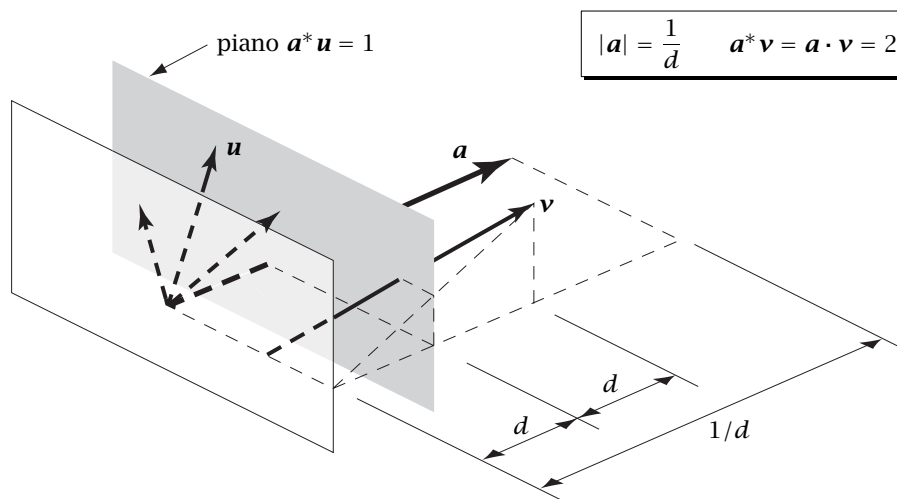


Figura 20: Covettori

viduato dalla condizione $\mathbf{a}^*\mathbf{u} = 1$, ed il primo dal piano parallelo al precedente tracciato per il punto di applicazione dei vettori. Notare che il covettore $2\mathbf{a}^*$, doppio del precedente, si rappresenta con una coppia di piani più ravvicinati della metà di quelli che rappresentano $\mathbf{a}^*$.

In ambito euclideo, ovvero in presenza di un prodotto scalare fra vettori, un covettore si rappresenta in modo unico con un vettore (*teorema di Riesz*). Detto $\mathbf{a}$ il vettore associato al covettore $\mathbf{a}^*$, risulta:¹²

$$\mathbf{a}^* \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}. \quad (15)$$

Questa circostanza ha per conseguenza che i vettori possono essere identificati (formalmente ma non concettualmente) con le trasformazioni lineari $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Geometricamente il vettore $\mathbf{a}$ resta individuato dalla coppia di piani che rappresenta il covettore $\mathbf{a}^*$: la direzione e il verso di $\mathbf{a}$ sono individuati dalla direzione perpendicolare ai piani e dall'ordine dei piani mentre il suo modulo è individuato dall'inverso della distanza dei due piani. Come notato, raddoppiare un covettore significa dimezzare la distanza dei piani rappresentativi e quindi significa raddoppiare il vettore rappresentativo.

Gradiente di una funzione scalare. Un esempio di una funzione lineare del tipo (11) è il *gradiente di una funzione scalare del punto* cioè di una funzione definita nello spazio euclideo $\mathcal{E}$ e a valori in $\mathbb{R}$. Nella fig. 21 è illustrato il caso di una funzione definita nello spazio euclideo

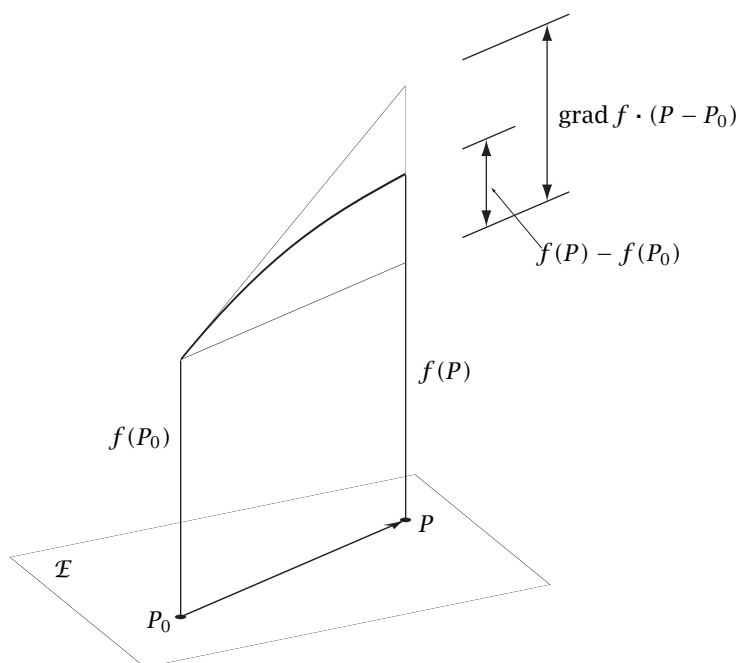


Figura 21: Gradiente di una funzione scalare

a due dimensioni. In questo esempio occorre distinguere la funzione di cui si vuole calcolare il gradiente:

$$f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto f(P), \quad (16)$$

l'incremento della funzione, a partire da un punto prefissato P_0 , somma di una parte lineare (che definisce il gradiente) e di una parte di ordine superiore al primo:

$$f(P) - f(P_0) = \text{grad } f \cdot (P - P_0) + o(|P - P_0|), \quad (17)$$

ed infine il gradiente, che dipende dal punto P_0 :

$$\text{grad } f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, P - P_0 \mapsto \text{grad } f \cdot (P - P_0). \quad (18)$$

¹²Per più dettagli sulle funzioni lineari a valori scalari, compresa la dimostrazione del teorema di Riesz, si veda, per es., Fleming (pp. 79-82 1977, .)

Nella (17) il simbolo “o” (*o piccolo di Landau*) indica termini di ordine superiore, mentre nella (18) il termine $\text{grad } f$ si è utilizzato per indicare sia il covettore che il vettore che gli corrisponde tramite la (15).

3 Algebra Tensoriale

3.1 Forme multilineari

Si consideri un generico spazio vettoriale, che nel caso che ci interessa coincide con lo spazio $\mathcal{V}$ dei vettori geometrici. Oltre allo spazio vettoriale stesso sono automaticamente a disposizione il campo degli scalari, nel nostro caso il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali, e lo spazio vettoriale duale $\mathcal{V}^*$ dei covettori. Lo spazio dei covettori è a sua volta uno spazio vettoriale e se ne potrebbe quindi considerare il suo duale $\mathcal{V}^{**}$, detto *secondo spazio duale*. In tal modo non si ottiene comunque nulla di nuovo poiché il secondo spazio duale è isomorfo allo spazio $\mathcal{V}$ dei vettori. Infatti ad un generico vettore $\mathbf{a}$ corrisponde la trasformazione lineare $\mathbf{a}^{**} : \mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\mathbf{a}^{**} \mathbf{v}^* = \mathbf{a} \mathbf{v}^*, \quad (19)$$

per ogni covettore $\mathbf{v}^* : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Nel secondo membro della (19) si è utilizzata la convenzione di scrivere il vettore $\mathbf{a}$ su cui agisce il covettore $\mathbf{v}^*$ a sinistra del covettore stesso, allo scopo di non modificare la posizione del covettore $\mathbf{v}^*$ rispetto al primo membro dell'uguaglianza. Nel seguito si adotterà tale convenzione tutte le volte che sarà ritenuto opportuno allo scopo di rendere più leggibili le formule. Si noti che, a differenza dell'isomorfismo (15) che identifica lo spazio duale con lo spazio dei vettori, l'isomorfismo (19) tra il secondo spazio duale e lo spazio dei vettori non utilizza la struttura metrica aggiuntiva dovuta al prodotto scalare. Un isomorfismo che dipende esclusivamente dalla struttura fondamentale di spazio vettoriale è detto *canonico*.

Si considerino ora le *forme multilineari*. Se $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$ è una successione di n spazi vettoriali, una forma $\mathbf{a}$ n -lineare è una trasformazione definita nel prodotto cartesiano degli n spazi vettoriali, nell'ordine dato, e a valori scalari:

$$\mathbf{a} : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (20)$$

lineare in ciascuna delle variabili:

$$\mathbf{a}(\mathbf{v}_1, \dots, \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{w}, \dots, \mathbf{v}_n) = \alpha \mathbf{a}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{v}_n) + \beta \mathbf{a}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{w}, \dots, \mathbf{v}_n). \quad (21)$$

Si definiscano la *somma* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ di due forme multilineari $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, il *prodotto* $\alpha \mathbf{a}$ di uno scalare α e di una forma multilineare $\mathbf{a}$, la forma multilineare *nulla* $\mathbf{0}$ e infine la forma $-\mathbf{a}$ *opposta* della forma $\mathbf{a}$ nel modo seguente:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = \mathbf{a}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) + \mathbf{b}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n), \quad (22a)$$

$$(\alpha \mathbf{a})(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = \alpha (\mathbf{a}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)). \quad (22b)$$

$$\mathbf{0}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = 0. \quad (22c)$$

$$(-\mathbf{a})(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = -(\mathbf{a}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)), \quad (22d)$$

per ogni $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathcal{V}_n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. È facile verificare che l'insieme delle forme lineari del tipo (20), munito delle operazioni (22), rappresenta uno spazio vettoriale.

È inoltre evidente che modificando il numero o il tipo di spazi vettoriali che compaiono nella definizione (20) si ottengono degli spazi vettoriali diversi tra loro. Nel caso che ciascuno degli spazi vettoriali $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$ coincida con uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ oppure col suo duale $\mathcal{V}^*$, la forma n -lineare viene detta *tensori di ordine n* e lo spazio vettoriale che viene così generato *spazio tensoriale di ordine n* .¹³

¹³In accordo con le raccomandazioni UNI CEI ISO 31-11 (1998), che richiedono caratteri in grassetto sia per i vettori che per i tensori, e allo scopo di differenziare visivamente i tensori dai vettori, nel seguito i tensori verranno rappresentati da caratteri in grassetto corsivo a bastone (*slanted bold sans serif type* in inglese).

Da questa definizione generale di tensore consegue che i *tensori del primo ordine* coincidono con le forme lineari che hanno come dominio lo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ oppure lo spazio duale $\mathcal{V}^*$. Vi sono quindi due tipi di tensori del primo ordine:

1. I *covettori*, cioè le forme lineari $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$;
2. I *vettori*, che, per via dell'isomorfismo canonico (19), coincidono con le forme lineari $\mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Per completezza gli scalari, nel nostro caso i numeri reali, sono detti *tensori di ordine zero*. Tale terminologia è giustificata dal fatto che i numeri reali sono isomorfi alle forme lineari del tipo $\mathcal{V}^0 \rightarrow \mathbb{R}$, dove $\mathcal{V}^0 = \{\mathbf{0}\}$ è il *sottospazio banale* di $\mathcal{V}$.

Infine, i *tensori del secondo ordine* o *tensori doppi* sono definiti quali *forme bilineari* di dominio uno qualunque dei prodotti cartesiani che si ottengono con gli spazi dei vettori $\mathcal{V}$ e dei covettori $\mathcal{V}^*$ in tutti i modi possibili. Esistono quindi quattro tipi di tensori doppi.

3.2 Trasformazioni lineari

Si considerino ora le trasformazioni lineari tra due spazi vettoriali $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ qualsiasi:

$$\mathbf{A}: \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2, \quad \mathbf{v}_1 \mapsto \mathbf{v}_2 = \mathbf{A} \mathbf{v}_1. \quad (23)$$

La linearità richiede che sia soddisfatta la seguente relazione:

$$\mathbf{A}(\alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{v}_1) = \alpha(\mathbf{A} \mathbf{u}_1) + \beta(\mathbf{A} \mathbf{v}_1), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_1, \quad (24)$$

equivalente alle due condizioni di additività e di omogeneità di grado 1:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) = \mathbf{A} \mathbf{u}_1 + \mathbf{A} \mathbf{v}_1, \quad (\text{additività}), \quad (25a)$$

$$\mathbf{A}(\alpha \mathbf{u}_1) = \alpha(\mathbf{A} \mathbf{u}_1), \quad (\text{omogeneità di grado 1}), \quad (25b)$$

che devono valere per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_1$.

3.2.1 Spazio di trasformazioni lineari

Nell'insieme delle trasformazioni lineari del tipo (23) è possibile definire, in modo naturale, la *somma* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ di due trasformazioni lineari, il *prodotto* $\alpha \mathbf{A}$ di un numero reale per una trasformazione lineare, la trasformazione lineare *nulla* $\mathbf{0}$ e infine la trasformazione lineare *opposta* $-\mathbf{A}$ di una data trasformazione lineare $\mathbf{A}$, operazioni che rendono l'insieme $\text{Lin}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ delle trasformazioni lineari (23) uno spazio vettoriale reale:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{v}_1 = \mathbf{A} \mathbf{v}_1 + \mathbf{B} \mathbf{v}_1, \quad (26a)$$

$$(\alpha \mathbf{A}) \mathbf{v}_1 = \alpha(\mathbf{A} \mathbf{v}_1), \quad (26b)$$

$$\mathbf{0} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \quad (26c)$$

$$(-\mathbf{A}) \mathbf{v}_1 = -(\mathbf{A} \mathbf{v}_1), \quad (26d)$$

per ogni $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_1$. Si noti che le uguaglianze definite dalle (26) definiscono senz'altro delle trasformazioni lineari, come si può facilmente verificare. Per dimostrare poi che $\text{Lin}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ è uno spazio vettoriale reale occorre verificare che la somma di due trasformazioni, la trasformazione nulla e la trasformazione opposta rendono $\text{Lin}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ un gruppo additivo:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}), \quad (27a)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad (27b)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}, \quad (27c)$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}, \quad (27d)$$

per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \text{Lin}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$, e che infine il prodotto di un numero reale per una trasformazione soddisfa le condizioni:

$$\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}, \quad (28a)$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}, \quad (28b)$$

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}, \quad (28c)$$

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (28d)$$

per ogni scalare α e β , e per ogni trasformazione $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

3.2.2 Trasformazioni lineari e tensori doppi

Si noti ora che se ciascuno degli spazi vettoriali $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$, rispettivamente dominio e codominio della trasformazione lineare (23), si fa coincidere con uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ oppure con il suo duale $\mathcal{V}^*$ si ottengono quattro tipi di trasformazioni differenti che generano quindi quattro spazi vettoriali, in numero pari a quelli generati dai tensori doppi. A ciascuno spazio di tensori doppi corrisponde, tramite un isomorfismo canonico (un isomorfismo per ogni tipo di tensori), uno spazio ben preciso di trasformazioni lineari, il cui dominio e codominio, come detto, coincidono o con lo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ oppure con il suo duale $\mathcal{V}^*$. Tenendo conto di tali isomorfismi canonici, i vari tipi di tensori doppi possono essere catalogati indifferentemente sia come forme bilineari che come trasformazioni lineari. La tabella 1 riporta il quadro completo dei tensori doppi. Nelle righe di tale tabella, una per ogni tipo

tipo	spazio	$\mathbf{a}$	$\mathbf{A}$	isomorfismo canonico ($\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \forall \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^*$)
trasformazione lineare su $\mathcal{V}$	Lin	$\mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$	$\mathbf{a}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^*(\mathbf{A}\mathbf{v})$
forma bilineare su $\mathcal{V}$	Blin	$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$	$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}(\mathbf{A}\mathbf{v})$
trasformazione lineare su $\mathcal{V}^*$	Lin*	$\mathcal{V} \times \mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}^*$	$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*) = \mathbf{u}(\mathbf{A}\mathbf{v}^*)$
forma bilineare su $\mathcal{V}^*$	Blin*	$\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}$	$\mathbf{a}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) = \mathbf{u}^*(\mathbf{A}\mathbf{v}^*)$

Tabella 1: Tensori doppi

di tensore, sono forniti una possibile denominazione del tipo di tensore doppio, un simbolo per lo spazio di tutti i tensori doppi di tale tipo, il dominio e il codominio sia delle forme bilineari $\mathbf{a}$ che delle trasformazioni lineari $\mathbf{A}$ che si corrispondono nell'isomorfismo canonico, ed infine l'uguaglianza che induce l'isomorfismo canonico tra lo spazio delle forme bilineari e quello delle trasformazioni lineari. Sempre con riferimento la tabella 1, nelle uguaglianze che definiscono gli isomorfismi canonici tra forme $\mathbf{a}$ e trasformazioni $\mathbf{A}$, la trasformazione $\mathbf{A}$ agisce, a seconda dei casi, sul vettore $\mathbf{v}$ oppure sul covettore $\mathbf{v}^*$ generando, a seconda dei casi, o un vettore su cui agisce il covettore $\mathbf{u}^*$ oppure un covettore che agisce sul vettore $\mathbf{u}$ (in quest'ultimo caso il vettore $\mathbf{u}$ è scritto a sinistra del covettore in accordo con la convenzione descritta in precedenza).

3.2.3 Prodotto di trasformazioni lineari

Date due trasformazioni lineari $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ è possibile definire il loro *prodotto* $\mathbf{AB}$ quale composizione funzionale di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{v}), \quad (29)$$

per ogni $\mathbf{v}$ appartenente al dominio di $\mathbf{B}$. Naturalmente, affinché il prodotto esista il dominio di $\mathbf{A}$ deve coincidere con il codominio di $\mathbf{B}$. Inoltre il prodotto di due trasformazioni lineari è in generale di tipo diverso da entrambe, salvo che entrambe non siano trasformazioni sullo stesso spazio vettoriale.

Il prodotto di due trasformazioni lineari è lineare, gode della proprietà associativa e della proprietà distributiva rispetto alla somma di trasformazioni, ed è in generale non commutativo.

3.2.4 Trasformazioni lineari inverse

Si ricordi che una generica funzione, e quindi anche una trasformazione lineare, è invertibile se e solo se è *biunivoca* (cioè se è contemporaneamente *iniettiva* e *suriettiva*).

La *trasformazione inversa* $\mathbf{A}^{-1}$ di una generica trasformazione lineare $\mathbf{A}$ è definita dalla condizione:

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{v}, \quad (\mathbf{AA}^{-1})\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad (30)$$

dove $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ sono generici elementi rispettivamente del dominio e del codominio di $\mathbf{A}$. Se la trasformazione inversa esiste essa è unica e risulta essere lineare:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) &= \mathbf{A}^{-1}(\alpha\mathbf{AA}^{-1}\mathbf{u} + \beta\mathbf{AA}^{-1}\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}(\alpha\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} + \beta\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} + \beta\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}. \end{aligned}$$

La condizione (30) definisce allora la *trasformazione lineare inversa* $\mathbf{A}^{-1}$ di una data trasformazione lineare $\mathbf{A}$.

Se le trasformazioni lineari $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono invertibili e se il loro prodotto è definito allora è invertibile anche il prodotto $\mathbf{AB}$ e risulta:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \quad (31)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB})\mathbf{v} &= \mathbf{B}^{-1}\{(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B}\mathbf{v}\} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{v} = \mathbf{v}, \\ (\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{u} &= \mathbf{A}\{(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\} = (\mathbf{AA}^{-1})\mathbf{u} = \mathbf{u}, \end{aligned}$$

dove $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ sono generici elementi rispettivamente del dominio di $\mathbf{B}$ e del codominio di $\mathbf{A}$.

3.2.5 Prodotti tensoriali

Nell'ambito dell'algebra tensoriale un ruolo fondamentale è giocato dal *prodotto tensoriale* di due "vettori", prodotto che genera un tensore doppio. Ciascuno dei due "vettori" può essere preso o dallo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ di riferimento oppure dal suo spazio duale $\mathcal{V}^*$, cioè può essere un vettore oppure un covettore. Esistono quindi quattro tipi di prodotto tensoriale, ognuno dei quali genera un tipo diverso di tensore doppio. Per definire il prodotto tensoriale, si tenga conto che un vettore $\mathbf{a}$ agisce su un covettore $\mathbf{v}^*$ fornendo il numero reale $\mathbf{a}\mathbf{v}^*$, mentre un covettore $\mathbf{a}^*$ agisce su un vettore $\mathbf{v}$ fornendo il numero reale $\mathbf{a}^*\mathbf{v}$. I due "vettori" che intervengono nel prodotto tensoriale si possono quindi fare agire su "vettori" duali generando così due numeri reali che possono essere moltiplicati tra loro. Poiché l'operazione risulta essere bilineare si ottiene di conseguenza una forma bilineare che rappresenta un tensore doppio. Nella tabella 2 sono riportati, uno per ogni riga, i quattro tipi di prodotto tensoriale. Ciascuno di tali prodotti è definito sia come forma bilineare che come trasformazione lineare, che naturalmente si corrispondono nell'isomorfismo canonico che riguarda il tipo di tensore.

primo vettore	secondo vettore	tipo di tensore	forma bilineare	trasformazione lineare
$\mathbf{a} \in \mathcal{V}$	$\mathbf{b}^* \in \mathcal{V}^*$	$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^* \in \text{Lin}$	$\mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) \mapsto (\mathbf{a}\mathbf{u}^*)(\mathbf{b}^*\mathbf{v})$	$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ $\mathbf{v} \mapsto (\mathbf{b}^*\mathbf{v})\mathbf{a}$
$\mathbf{a}^* \in \mathcal{V}^*$	$\mathbf{b}^* \in \mathcal{V}^*$	$\mathbf{a}^* \otimes \mathbf{b}^* \in \text{Blin}$	$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\mathbf{a}^*\mathbf{u})(\mathbf{b}^*\mathbf{v})$	$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ $\mathbf{v} \mapsto (\mathbf{b}^*\mathbf{v})\mathbf{a}^*$
$\mathbf{a}^* \in \mathcal{V}^*$	$\mathbf{b} \in \mathcal{V}$	$\mathbf{a}^* \otimes \mathbf{b} \in \text{Lin}^*$	$\mathcal{V} \times \mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$ $(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*) \mapsto (\mathbf{a}^*\mathbf{u})(\mathbf{b}\mathbf{v}^*)$	$\mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}^*$ $\mathbf{v}^* \mapsto (\mathbf{b}\mathbf{v}^*)\mathbf{a}^*$
$\mathbf{a} \in \mathcal{V}$	$\mathbf{b} \in \mathcal{V}$	$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \in \text{Blin}^*$	$\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$ $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) \mapsto (\mathbf{a}\mathbf{u}^*)(\mathbf{b}\mathbf{v}^*)$	$\mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}$ $\mathbf{v}^* \mapsto (\mathbf{b}\mathbf{v}^*)\mathbf{a}$
$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad \forall \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^*$				

Tabella 2: Prodotti tensoriali

3.2.6 Forme bilineari trasposte

Una forma bilineare $\mathbf{a}$ agisce su coppie di elementi generando un valore scalare. Si modifichi l'ordine della coppia, cioè se ne traspongano gli elementi, e alla coppia così ottenuta si faccia corrispondere lo stesso valore generato da $\mathbf{a}$ sulla coppia originale. Si ottiene in tal modo una nuova forma bilineare $\mathbf{a}^T$ che viene detta *forma trasposta* di $\mathbf{a}$. Nella tabella 3 sono riportati per ogni tipo di tensore doppio, uno per ogni riga, lo spazio a cui appartiene

forma bilineare		forma bilineare trasposta		
Spazio	$\mathbf{a}$	Spazio	$\mathbf{a}^T$	Definizione
Lin	$\mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$	Lin*	$\mathcal{V} \times \mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathbf{a}^T(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*) = \mathbf{a}(\mathbf{v}^*, \mathbf{u})$
Blin	$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$	Blin	$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathbf{a}^T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
Lin*	$\mathcal{V} \times \mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$	Lin	$\mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathbf{a}^T(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) = \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{u}^*)$
Blin*	$\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$	Blin*	$\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathbf{a}^T(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) = \mathbf{a}(\mathbf{v}^*, \mathbf{u}^*)$
$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad \forall \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^*$				

Tabella 3: Forme bilineari trasposte

la forma bilineare trasposta e la sua definizione. Analogamente, nella tabella 4 sono riportati ancora per ogni tipo di tensore doppio, uno per ogni riga, le corrispondenti trasformazioni lineari trasposte, via isomorfismi canonici.

Tutte le volte che il prodotto $\mathbf{AB}$ di due trasformazioni lineari $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ è definito vale la

trasformazione lineare		trasformazione lineare trasposta		
Spazio	$\mathbf{A}$	Spazio	$\mathbf{A}^T$	Definizione
Lin	$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$	Lin*	$\mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}^*$	$\mathbf{u}(\mathbf{A}^T \mathbf{v}^*) = \mathbf{v}^*(\mathbf{A}\mathbf{u})$
Blin	$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$	Blin	$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$	$\mathbf{u}(\mathbf{A}^T \mathbf{v}) = \mathbf{v}(\mathbf{A}\mathbf{u})$
Lin*	$\mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}^*$	Lin	$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$	$\mathbf{u}^*(\mathbf{A}^T \mathbf{v}) = \mathbf{v}(\mathbf{A}\mathbf{u}^*)$
Blin*	$\mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}$	Blin*	$\mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}$	$\mathbf{u}^*(\mathbf{A}^T \mathbf{v}^*) = \mathbf{v}^*(\mathbf{A}\mathbf{u}^*)$
$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad \forall \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^*$				

Tabella 4: Trasformazioni lineari trasposte

relazione:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (32)$$

Mostriamo che la (32) vale, per es. nel caso in cui $\mathbf{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ e $\mathbf{B} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ e quindi $\mathbf{AB} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ e $(\mathbf{AB})^T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}((\mathbf{AB})^T \mathbf{v}) &= \mathbf{v}((\mathbf{AB})\mathbf{u}) = \mathbf{v}(\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{u})) \\ &= (\mathbf{B}\mathbf{u})(\mathbf{A}^T \mathbf{v}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{v})(\mathbf{B}\mathbf{u}) = \mathbf{u}(\mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{v})) = \mathbf{u}((\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T) \mathbf{v}). \end{aligned}$$

3.2.7 Tensore metrico

Una forma bilineare $\mathbf{a}$ su $\mathcal{V}$ è detta *simmetrica* e *definita positiva* se soddisfa rispettivamente le condizioni:

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad (\text{simmetria}), \quad (33a)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (\text{definitezza positiva}), \quad (33b)$$

per ogni vettore $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Un prodotto scalare nello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ definisce una forma bilineare $\mathbf{g}$ su $\mathcal{V}$ simmetrica e definita positiva detta *tensore metrico*:

$$\mathbf{g} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (34)$$

È anche vero l'inverso, ovvero sia ogni forma bilineare $\mathbf{a}$ su $\mathcal{V}$ simmetrica e definita positiva definisce un prodotto scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ nello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ tale che:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (35)$$

e soddisfacente le condizioni (4) richieste ad un prodotto scalare. Il nome di tensore metrico dipende dal fatto che la forma bilineare $\mathbf{g}$ definisce la *forma quadratica* che ad ogni vettore associa il quadrato del suo modulo:

$$\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \mapsto |\mathbf{v}|^2 = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}). \quad (36)$$

Si è già visto che il tensore metrico, ovvero sia il prodotto scalare, definisce un isomorfismo tra vettori e covettori (cfr. il §2.7, relazione (15)):

$$\mathbf{G} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^* \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}^* = \mathbf{G}\mathbf{v}. \quad (37)$$

Poiché:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^* = \mathbf{u}(\mathbf{G}\mathbf{v}), \quad (38)$$

dalla seconda riga della tabella tabella 1 si deduce che la forma bilineare $\mathbf{g}$ e la trasformazione lineare $\mathbf{G}$ si corrispondono e rappresentano quindi lo stesso tensore doppio.

Come detto, la trasformazione $\mathbf{G}$ è un isomorfismo e può quindi essere invertita:

$$\mathbf{G}^{-1} : \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V} \quad \mathbf{v}^* \mapsto \mathbf{v} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{v}^*. \quad (39)$$

Si noti che $\mathbf{G} \in \text{Blin}$ mentre $\mathbf{G}^{-1} \in \text{Blin}^*$, cioè il tensore metrico e il suo inverso sono tensori doppi di tipo diverso. Inoltre il tensore metrico è *simmetrico*, cioè coincide con il tensore metrico trasposto:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^T. \quad (40)$$

Infatti deve risultare:

$$\mathbf{u}(\mathbf{G}^T \mathbf{v}) = \mathbf{v}(\mathbf{G}\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}(\mathbf{G}\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

e quindi:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{v} = \mathbf{G} \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

da cui la (40) come volevasi dimostrare.

Si noti ora che moltiplicando in modo opportuno un tensore doppio $\mathbf{A} \in \text{Lin}$ per il tensore metrico $\mathbf{G} \in \text{Blin}$ e per il suo inverso $\mathbf{G}^{-1} \in \text{Blin}^*$ è possibile generare tensori doppi di ogni tipo. Non solo, ma in tale modo vengono ad istituirsi degli isomorfismi tra Lin e gli altri tre spazi di tensori doppi, come riportato nella tabella 5. Ne consegue che la struttura

tipo	spazio	trasformazione lineare	isomorfismo
trasformazione lineare su $\mathcal{V}$	Lin	$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$	$\text{Lin} \rightarrow \text{Lin}, \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}$
forma bilineare su $\mathcal{V}$	Blin	$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$	$\text{Lin} \rightarrow \text{Blin}, \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbf{GA}$
trasformazione lineare su $\mathcal{V}^*$	Lin*	$\mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}^*$	$\text{Lin} \rightarrow \text{Lin}^*, \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbf{GAG}^{-1}$
forma bilineare su $\mathcal{V}^*$	Blin*	$\mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}$	$\text{Lin} \rightarrow \text{Blin}^*, \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbf{AG}^{-1}$

Tabella 5: Isomorfismi indotti dal tensore metrico

aggiuntiva dovuta al prodotto scalare permette di operare con i tensori doppi utilizzando le sole trasformazioni lineari sullo spazio vettoriale $\mathcal{V}$, ovvero sia gli elementi di Lin. Si noti comunque il ruolo particolare che riveste in questo discorso il tensore metrico, tensore doppio che appartiene a Blin e non a Lin e indispensabile per attivare gli isomorfismi che permettono di operare con i soli elementi di Lin.

3.3 Operazioni tensoriali

Nella meccanica del continuo si fa un ampio uso delle trasformazioni lineari sullo spazio dei vettori $\mathcal{V}$,¹⁴ trasformazioni a cui in tale ambito si riserva, tout court, il nome di *tensori doppi* o *tensori del secondo ordine*, se non, ancora più semplicemente, di *tensori*. Tale terminologia non è in contrasto con la definizione di tensore doppio quale forma bilineare poiché, come visto (cfr. la tabella 1 a pagina 21), le trasformazioni lineari che interessano lo spazio $\mathcal{V}$ e il suo duale $\mathcal{V}^*$ sono isomorfe ai tensori doppi. Inoltre facendo entrare in gioco il prodotto scalare, le trasformazioni lineari su $\mathcal{V}$ sono isomorfe alle restanti trasformazioni lineari (cfr. la tabella 5).

3.3.1 Spazio dei tensori doppi

Un *tensore doppio* $\mathbf{A}$ rappresenterà dunque nel seguito una *trasformazione lineare* che a vettori associa vettori (fig. 22):

$$\mathbf{A}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{v}. \quad (41)$$

Nell'insieme dei tensori doppi è possibile definire, in modo naturale, il *tensore nullo* $\mathbf{0}$, il *tensore opposto* $-\mathbf{A}$ di un dato tensore, la *somma* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ di due tensori e il *prodotto* $\alpha \mathbf{A}$ di un numero reale per un tensore che rendono l'insieme dei tensori doppi uno spazio vettoriale reale (cfr. la (26), a pagina 20):

$$\mathbf{0} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} \text{ è il tensore nullo}, \quad (42a)$$

¹⁴Una trasformazione lineare su uno spazio vettoriale è anche detta *endomorfismo*.

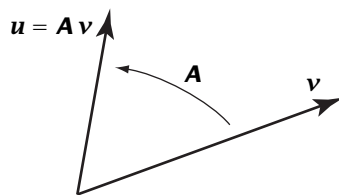


Figura 22: Tensore doppio

$$(-\mathbf{A})\mathbf{v} = -(\mathbf{A}\mathbf{v}), \quad -\mathbf{A} \text{ è il tensore opposto di } \mathbf{A}, \quad (42b)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} \text{ è la somma di due tensori}, \quad (42c)$$

$$(\alpha\mathbf{A})\mathbf{v} = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{v}), \quad \alpha\mathbf{A} \text{ è il prodotto di uno scalare per un tensore}, \quad (42d)$$

per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Come già visto, è consuetudine indicare con Lin lo spazio vettoriale dei tensori doppi (nel senso, come detto, di trasformazioni lineari su $\mathcal{V}$).

3.3.2 Prodotto di due tensori doppi

Poiché il dominio e il codominio di due tensori doppi sono entrambi rappresentati dallo spazio $\mathcal{V}$ dei vettori, ne consegue che è sempre definibile in Lin il *prodotto* $\mathbf{AB}$ di due tensori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ quale loro *funzione composta*:¹⁵

$$(\mathbf{AB})\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (43)$$

Tale prodotto risulta essere un tensore doppio, poiché, in virtù della linearità dei due tensori, anche la trasformazione prodotto risulta essere lineare, come è facilmente verificabile. È immediato inoltre verificare che il prodotto di due tensori doppi è una operazione associativa, in generale non commutativa, distributiva rispetto alla somma di due tensori:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}, \quad (44)$$

associativa rispetto al prodotto per uno scalare:

$$\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}), \quad (45)$$

ed infine tale che:

$$\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}. \quad (46)$$

A titolo di esempio si scrivono nel seguito le catene di uguaglianze che conducono alla dimostrazione della (45):

$$\begin{aligned} (\alpha(\mathbf{AB}))\mathbf{v} &= \alpha((\mathbf{AB})\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{v})) = (\alpha\mathbf{A})(\mathbf{B}\mathbf{v}) = ((\alpha\mathbf{A})\mathbf{B})\mathbf{v}, \\ (\alpha(\mathbf{AB}))\mathbf{v} &= (\mathbf{AB})(\alpha\mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}(\alpha\mathbf{v})) = \mathbf{A}((\alpha\mathbf{B})\mathbf{v}) = (\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}))\mathbf{v}, \end{aligned}$$

per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

Anche la *trasformazione identità* nello spazio $\mathcal{V}$ dei vettori è lineare e definisce quindi il *tensore identità* $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (47)$$

tale che:

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}. \quad (48)$$

¹⁵A volte detta anche *funzione di funzione*.

La *trasformazione inversa* $\mathbf{A}^{-1}$ di un tensore doppio $\mathbf{A}$ è allora definita dalla condizione:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}, \quad (49)$$

e, come già visto, se esiste è unica e risulta essere lineare. La condizione (49) definisce allora il *tensore inverso* $\mathbf{A}^{-1}$ di un dato tensore doppio $\mathbf{A}$. Inoltre, come già visto, se i tensori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono invertibili, allora è invertibile anche il prodotto $\mathbf{AB}$ e risulta:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \quad (50)$$

uguaglianza che nel caso specifico di Lin si può anche dimostrare come segue:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) &= \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}, \\ (\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) &= \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Ne consegue che l'insieme di tutti gli isomorfismi di Lin,¹⁶ con l'operazione prodotto di tensori, costituisce un gruppo moltiplicativo (non commutativo) detto *gruppo lineare generale*, avente il tensore identità $\mathbf{I}$ quale *elemento neutro* del gruppo.

Non risulta invece in generale invertibile la somma di due tensori invertibili, come si può banalmente dedurre dal fatto che l'opposto $-\mathbf{A}$ di un tensore invertibile $\mathbf{A}$ è a sua volta invertibile:

$$(-\mathbf{A})^{-1} = -(\mathbf{A}^{-1}) \quad (51)$$

mentre la loro somma, coincidente con il tensore nullo, non è invertibile.

Si noti che il tensore metrico $\mathbf{G}$, definito dalla (37), corrisponde al tensore identità $\mathbf{I}$ nell'isomorfismo $\text{Lin} \rightarrow \text{Blin}$ riportato nella seconda riga della tabella 5 a pagina 25:

$$(\mathbf{GI})\mathbf{v} = \mathbf{G}(\mathbf{Iv}) = \mathbf{Gv}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (52)$$

Analogamente, anche l'inverso $\mathbf{G}^{-1}$ del tensore metrico, appartenente a Blin^* , proviene dal tensore identità via isomorfismo $\text{Lin} \rightarrow \text{Blin}^*$ (cfr. quarta riga della tabella 5 a pagina 25):

$$(\mathbf{IG}^{-1})\mathbf{v}^* = \mathbf{I}(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{v}^*) = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{v}^*, \quad \forall \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^*. \quad (53)$$

È comunque evidente che il tensore identità, pur corrispondendo al tensore metrico nell'isomorfismo indotto dallo stesso tensore metrico, non lo può "operativamente" sostituire. Infatti moltiplicando gli elementi di Lin per il tensore identità si ottengono gli stessi elementi di Lin, mentre moltiplicandoli per il tensore metrico si ottengono quegli elementi di Blin che gli corrispondono nell'isomorfismo indotto dal tensore metrico.

3.3.3 Prodotto tensoriale di due vettori

È possibile definire il prodotto tensoriale di due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ di $\mathcal{V}$ che generi una trasformazione lineare su $\mathcal{V}$, cioè che appartenga a Lin, utilizzando il fatto che il prodotto di un vettore per un covettore genera un elemento di Lin (cfr. la tabella 2 a pagina 23) e che un vettore può essere trasformato in un covettore dall'azione del tensore metrico $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{Gb}. \quad (54)$$

D'altronde, applicando l'isomorfismo tra Lin e Blin^* indotto dal tensore metrico (cfr. la tabella 5 a pagina 25) si ha:

$$\left\{ \left(\frac{\text{Lin}}{\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}} \right) \mathbf{G}^{-1} \right\} \mathbf{v}^* = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{Gb})\mathbf{v} = (\mathbf{b}^*\mathbf{v})\mathbf{a} = (\mathbf{bv}^*)\mathbf{a} = \left(\frac{\text{Blin}^*}{\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}} \right) \mathbf{v}^*,$$

¹⁶Una trasformazione lineare su uno spazio vettoriale (un endomorfismo) che sia isomorfa viene anche detta *automorfismo*.

e ne risulta che il prodotto tensoriale $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \in \text{Blin}^*$ corrisponde, nell'isomorfismo indotto dal tensore metrico, al prodotto tensoriale $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \in \text{Lin}$ definito dalla (54).

Si noti che il prodotto tensoriale $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ definito dalla (54) agisce su un qualunque vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ nel modo seguente:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}. \quad (55)$$

Inoltre il prodotto tensoriale di due vettori è distributivo rispetto alla somma di vettori:

$$\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{c}. \quad (56)$$

Infatti risulta:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{c}))\mathbf{v} &= ((\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} \\ &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{c})\mathbf{v} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{c})\mathbf{v}, \end{aligned}$$

per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

Il prodotto tensoriale può essere utilizzato per definire l'operazione $\mathbf{P}$ di *proiezione* in una direzione orientata individuata da un versore $\mathbf{e}$ (fig. 23):

$$\mathbf{P} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}. \quad (57)$$

Si noti che la definizione (57) soddisfa la relazione $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$ a volte utilizzata per caratterizzare

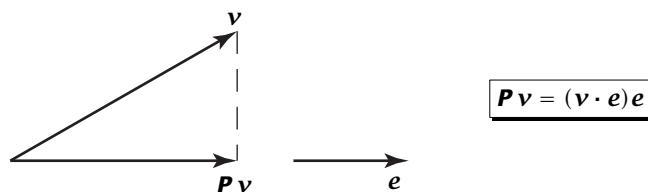


Figura 23: Operazione di proiezione

le proiezioni:

$$(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e})(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e})\mathbf{v} = (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e})[(\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}] = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\mathbf{e} = (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e})\mathbf{v}.$$

Se un tensore doppio è scomponibile nel prodotto tensoriale di due vettori viene detto *diade*. L'insieme delle diadi non individua un sottospazio vettoriale di Lin poiché in generale la somma di due diadi non è una diade. Infatti una diade $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ proietta un qualunque vettore $\mathbf{v}$ in una direzione fissa (quella di $\mathbf{a}$), mentre la somma di due diadi $\mathbf{a}' \otimes \mathbf{b}' + \mathbf{a}'' \otimes \mathbf{b}''$ trasforma un qualunque vettore $\mathbf{v}$ in una combinazione lineare di due vettori ($\mathbf{a}'$ e $\mathbf{a}''$) e quindi in generale porta vettori diversi in direzioni diverse.

3.4 Tensore trasposto

3.4.1 Forma bilineare associata ad un tensore doppio

Ad ogni tensore doppio $\mathbf{A}$, via tensore metrico $\mathbf{G}$, resta associata la forma bilineare su $\mathcal{V}$ definita dal prodotto $\mathbf{GA}$ (cfr. la tabella 5 a pagina 25). Tale forma bilineare agisce su una coppia di vettori come mostrato nella relazione seguente:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{GA}\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v}), \quad (58)$$

dove il punto indica il prodotto scalare di due vettori. Definire una forma bilineare su $\mathcal{V}$ significa dunque definire un tensore doppio (sempre nel senso di elemento di Lin) collegato alla forma stessa dalla relazione (58).

3.4.2 Definizione di tensore trasposto

Il *trasposto* o *aggiunto* $\mathbf{A}^T \in \text{Lin}$ di un tensore doppio $\mathbf{A} \in \text{Lin}$ è definito quale forma bilineare trasposta della forma bilineare corrispondente di $\mathbf{A}$. La forma bilineare corrispondente di $\mathbf{A}$ è $\mathbf{GA}$ e la sua trasposta (cfr. la (32) a pagina 24) vale $\mathbf{A}^T \mathbf{G}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{G}$, con $\mathbf{A}^T \in \text{Lin}^*$ e avendo sfruttato la simmetria (40) del tensore metrico. Quindi si ha (si veda fig. 24):

$$\frac{\text{Lin}}{\mathbf{A}^T} = \mathbf{G}^{-1} \frac{\text{Lin}^*}{\mathbf{A}^T} \mathbf{G}. \quad (59)$$

Tenendo poi conto della relazione (58) il tensore trasposto $\mathbf{A}^T \in \text{Lin}$ resta anche definito

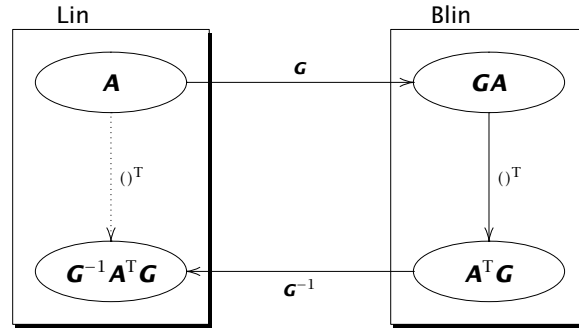


Figura 24: Tensore trasposto

dalla condizione:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{v}) = (\mathbf{A} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (60)$$

dove il punto indica ancora il prodotto scalare di due vettori. Il trasposto di un tensore permette dunque di spostare l'operazione di applicazione di un tensore ad un vettore da un membro all'altro di un prodotto scalare. Ribadiamo che la trasposizione in Lin è stata definita, via tensore metrico, con riferimento alla associata forma bilineare su $\mathcal{V}$ e da tale definizione trae il suo significato. Naturalmente si sarebbe potuto far riferimento ad una delle altre forme bilineari, per es. quella sullo spazio duale, ma si sarebbe ottenuta la stessa operazione di trasposizione in Lin.

Riportiamo alcune semplici proprietà dell'operazione di trasposizione dei tensori doppi:

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}, \quad (61a)$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T, \quad (61b)$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}. \quad (61c)$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}, \quad (61d)$$

per ogni tensore doppio $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ e per ogni vettore $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Si definisce con $\mathbf{A}^{-T}$ uno qualunque dei due membri dell'uguaglianza (61c):

$$\mathbf{A}^{-T} = (\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}. \quad (62)$$

3.4.3 Tensori doppi simmetrici, emisimmetrici e definiti positivi

Un tensore $\mathbf{A}$ è detto *simmetrico* se soddisfa l'uguaglianza $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ ed è invece detto *emisimmetrico* od *antisimmetrico* se risulta $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$. L'insieme dei tensori simmetrici e quello dei tensori emisimmetrici costituiscono due sottospazi di Lin che saranno indicati nel

seguito con Sym e Skw rispettivamente. Un qualunque tensore doppio $\mathbf{A}$ si può scomporre in modo unico nella somma di un tensore simmetrico $\mathbf{S}_A$ e di uno emisimmetrico $\mathbf{W}_A$, con

$$\mathbf{S}_A = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad (63a)$$

$$\mathbf{W}_A = \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T). \quad (63b)$$

In altre parole, lo spazio vettoriale Lin risulta essere *somma diretta* dei due sottospazi disgiunti Sym e Skw, proprietà indicata formalmente nel modo seguente:

$$\text{Lin} = \text{Sym} \oplus \text{Skw}. \quad (64)$$

Un tensore doppio $\mathbf{A}$ è detto *definito positivo* se la forma quadratica associata alla forma bilineare corrispondente di $\mathbf{A}$ è positiva. Tenendo conto della (58) $\mathbf{A}$ deve quindi soddisfare la condizione:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} > 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad \mathbf{v} \neq 0. \quad (65)$$

L'insieme dei tensori simmetrici e definiti positivi rappresenta un sottospazio di Sym che verrà nel seguito indicato con Psym.

3.5 Trasformazioni ortogonali

Una trasformazione lineare $\mathbf{Q}$ che conserva il prodotto scalare di vettori viene detta *trasformazione ortogonale*. Conservare il prodotto scalare significa conservare i moduli dei vettori e gli angoli che questi formano tra loro. Se $\mathbf{Q}$ è una trasformazione ortogonale deve quindi soddisfare la condizione:

$$\mathbf{Q} \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (66)$$

che, per via della (60), è equivalente a scrivere:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}. \quad (67)$$

In definitiva, l'inversa di una trasformazione ortogonale coincide con la sua trasposta:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T. \quad (68)$$

L'insieme delle trasformazioni ortogonali, usualmente indicato con Orth, non costituisce un sottospazio di Lin poiché la somma di due trasformazioni ortogonali non è in generale una trasformazione ortogonale. In ogni caso, Orth rappresenta un gruppo moltiplicativo, detto *gruppo ortogonale*. Infatti, componendo due trasformazioni ortogonali $\mathbf{Q}'$ e $\mathbf{Q}''$ si ottiene ancora una trasformazione ortogonale:

$$\mathbf{Q}' \mathbf{Q}'' \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}' \mathbf{Q}'' \mathbf{v} = \mathbf{Q}'' \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}'' \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Inoltre, l'inversa di una trasformazione ortogonale è ortogonale ed esiste sempre, coincidendo con la sua trasposta.

In generale, le trasformazioni ortogonali non conservano l'ordine dello spazio. In altre parole, una trasformazione ortogonale può trasformare una terna destra di vettori in una terna sinistra e viceversa, pur conservando lunghezze ed angoli (si pensi ad una *riflessione*). Se l'ordine dello spazio è preservato, la trasformazione ortogonale rappresenta una rotazione rigida e viene pertanto detta *rotazione*. Tale proprietà si può compendiare nell'ulteriore condizione:

$$\mathbf{R} \mathbf{u} \times \mathbf{R} \mathbf{v} = \mathbf{R} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (69)$$

che una rotazione $\mathbf{R}$ deve soddisfare insieme alla condizione (68). L'insieme delle rotazioni costituisce un sottogruppo moltiplicativo di Orth, indicato nel seguito con Orth^+ .

4 Rappresentazione in componenti

4.1 Rappresentazione dei vettori

4.1.1 Componenti controvarianti di un vettore

Data una generica base di tre vettori $\mathbf{g}_j$ ($j=x, y, z$),¹⁷ un qualunque vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ può essere rappresentato nella forma:

$$\mathbf{v} = \sum_j v^j \mathbf{g}_j, \quad (70)$$

dove è sottintesa la variazione su x, y, z dell'indice j di sommatoria. Relativamente ad una generica base (non ortonormale) è universale la convenzione di scrivere gli indici *controvarianti* come esponenti e quelli *covarianti* come pedici. Un indice covariante indica una quantità covariante, cioè una quantità che varia allo stesso modo di ciò che è preso a confronto e analogamente per una quantità controvariante, che varia inversamente a ciò che è preso a confronto. Poiché le componenti sono associate alla base, è evidente che il termine di confronto è la base stessa. Se la base $\mathbf{g}_j$ viene amplificata per effetto di uno scalare: $\alpha \mathbf{g}_j$, una quantità q covariante viene allora amplificata in modo analogo: αq , mentre una quantità q controvariante ne viene ridotta: $(1/\alpha)q$. È evidente che la base stessa è covariante. Invece le componenti di un vettore sono controvarianti, poiché dalla (70) si ha:

$$\mathbf{v} = \sum_j \frac{v^j}{\alpha} (\alpha \mathbf{g}_j),$$

e quindi le componenti relative alla base $\alpha \mathbf{g}_j$ risultano pari a v^j/α . Da quanto detto consegue che se una sommatoria rappresenta una quantità invariante, cioè indipendente dalla base, allora l'indice di sommatoria deve apparire, a coppie, sia in posizione covariante che controvariante, come per es. nella (70).

4.1.2 Base duale e componenti covarianti

Se $\mathbf{a}^*$ è un generico covettore la sua azione sulla rappresentazione (70) risulta:

$$\mathbf{a}^* \mathbf{v} = \mathbf{a}^* \sum_j (v^j \mathbf{g}_j) = \sum_j v^j (\mathbf{a}^* \mathbf{g}_j), \quad (71)$$

e ne consegue che un covettore è univocamente definito dalla sua azione $\mathbf{a}^* \mathbf{g}_j$ su una qualunque base $\mathbf{g}_j$. La posizione:

$$\mathbf{g}^{*i} \mathbf{g}_j = \delta^i_j, \quad (72)$$

definisce quindi tre covettori controvarianti $\mathbf{g}^{*i}$. Nella (72) δ^i_j rappresenta il delta di Kronecker:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (73)$$

Se ora, dato un generico covettore $\mathbf{a}^*$, si pone:

$$a_i^* = \mathbf{a}^* \mathbf{g}_i, \quad (74)$$

risulta:

$$\mathbf{a}^* = \sum_i a_i^* \mathbf{g}^{*i}, \quad (75)$$

ovverossia i covettori $\mathbf{g}^{*i}$ definiscono una *base controvariante* dello spazio duale $\mathcal{V}^*$ e gli scalari a_i^* forniti dalla (74) sono le *componenti covarianti* di $\mathbf{a}^*$ rispetto a tale base.

¹⁷Nel seguito sarà omessa l'indicazione dell'insieme di variazione degli indici.

La relazione (75) è giustificata dal fatto che risulta:

$$\begin{aligned} \left(\sum_i a_i^* g^{*i} \right) \mathbf{v} &= \left(\sum_i (a^* g_i) g^{*i} \right) \left(\sum_j v^j g_j \right) \\ &= \sum_{i,j} v^j (a^* g_i) g^{*i} g_j = \sum_{i,j} a^* (v^j g_i) \delta^i_j = a^* \left(\sum_j v^j g_j \right) = a^* \mathbf{v}, \end{aligned}$$

per ogni vettore $\mathbf{v}$.

La base duale g^{*j} permette inoltre di calcolare le componenti controvarianti v^j di un generico vettore $\mathbf{v}$:

$$v^j = g^{*j} \mathbf{v}. \quad (76)$$

Infatti si ha:

$$g^{*j} \mathbf{v} = g^{*j} \left(\sum_i v^i g_i \right) = \sum_i v^i (g^{*j} g_i) = \sum_i v^i \delta^i_j = v^j.$$

Naturalmente l'isomorfismo tra vettori e covettori dovuta al tensore metrico, tenendo conto della (72), fa corrispondere alla base duale controvariante g^{*j} di covettori una base duale controvariante g^j di vettori tale che:

$$g^j \cdot g_j = \delta^i_j. \quad (77)$$

Tale base permette di calcolare le componenti controvarianti di un qualunque vettore $\mathbf{v}$ (cfr. la (76)):

$$v^j = g^j \cdot \mathbf{v}, \quad (78)$$

e di definire le sue componenti covarianti:

$$\mathbf{v} = \sum_j v_j g^j. \quad (79)$$

Le componenti covarianti di $\mathbf{v}$ sono poi calcolate per mezzo della base covariante (cfr. la (74)):

$$v_j = \mathbf{v} \cdot g_j. \quad (80)$$

Si noti infine che un vettore $\mathbf{v}$ e il corrispondente covettore $\mathbf{v}^*$ hanno le stesse componenti covarianti rispetto alle basi duali, di vettori e rispettivamente di covettori. Grazie al tensore metrico si può quindi eseguire qualunque calcolo in componenti riguardante i covettori senza fuoriuscire dallo spazio $\mathcal{V}$ dei vettori.

Relativamente alla data base, il *vettore colonna*:

$$\{\mathbf{v}\} = \begin{Bmatrix} v^x \\ v^y \\ v^z \end{Bmatrix} \quad \text{oppure} \quad \{\mathbf{v}\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} \quad (81)$$

delle componenti rispettivamente controvarianti e covarianti di un generico vettore $\mathbf{v}$ fornisce la sua *rappresentazione matriciale* (controvariante oppure covariante).

4.1.3 Basi ortonormali

Sia $Oxyz$ una terna destra cartesiana ortogonale di riferimento dello spazio euclideo $\mathcal{E}$ e siano $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$ ed $\mathbf{i}_z$ i versori degli assi coordinati, ovvero i vettori di modulo unitario le cui direzioni orientate sono individuate dagli stessi assi (fig. 25). I versori $\mathbf{i}_i$ ($i=x,y,z$) costituiscono una *base ortonormale destra* dello spazio vettoriale $\mathcal{V}$, cioè una base soddisfacente le condizioni:¹⁸

$$\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = \delta_{ij}, \quad (82a)$$

¹⁸La (82b) è equivalente a scrivere:

$$\mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_x = \mathbf{0} \quad \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y = \mathbf{i}_z \quad \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_z = -\mathbf{i}_y,$$

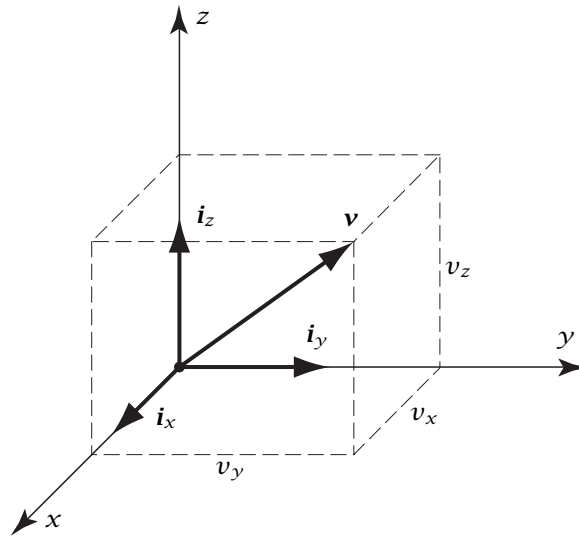


Figura 25: Base ortonormale

$$\mathbf{i}_i \times \mathbf{i}_j = \sum_k \epsilon_{ijk} \mathbf{i}_k, \quad (82b)$$

dove δ_{ij} rappresenta il *delta di Kronecker* mentre ϵ_{ijk} rappresenta il *simbolo di permutazione*, detto anche *alternatore* oppure *tensore di Ricci*:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j, k) \text{ è una permutazione pari di } (x, y, z) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ è una permutazione dispari di } (x, y, z) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (83)$$

È immediato constatare che il simbolo di permutazione è invariante per circolazione degli indici, non variando in tal modo il tipo di permutazione:

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki}. \quad (84)$$

Inoltre, tra il simbolo di permutazione e il delta di Kronecker sussiste la seguente importante relazione, detta ϵ - δ *identità*:

$$\sum_i \epsilon_{ijh} \epsilon_{ikl} = \delta_{jk} \delta_{hl} - \delta_{jl} \delta_{hk}. \quad (85)$$

Infatti, sviluppando il primo membro della uguaglianza, si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_i \epsilon_{ijh} \epsilon_{ikl} &= \epsilon_{1jh} \epsilon_{1kl} + \epsilon_{2jh} \epsilon_{2kl} + \epsilon_{3jh} \epsilon_{3kl} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } j = k, \quad h = l, \quad j \neq h \\ -1 & \text{se } j = l, \quad h = k, \quad j \neq h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}_y \times \mathbf{i}_x = -\mathbf{i}_z & \mathbf{i}_y \times \mathbf{i}_y = \mathbf{0} & \mathbf{i}_y \times \mathbf{i}_z = \mathbf{i}_x, \\ \mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_x = \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_y = -\mathbf{i}_x & \mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_z = \mathbf{0}. \end{array}$$

Si noti che la (82b) vale per una base ortonormale destra in uno spazio con orientazione destra. Si ricordi che se si modifica l'orientazione dello spazio, nel nostro caso scegliendo una orientazione sinistra, si modifica anche il verso di quei vettori geometrici che rappresentano dei vettori assiali.

espressione facilmente confrontabile con il secondo membro della (85). Infine, se A è una generica matrice quadrata 3×3 , il simbolo di permutazione permette di scrivere il suo determinante nella forma seguente:

$$\det A = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} A_{ix} A_{jy} A_{kz} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} A_{xi} A_{yj} A_{zk}. \quad (86)$$

Si noti che la relazione (82a) implica che la base duale controvariante coincide con la prescelta base ortonormale covariante. Ne consegue che in tale caso non occorre distinguere tra componenti covarianti e controvarianti. Per tale motivo quando le componenti sono riferite ad una base ortonormale gli indici sono tutti scritti come pedici. Il fatto che le componenti controvarianti e covarianti coincidono significa anche che le componenti (controvarianti) di un vettore coincidono con le componenti (covarianti) del corrispondente covettore.

4.1.4 Rappresentazione delle operazioni vettoriali

Dalla rappresentazione (70) di un vettore discendono le seguenti rappresentazioni delle operazioni vettoriali:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})^i = u^i + v^i, \quad (87a)$$

$$(\alpha \mathbf{v})^i = \alpha(v^i), \quad (87b)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_i u_i v^i = \sum_i u^i v_i. \quad (87c)$$

Per es. la prima parte della rappresentazione (87c) del prodotto scalare può essere dimostrata nel modo seguente:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \left(\sum_i u_i \mathbf{g}^i \right) \cdot \left(\sum_j v^j \mathbf{g}_j \right) = \sum_{ij} u_i v^j (\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j) = \sum_{ij} u_i v^j \delta^i_j = \sum_i u_i v^i.$$

Tenendo conto della rappresentazione matriciale (81) di un vettore, le operazioni vettoriali (87) possono porsi nella seguente forma matriciale:

$$\{\mathbf{u} + \mathbf{v}\} = \{\mathbf{u}\} + \{\mathbf{v}\}, \quad (88a)$$

$$\{\alpha \mathbf{v}\} = \alpha \{\mathbf{v}\}, \quad (88b)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{v}\}, \quad (88c)$$

Nel caso di componenti rispetto ad una base ortonormale le (88) non presentano ambiguità poiché, come detto, le componenti controvarianti e covarianti coincidono. Nel caso invece di una base generica non ortonormale per evitare ambiguità basta considerare che i vari termini di una somma così come i due termini di una uguaglianza non possono che essere in sintonia rispetto alla varianza, mentre i fattori di un prodotto devono bilanciarsi in modo da essere in sintonia, sempre relativamente alla varianza, con gli altri termini dell'equazione in cui compaiono. Per es. nel caso della (88c) il prodotto scalare al primo membro rappresenta un numero reale indipendente dalla base di vettori e quindi neutro rispetto alla varianza. Ne consegue che tale deve essere il secondo membro e che quindi i due vettori colonna $\{\mathbf{u}\}$ e $\{\mathbf{v}\}$ devono contenere l'uno le componenti controvarianti e l'altro quelle covarianti per poter generare un termine privo di varianza.

4.1.5 Rappresentazione ortonormale del prodotto vettoriale, del prodotto misto e del doppio prodotto vettoriale

Per quel che riguarda il prodotto vettoriale, se ne possono dedurre le componenti tenendo conto della distributività (9) del prodotto vettoriale rispetto alla somma di vettori:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\sum_i u^i \mathbf{g}_i \right) \times \left(\sum_j v^j \mathbf{g}_j \right) = \sum_{ij} u^i v^j (\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j). \quad (89)$$

Per utilizzare al nostro fine la (89) occorre conoscere i prodotti vettoriali $\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j$ riguardanti la base. Facendo per il momento riferimento ad una base ortonormale si può allora utilizzare la relazione (82b) ottenendo:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} u_i v_j \mathbf{i}_k, \quad (90)$$

da cui conseguono le seguenti componenti:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_k = \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} u_i v_j, \quad (91)$$

e la rappresentazione matriciale:

$$\{\mathbf{u} \times \mathbf{v}\} = \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix}. \quad (92)$$

Confrontando la (90) con lo sviluppo (86) del determinante di una matrice quadrata 3×3 , se ne deduce che la (90) equivale allo sviluppo di un determinante simbolico:

$$\{\mathbf{u} \times \mathbf{v}\} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}. \quad (93)$$

Dalla rappresentazione (91) del prodotto vettoriale e da quella (87c) del prodotto scalare discende infine la rappresentazione del prodotto misto:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k, \quad (94)$$

equivalente allo sviluppo di un determinante:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}. \quad (95)$$

Per quel che riguarda infine il doppio prodotto vettoriale $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ di tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, si consideri innanzitutto che deve essere ortogonale al prodotto $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ e che quindi deve giacere nel piano di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Le componenti nelle direzioni di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si possono allora ottenere utilizzando la ε - δ identità (85), che permette di scrivere:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}))_k &= \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} u_i (\mathbf{v} \times \mathbf{w})_j = \sum_{ijhl} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{hlj} u_i v_h w_l \\ &= \sum_{ihl} (\delta_{kh} \delta_{il} - \delta_{kl} \delta_{ih}) u_i v_h w_l \\ &= \left(\sum_{il} \delta_{il} u_i w_l \right) v_k - \left(\sum_{ih} \delta_{ih} u_i v_h \right) w_k \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) v_k - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) w_k. \end{aligned}$$

Se ne deduce quindi:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w}. \quad (96)$$

Tenendo conto che il prodotto vettoriale non è commutativo ma soddisfa la (8), dalla (96) si ottiene:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u}, \quad (97)$$

che differisce dalla (96), in accordo col fatto che il prodotto vettoriale non è associativo.

4.2 Rappresentazione dei tensori doppi

Si consideri un generico tensore doppio $\mathbf{A}$. Quale trasformazione lineare su $\mathcal{V}$ trasforma la generica base $\mathbf{g}_j$ nei tre vettori covarianti $\mathbf{A}\mathbf{g}_j$, che a loro volta sono rappresentabili, nella stessa base, attraverso le loro componenti controvarianti (cfr. la (70) a pagina 31):

$$\mathbf{A}\mathbf{g}_j = \sum_i A^i_j \mathbf{g}_i, \quad A^i_j = \mathbf{g}^{*i}(\mathbf{A}\mathbf{g}_j) = \mathbf{g}^i \cdot (\mathbf{A}\mathbf{g}_j). \quad (98)$$

Gli scalari A^i_j , con il primo indice controvariante e il secondo covariante, individuano univocamente, rispetto alla base $\mathbf{g}_i$, il tensore doppio $\mathbf{A}$ poiché individuano univocamente il vettore che corrisponde all'azione di $\mathbf{A}$ su un qualunque vettore $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A} \left(\sum_j v^j \mathbf{g}_j \right) = \sum_j v^j (\mathbf{A}\mathbf{g}_j) = \sum_{ij} A^i_j v^j \mathbf{g}_i. \quad (99)$$

È pertanto lecito definire gli scalari A^i_j quali *componenti* del tensore doppio $\mathbf{A}$ rispetto alla base covariante $\mathbf{g}_i$. Tali componenti sono *miste*, poiché il primo indice è controvariante mentre il secondo è covariante. Inoltre tali componenti delle trasformazioni lineari su $\mathcal{V}$ (gli elementi di Lin) non dipendono dal prodotto scalare. Infatti nella (98) il prodotto scalare è inessenziale, intervenendo solo se si desidera esprimere l'effetto della base duale di covettori $\mathbf{g}^{*i}$ per il tramite dei corrispondenti vettori $\mathbf{g}^i$.

4.2.1 Rappresentazione delle operazioni tensoriali

Dalla (99) conseguono le componenti controvarianti del vettore $\mathbf{A}\mathbf{v}$ che consegue dall'applicazione di un tensore ad un vettore:

$$(\mathbf{A}\mathbf{v})^i = \sum_{ij} A^i_j v^j. \quad (100)$$

In modo analogo si ottengono le componenti delle altre operazioni tensoriali:

$$(\mathbf{0})^i_j = 0, \quad (\text{tensore nullo}), \quad (101a)$$

$$(\mathbf{I})^i_j = \delta^i_j, \quad (\text{tensore identità}), \quad (101b)$$

$$(-\mathbf{A})^i_j = - (A^i_j), \quad (\text{opposto}), \quad (101c)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^i_j = A^i_j + B^i_j, \quad (\text{somma}), \quad (101d)$$

$$(\alpha\mathbf{A})^i_j = \alpha A^i_j, \quad (\text{prodotto per uno scalare}), \quad (101e)$$

$$(\mathbf{AB})^i_j = \sum_k A^i_k B^k_j, \quad (\text{prodotto}), \quad (101f)$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^i_j = a^i b_j, \quad (\text{prodotto tensoriale}), \quad (101g)$$

A titolo di esempio, la rappresentazione (101f) del prodotto di due tensori può essere dimostrata nel modo seguente:

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})^i_j &= \mathbf{g}^i \cdot (\mathbf{AB}\mathbf{g}_j) \\ &= \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{A} \left(\sum_k B^k_j \mathbf{g}_k \right) = \sum_k B^k_j \left(\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{A}\mathbf{g}_k \right) = \sum_k A^i_k B^k_j. \end{aligned}$$

4.2.2 Base di tensori doppi

Mostriamo ora che le componenti (98) di un tensore doppio sono anche le sue componenti valutate relativamente ad una base di Lin composta di nove diadi, costruite a partire dalla base covariante di vettori e dalla sua base duale controvariante.

Dimostrazione. Infatti dalla (99) e dalle formule (78) e (55), che forniscono rispettivamente le componenti controvarianti di un vettore e la definizione di prodotto tensoriale, si ottiene:

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \sum_{ij} A^i_j (\mathbf{g}^j \cdot \mathbf{v}) \mathbf{g}_i = \sum_{ij} A^i_j (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j) \mathbf{v},$$

e poiché questa deve valere per ogni vettore $\mathbf{v}$ ne consegue infine:

$$\mathbf{A} = \sum_{ij} A^i_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (102)$$

Inoltre, le nove diadi $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j$ sono linearmente indipendenti. Si supponga infatti che sia:

$$\sum_{ij} \alpha^i_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \mathbf{0},$$

per dati coefficienti α^i_j . Poiché risulta:

$$\mathbf{g}^h \cdot \left(\sum_{ij} \alpha^i_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \right) \mathbf{g}_k = \sum_{ij} \alpha^i_j (\mathbf{g}^h \cdot \mathbf{g}_i) (\mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}_k) = \sum_{ij} \alpha^i_j \delta^h_i \delta^j_k = \alpha^h_k,$$

i coefficienti α^i_j devono essere tutti nulli e quindi le diadi sono linearmente indipendenti. Le nove diadi $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j$ costituiscono quindi una base di Lin, come volevasi dimostrare. ■

Si ricordi (relazione (54) a pagina 27) che il prodotto tensoriale del vettore $\mathbf{g}_i$ per il vettore $\mathbf{g}^j$, corrispondente del covettore $\mathbf{g}^{*j}$, rappresenta il prodotto tensoriale $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^{*j}$ che in base alla tabella 2 a pagina 23 genera un elemento di Lin senza bisogno dell'intervento del tensore metrico. La rappresentazione (102) del tensore doppio $\mathbf{A}$ può pertanto scriversi in modo indipendente dal tensore metrico:

$$\mathbf{A} = \sum_{ij} A^i_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^{*j}. \quad (103)$$

4.2.3 Rappresentazione matriciale delle operazioni tensoriali

Le componenti del tensore $\mathbf{A}$ possono essere raccolte in una matrice $[\mathbf{A}]$ quadrata di dimensione 3×3 , matrice che ne costituisce la sua *rappresentazione matriciale*:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} A^x_x & A^x_y & A^x_z \\ A^y_x & A^y_y & A^y_z \\ A^z_x & A^z_y & A^z_z \end{bmatrix}. \quad (104)$$

La relazione (100) e le operazioni tensoriali (101) possono allora essere espresse in termini matriciali nel modo seguente:

$$\{\mathbf{A} \mathbf{v}\} = [\mathbf{A}] \{\mathbf{v}\}, \quad (105a)$$

$$[-\mathbf{A}] = -[\mathbf{A}], \quad (105b)$$

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}] = [\mathbf{A}] + [\mathbf{B}], \quad (105c)$$

$$[\alpha \mathbf{A}] = \alpha [\mathbf{A}], \quad (105d)$$

$$[\mathbf{AB}] = [\mathbf{A}] [\mathbf{B}], \quad (105e)$$

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}] = \{\mathbf{a}\} \{\mathbf{b}\}^T. \quad (105f)$$

Per quel che riguarda il tensore nullo ed il tensore identità, questi risultano rappresentati rispettivamente dalla matrice nulla e dalla matrice identità:

$$[\mathbf{0}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (106)$$

Proprietà fondamentale della rappresentazione matriciale dei tensori doppi Mostriamo ora che la corrispondenza $\mathbf{A} \mapsto [\mathbf{A}]$, che a un dato tensore doppio associa la sua rappresentazione in un dato sistema di riferimento, è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei tensori doppi e quello delle matrici quadrate 3×3 .

Dimostrazione. Infatti, sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di componenti A^i_j . Per via della rappresentazione (102), il tensore doppio $\mathbf{A}$ così definito:

$$\mathbf{A} = \sum_{ij} A^i_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j,$$

ha la matrice $\mathbf{A}$ quale sua rappresentazione e la corrispondenza è quindi suriettiva.

Se poi $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono due tensori doppi tali che $[\mathbf{A}] = [\mathbf{B}]$ allora, sempre a seguito della (102), si ha:

$$\mathbf{A} = \sum_{ij} A^i_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \sum_{ij} B^i_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \mathbf{B},$$

e la corrispondenza è quindi iniettiva. ■

Rappresentazione dell'inverso di un tensore doppio Mostriamo infine che il tensore $\mathbf{A}^{-1}$, inverso di un tensore doppio $\mathbf{A}$, esiste se e solo se esiste la matrice inversa $[\mathbf{A}]^{-1}$ della rappresentazione $[\mathbf{A}]$ di $\mathbf{A}$ e risulta:

$$[\mathbf{A}^{-1}] = [\mathbf{A}]^{-1}. \quad (107)$$

Dimostrazione. Infatti, se esiste $\mathbf{A}^{-1}$ la rappresentazione (105e) del prodotto di due tensori permette di scrivere:

$$[\mathbf{I}] = [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}] = [\mathbf{A}^{-1}][\mathbf{A}] \quad \text{e} \quad [\mathbf{I}] = [\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}] = [\mathbf{A}][\mathbf{A}^{-1}],$$

da cui si deduce l'esistenza di $[\mathbf{A}]^{-1}$ e l'uguaglianza (107).

Se invece esiste la matrice $[\mathbf{A}]^{-1}$ inversa della rappresentazione $[\mathbf{A}]$ di $\mathbf{A}$, per la biunivocità della corrispondenza tra matrici quadrate e tensori doppi, esiste un tensore $\mathbf{B}$ tale che $[\mathbf{B}] = [\mathbf{A}]^{-1}$. Risulta quindi:

$$[\mathbf{I}] = [\mathbf{B}][\mathbf{A}] = [\mathbf{BA}] \quad \text{e} \quad [\mathbf{I}] = [\mathbf{A}][\mathbf{B}] = [\mathbf{AB}].$$

Da queste due ultime relazioni, sempre per la biunivocità della corrispondenza tra tensori e matrici quadrate, si trae $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$, relazione equivalente alla esistenza dell'inversa $\mathbf{A}^{-1}$ ed alla uguaglianza $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$, da cui discende immediatamente l'uguaglianza (107). ■

4.3 Rappresentazione delle trasformazioni lineari sullo spazio duale

Senza entrare troppo in dettaglio, quanto detto per le trasformazioni lineari su $\mathcal{V}$ (gli elementi di Lin) si può dire, con le giuste corrispondenze, per le trasformazioni lineari sullo spazio $\mathcal{V}^*$ dei covettori (gli elementi di Lin^*). Qui interessa però principalmente la rappresentazione in Lin di tali trasformazioni e delle loro componenti.

Si ricordi che una trasformazione lineare $\mathbf{A}^*$ su $\mathcal{V}^*$ trasforma covettori in covettori. Ne consegue che trasforma i covettori della base duale $\mathbf{g}^{*j}$ in tre covettori che possono essere rappresentati tramite le loro componenti covarianti. Queste componenti sono rappresentate in Lin dalle seguenti componenti del tensore doppio $\mathbf{A}$ corrispondente di $\mathbf{A}^*$:

$$\mathbf{A} \mathbf{g}^j = \sum_i A_i^j \mathbf{g}^i, \quad A_i^j = \mathbf{g}_i \cdot (\mathbf{A} \mathbf{g}^j). \quad (108)$$

Anche le componenti A_i^j , al pari delle (98), sono *miste*, in tal caso con primo indice covariante e secondo controvariante. Il prodotto scalare che interviene nella (108) è invece ineliminabile

poiché $\mathbf{A}$ non genera un covettore, ma il corrispondente vettore, per cui l'azione del covettore deve necessariamente essere espressa dal vettore per il tramite del prodotto scalare.

Anche in questo caso esiste una base di Lin composta di nove diadi, ancora costruite a partire dalla base covariante di vettori e dalla sua base duale controvariante, tale che le componenti di un tensore doppio rispetto a tale base coincidano con le componenti miste (108):

$$\mathbf{A} = \sum_{ij} A_i^j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j. \quad (109)$$

Si tenga ora conto del fatto che il prodotto tensoriale del vettore $\mathbf{g}^i$, corrispondente del covettore $\mathbf{g}^{*i}$, per il vettore $\mathbf{g}_j$ rappresenta in Lin il prodotto tensoriale $\mathbf{g}^{*i} \otimes \mathbf{g}_j$ che in base alla tabella 2 a pagina 23 genera un elemento di Lin* senza bisogno dell'intervento del tensore metrico. La rappresentazione della trasformazione lineare $\mathbf{A}^* \in \text{Lin}^*$, corrispondente del tensore doppio $\mathbf{A} \in \text{Lin}$, può pertanto scriversi in modo indipendente dal tensore metrico utilizzando le componenti miste (108) di $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^* = \sum_{ij} A_i^j \mathbf{g}^{*i} \otimes \mathbf{g}_j. \quad (110)$$

Si noti che è possibile calcolare le componenti $(A^*)_i^j$ di $\mathbf{A}^*$ senza utilizzare il tensore metrico. A tale scopo basta fare riferimento direttamente alla trasformazione lineare $\mathbf{A}^*$ in luogo della sua rappresentazione $\mathbf{A}$ in Lin:

$$(A^*)_i^j = A_i^j = \mathbf{g}_i \left(\mathbf{A}^* \mathbf{g}^{*j} \right). \quad (111)$$

4.4 Rappresentazione delle forme bilineari

Si consideri ora una forma bilineare $\mathbf{a}$ su $\mathcal{V}$ (un elemento di Blin) e la si rappresenti, via tensore metrico, con un tensore doppio $\mathbf{A}$. Si ricordi che il tensore doppio riproduce l'azione della corrispondente forma bilineare agendo su una coppia di vettori $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ nel modo seguente (relazione (58) a pagina 28):

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v}. \quad (112)$$

La forma bilineare rappresentata da $\mathbf{A}$ trasforma le nove coppie $(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)$ di vettori della base covariante nei nove scalari seguenti:

$$A_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{A} \mathbf{g}_j, \quad (113)$$

aventi entrambi gli indici covarianti. Inoltre gli scalari A_{ij} individuano univocamente la forma bilineare, poiché ne individuano univocamente l'azione su una qualunque coppia di vettori $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} = \left(\sum_i u^i \mathbf{g}_i \right) \cdot \mathbf{A} \left(\sum_j v^j \mathbf{g}_j \right) = \sum_{ij} u^i v^j (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{A} \mathbf{g}_j) = \sum_{ij} A_{ij} u^i v^j. \quad (114)$$

È pertanto lecito definire gli scalari A_{ij} quali *componenti* sia della forma bilineare rappresentata da $\mathbf{A}$ che del tensore $\mathbf{A}$ stesso. Tali componenti sono *covarianti*, poiché entrambi gli indici sono covarianti. Si noti comunque che gli scalari A_{ij} possono essere riferiti al tensore doppio $\mathbf{A}$ solo grazie all'intervento del tensore metrico. D'altronde nella definizione (113) intervengono due vettori e quindi il prodotto scalare è ineliminabile.

Nel seguito si dimostra che le componenti covarianti (113) di un tensore doppio sono anche le sue componenti valutate relativamente ad una base di Lin composta di nove diadi, costruite a partire dalla base duale controvariante.

Dimostrazione. Infatti dalla (114) e dalle formule (78) e (55), che forniscono rispettivamente le componenti controvarianti di un vettore e la definizione di prodotto tensoriale, si ottiene:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} = \sum_{ij} A_{ij} u^i v^j = \sum_{ij} A_{ij} (\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{g}^j \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \left\{ \sum_{ij} A_{ij} (\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j) \right\} \mathbf{v}.$$

e poiché questa deve valere per ogni vettore $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ ne consegue infine:

$$\mathbf{A} = \sum_{ij} A_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (115)$$

Inoltre si può verificare facilmente che le nove diadi $\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$, analogamente a quelle $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$ e $\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j$ già considerate nel caso delle trasformazioni lineari, sono linearmente indipendenti. Le nove diadi $\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$ costituiscono quindi una base di Lin, come volevasi dimostrare. ■

Ora si consideri che il prodotto tensoriale dei due vettori $\mathbf{g}^i$ e $\mathbf{g}^j$, corrispondenti dei covettori $\mathbf{g}^{*i}$ e $\mathbf{g}^{*j}$, rappresenta il prodotto tensoriale $\mathbf{g}^{*i} \otimes \mathbf{g}^{*j}$ che in base alla tabella 2 a pagina 23 genera, senza bisogno dell'intervento del tensore metrico, un elemento di Blin. La rappresentazione (115) della forma bilineare $\mathbf{a}$ associata al tensore doppio $\mathbf{A}$ può pertanto scriversi utilizzando le componenti covarianti di $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{a} = \sum_{ij} A_{ij} \mathbf{g}^{*i} \otimes \mathbf{g}^{*j}. \quad (116)$$

Naturalmente è possibile calcolare le componenti a_{ij} di $\mathbf{a}$ senza utilizzare il tensore metrico. A tale scopo basta fare riferimento direttamente alla forma bilineare in luogo della sua rappresentazione in Lin:

$$a_{ij} = A_{ij} = \mathbf{a}(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j). \quad (117)$$

Un discorso analogo a quanto detto sopra può essere fatto per le forme bilineari sullo spazio $\mathcal{V}^*$ dei covettori (gli elementi di Blin^*). In tal caso una forma bilineare $\mathbf{a}^* \in \text{Blin}^*$ origina, attraverso l'azione del corrispondente tensore doppio $\mathbf{A}$, le seguenti *componenti controvarianti*:

$$A^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{A} \mathbf{g}^j, \quad (118)$$

a cui consegue la rappresentazione:

$$\mathbf{A} = \sum_{ij} A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j. \quad (119)$$

Le nove diadi $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$ costruite tramite la sola base covariante costituiscono quindi una ulteriore base di Lin. Ricordando che il prodotto tensoriale di due vettori, nel caso non si faccia intervenire il tensore metrico per rappresentarlo in Lin come nella (119), genera un elemento di Blin^* (tabella 2), la forma bilineare $\mathbf{a}^*$ si può rappresentare in modo simile alla (119):

$$\mathbf{a}^* = \sum_{ij} A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j, \quad (120)$$

ma dove $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \in \text{Blin}^*$, a differenza che nella (119), dove $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \in \text{Lin}$. Anche in tale caso è possibile calcolare le componenti a^{*ij} di $\mathbf{a}^*$ senza utilizzare il tensore metrico, facendo riferimento direttamente alla forma bilineare in luogo della sua rappresentazione in Lin:

$$a^{*ij} = A^{ij} = \mathbf{a}^*(\mathbf{g}^{*i}, \mathbf{g}^{*j}). \quad (121)$$

4.5 Componenti del tensore metrico e del tensore trasposto

4.5.1 Componenti del tensore metrico

Si ricordi che il tensore metrico $\mathbf{G}$ è una forma bilineare su $\mathcal{V}$ (un elemento di Blin) che corrisponde all'identità $\mathbf{I}$ di Lin (cfr. l'equazione (52) a pagina 27). Le componenti del tensore metrico coincidono dunque con le componenti covarianti del tensore identità:

$$I_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{I} \mathbf{g}_j = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j. \quad (122)$$

Si noti che tali componenti coincidono con il delta di Kronecker solo nel caso la base covariante di vettori sia ortonormale e quindi coincidente con la base duale controvariante.

Analogamente le componenti dell'inverso $\mathbf{G}^{-1}$ del tensore metrico coincidono con le componenti controvarianti del tensore identità (cfr. l'equazione (53) a pagina 27):

$$I^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{I} \mathbf{g}^j = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j. \quad (123)$$

4.5.2 Corrispondenze tra le diverse forme di componenti di un tensore doppio

Essendo associate alle componenti del tensore metrico e del suo inverso, regolatori delle corrispondenze tra i tensori doppi (gli elementi di Lin) e le varie trasformazioni lineari e forme bilineari, non deve stupire che le componenti covarianti e controvarianti del tensore identità di Lin regoli il passaggio tra le diverse forme di componenti di un tensore doppio. Più precisamente, sommando un indice controvariante di una componente di un tensore doppio $\mathbf{A}$ con uno dei due indici delle componenti covarianti del tensore identità si trasforma l'indice stesso da controvariante a covariante, ovvero si “abbassa” l'indice. Per es. sommando il primo indice delle componenti controvarianti di $\mathbf{A}$ si ottengono le componenti miste di $\mathbf{A}$, con il primo indice covariante:

$$\begin{aligned} A_i{}^j &= \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{A} \mathbf{g}^j \\ &= \mathbf{g}_i \cdot \left(\sum_{hk} A^{hk} \mathbf{g}_h \otimes \mathbf{g}_k \right) \mathbf{g}^j \\ &= \mathbf{g}_i \cdot \left(\sum_{hk} A^{hk} \delta_k{}^j \mathbf{g}_h \right) \\ &= \sum_h I_{ih} A^{hj} \end{aligned} \quad (124)$$

Analogamente, sommando un indice covariante di una componente di un tensore doppio $\mathbf{A}$ con uno dei due indici delle componenti controvarianti del tensore identità si trasforma l'indice stesso da covariante a controvariante, ovvero si “alza” l'indice. Per es. sommando il primo indice delle componenti miste di $\mathbf{A}$, con primo indice covariante, si ottengono le componenti controvarianti di $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} A^{ij} &= \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{A} \mathbf{g}^j \\ &= \mathbf{g}^i \cdot \left(\sum_{hk} A_h{}^k \mathbf{g}^h \otimes \mathbf{g}_k \right) \mathbf{g}^j \\ &= \mathbf{g}^i \cdot \left(\sum_{hk} A_h{}^k \delta_k{}^j \mathbf{g}^h \right) \\ &= \sum_h I^{ih} A_h{}^j \end{aligned} \quad (125)$$

Naturalmente le due proprietà di alzamento e abbassamento di indici sono generali e valgono anche per le componenti vettoriali, per es. nel caso di un vettore $\mathbf{v}$ si ha:

$$\begin{aligned} v^i &= \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{g}^i \cdot \left(\sum_h v_h \mathbf{g}^h \right) \\ &= \sum_h I^{ih} v_h \end{aligned} \quad (126)$$

Inoltre, visto che le componenti miste del tensore identità coincidono con il delta di Kronecker, si ha:

$$\sum_h I^{ih} I_{hj} = \delta^i{}_j, \quad \sum_h I_{ih} I^{hj} = \delta_i{}^j, \quad (127)$$

il che mostra che le matrici composte dalle componenti covarianti e da quelle controvarianti del tensore identità sono l'una l'inversa dell'altra, in accordo con il fatto che:

$$\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{G} \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{I}^*, \quad (128)$$

dove $\mathbf{I}^*$ è l'identità di Blin*.

4.5.3 Estensione della rappresentazione in componenti delle operazioni tensoriali

Da quanto detto risulta che le operazioni tensoriali possono essere rappresentate, oltre che utilizzando le sole componenti miste di Lin, con primo indice controvariante, come

espresso dalle (100) e (101), anche utilizzando, con le opportune cautele, gli altri tipi di componenti. Al fine di non commettere errori, come già detto a suo tempo, basta fare attenzione al fatto che gli indici liberi abbiano la stessa varianza nei due membri di una uguaglianza e che gli indici sommati compaiano sempre a coppie e in opposizione di varianza. D'altronde è sempre possibile inserire un delta di Kronecker in corrispondenza di un'indice sommato, che può poi essere sostituito da una delle (127), ottenendo in tal modo la trasformazione dell'indice covariante in controvariante e viceversa. Per es., si consideri il prodotto $\mathbf{AB}$ di due tensori esprimendo il risultato $\mathbf{C}$ in componenti covarianti, il primo fattore $\mathbf{A}$ in componenti miste, con primo indice covariante, e il secondo fattore $\mathbf{B}$ in componenti covarianti:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \sum_h I_{ih} C^h{}_j = \sum_{hk} I_{ih} A^h{}_k B^k{}_j = \sum_{kl} A_{il} \delta^l{}_k B^k{}_j \\ &= \sum_{klh} A_{il} I^{lh} I_{hk} B^k{}_j \\ &= \sum_h A_i{}^h B_{hj}. \end{aligned} \quad (129)$$

Per quel che riguarda la rappresentazione matriciale, anche questa può essere estesa a qualunque tipo di componenti. L'unico vincolo che occorre rispettare al fine di avere espressioni matriciali valide è che dallo sviluppo di tali espressioni matriciali si ottengano delle espressioni indiciali valide. Per es., si consideri l'espressione tensoriale $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ a cui corrisponde l'espressione matriciale $[\mathbf{C}] = [\mathbf{A}][\mathbf{B}]$. Per via della (129) risulta lecito definire le matrici $[\mathbf{C}]$ e $[\mathbf{B}]$ attraverso le componenti covarianti e la matrice $[\mathbf{A}]$ attraverso le componenti miste (con primo indice covariante). Ma sempre dalla (129) risulta lecita anche l'espressione matriciale:

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{A}][\mathbf{G}]^{-1}[\mathbf{G}][\mathbf{B}]$$

dove le matrici $[\mathbf{C}]$ e $[\mathbf{A}]$ sono definite attraverso le componenti covarianti, la matrice $[\mathbf{B}]$ è definita dalle componenti miste (con primo indice controvariante), mentre le due matrici $[\mathbf{G}]$ e $[\mathbf{G}]^{-1}$ sono costruite a partire dalle componenti, covarianti e controvarianti rispettivamente, del tensore identità e dove si è sfruttata la proprietà:

$$[\mathbf{G}^{-1}] = [\mathbf{G}]^{-1}. \quad (130)$$

4.5.4 Rappresentazione del tensore trasposto

Si ricordi che il trasposto $\mathbf{A}^T$ di un tensore doppio $\mathbf{A}$ è definito quale forma bilineare trasposta della forma bilineare corrispondente di $\mathbf{A}$ (cfr. il §3.4.2). Dalla definizione (60) si possono allora direttamente ottenere le componenti covarianti di $\mathbf{A}^T$ conoscendo quelle covarianti di $\mathbf{A}$:

$$A^T_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{g}_j) = \mathbf{g}_j \cdot (\mathbf{A} \mathbf{g}_i) = A_{ji}. \quad (131)$$

La corrispondente equazione matriciale risulta:

$$[\mathbf{A}^T] = [\mathbf{A}]^T, \quad (132)$$

con l'avvertenza che la sua validità è legata alla scelta delle componenti covarianti.

Con le opportune trasformazioni, è possibile poi ottenere le componenti miste, con primo indice controvariante, del tensore trasposto in funzione di quelle analoghe del tensore dato:

$$\begin{aligned} A^T{}^i{}_j &= \sum_h I^{ih} A^T_{hj} = \sum_h I^{ih} A_{jh} \\ &= \sum_{hk} I^{ih} I_{jk} A^k{}_h. \end{aligned} \quad (133)$$

La corrispondente equazione matriciale risulta:

$$[\mathbf{A}^T] = [\mathbf{G}]^{-1}[\mathbf{A}]^T[\mathbf{G}], \quad (134)$$

avendo sfruttato la simmetria (40) del tensore metrico. Nella (134) le matrici rappresentative di $\mathbf{A}^T$ e di $\mathbf{A}$ sono entrambe costruite con le componenti miste standard in Lin (primo indice controvariante) mentre le componenti del tensore metrico e del suo inverso sono al solito ottenute rispettivamente con le componenti covarianti e controvarianti del tensore identità.

In modo analogo si ottengono infine le componenti miste, con il primo indice covariante, del tensore trasposto in funzione di quelle miste, con il primo indice controvariante, del tensore dato:

$$\begin{aligned} A^T_{i^j} &= \sum_h A^T_{ih} I^{hj} = \sum_h A_{hi} I^{hj} \\ &= \sum_{hk} I_{hk} A^k_i I^{hj} = \sum_k \delta_k^j A^k_i \\ &= A^j_i. \end{aligned} \quad (135)$$

Questo risultato è in accordo con il fatto che il trasposto di un elemento di Lin (componenti miste con il primo indice controvariante) è in realtà un elemento di Lin* (componenti miste con il primo indice covariante). La corrispondente equazione matriciale risulta ancora la (132). Ad un risultato analogo si arriva utilizzando le componenti controvarianti:

$$A^T{}^{ij} = A^{ji}, \quad (136)$$

ancora con la validità della relazione matriciale (132), che quindi vale in generale, con la semplice avvertenza che le matrici corrispondenti al tensore trasposto e al tensore dato siano costruite con componenti i cui indici abbiano lo stesso tipo di varianza in posizione trasposta.

4.5.5 Rappresentazione dei tensori simmetrici e emisimmetrici

Dalla rappresentazione dei tensori trasposti si ricavano immediatamente le condizioni che devono soddisfare i tensori simmetrici $\mathbf{S}$ e quelli emisimmetrici $\mathbf{W}$:

$$S_{ji} = S_{ij}, \quad S^{ji} = S^{ij}, \quad S_j^i = S^i_j, \quad (137)$$

$$W_{ji} = -W_{ij}, \quad W^{ji} = -W^{ij}, \quad W_j^i = -W^i_j, \quad (138)$$

Per quel che riguarda la rappresentazione matriciale, deve essere:

$$[\mathbf{S}^T] = [\mathbf{S}], \quad [\mathbf{W}^T] = -[\mathbf{W}], \quad (139)$$

con lo stesso tipo di componenti a destra e a sinistra delle uguaglianze. Tenendo presente la (132) ne risultano le condizioni:

$$[\mathbf{S}]^T = [\mathbf{S}], \quad [\mathbf{W}]^T = -[\mathbf{W}], \quad (140)$$

che però sono da prendere con le molle nel caso di componenti miste. Infatti nella (132) le matrici corrispondenti al tensore trasposto e al tensore dato devono essere costruite con componenti i cui indici abbiano lo stesso tipo di varianza in posizione trasposta, e quindi nelle (140) a destra e a sinistra dell'uguaglianza le matrici corrispondenti allo stesso tensore devono essere costruite con componenti miste diverse. Le condizioni (140) impongono che i tensori simmetrici e quelli emisimmetrici, limitandosi alle componenti covarianti, si possano rappresentare per esteso come segue:

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & -W_{yx} & W_{xz} \\ W_{yx} & 0 & -W_{zy} \\ -W_{xz} & W_{zy} & 0 \end{bmatrix}. \quad (141)$$

Ne consegue che i tensori simmetrici sono rappresentabili in una base di sei tensori simmetrici:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & S_{xx} (\mathbf{g}^x \otimes \mathbf{g}^x) \\ & + S_{yy} (\mathbf{g}^y \otimes \mathbf{g}^y) \\ & + S_{zz} (\mathbf{g}^z \otimes \mathbf{g}^z) \\ & + S_{zy} (\mathbf{g}^z \otimes \mathbf{g}^y + \mathbf{g}^y \otimes \mathbf{g}^z) , \quad \forall \mathbf{S} \in \text{Sym}, \\ & + S_{xz} (\mathbf{g}^x \otimes \mathbf{g}^z + \mathbf{g}^z \otimes \mathbf{g}^x) \\ & + S_{yx} (\mathbf{g}^y \otimes \mathbf{g}^x + \mathbf{g}^x \otimes \mathbf{g}^y) \end{aligned} \quad (142)$$

mentre i tensori emisimmetrici sono rappresentabili in una base di tre tensori emisimmetrici:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = & W_{zy} (\mathbf{g}^z \otimes \mathbf{g}^y - \mathbf{g}^y \otimes \mathbf{g}^z) \\ & + W_{xz} (\mathbf{g}^x \otimes \mathbf{g}^z - \mathbf{g}^z \otimes \mathbf{g}^x) , \quad \forall \mathbf{W} \in \text{Skw}. \\ & + W_{yx} (\mathbf{g}^y \otimes \mathbf{g}^x - \mathbf{g}^x \otimes \mathbf{g}^y) \end{aligned} \quad (143)$$

4.6 Cambiamento di basi

4.6.1 Trasformazione tra due basi di vettori

Siano $\mathbf{g}_i$ e $\hat{\mathbf{g}}_i$ due diverse basi covarianti a cui corrispondono le basi duali controvarianti $\mathbf{g}^i$ e $\hat{\mathbf{g}}^i$ rispettivamente. Si ricordi che un tensore doppio resta definito dalla sua azione su una qualunque base. La posizione:

$$\mathbf{T} \mathbf{g}_i = \hat{\mathbf{g}}_i, \quad (144)$$

definisce allora univocamente il tensore doppio $\mathbf{T}$ che regola il passaggio dalla base $\mathbf{g}_i$ a quella $\hat{\mathbf{g}}_i$. Per quel che riguarda il passaggio dalla base duale $\mathbf{g}^i$ controvariante a quella $\hat{\mathbf{g}}^i$, si può mostrare che è regolata dal tensore inverso e trasposto di $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}^{-T} \mathbf{g}^i = \hat{\mathbf{g}}^i. \quad (145)$$

Infatti risulta:

$$(\mathbf{T}^{-T} \mathbf{g}^i) \cdot \hat{\mathbf{g}}_j = (\mathbf{T}^{-T} \mathbf{g}^i) \cdot (\mathbf{T} \mathbf{g}_j) = \mathbf{g}^i \cdot (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{g}_j) = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta^i_j.$$

Le componenti miste, con primo indice controvariante, di $\mathbf{T}$ rispetto alla base $\mathbf{g}_i$ valgono:

$$T^i_j = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{T} \mathbf{g}_j = \mathbf{g}^i \cdot \hat{\mathbf{g}}_j. \quad (146)$$

La matrice $[\mathbf{T}]$, rappresentazione matriciale di $\mathbf{T}$ rispetto alla base di partenza $\mathbf{g}_i$, si compone dunque delle componenti controvarianti dei vettori della base $\hat{\mathbf{g}}_i$ di arrivo, componenti calcolate rispetto alla base di partenza $\mathbf{g}_i$. Più precisamente, le componenti controvarianti dei vettori della base $\hat{\mathbf{g}}_i$ di arrivo formano le colonne di $[\mathbf{T}]$. Le componenti miste, con primo indice covariante, del tensore $\mathbf{T}^{-T}$ inverso e trasposto di $\mathbf{T}$ possono ottenersi analogamente alla (146):

$$T^{-T}_i{}^j = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{T}^{-T} \mathbf{g}^j = \mathbf{g}_i \cdot \hat{\mathbf{g}}^j. \quad (147)$$

Le componenti miste definite dalle (146) e (147) soddisfano alla condizione per la validità della rappresentazione matriciale (132), per cui le componenti miste $T^{-T}_i{}^j$ possono anche calcolarsi facendo uso della rappresentazione matriciale:

$$[\mathbf{T}^{-T}] = [\mathbf{T}]^{-T}. \quad (148)$$

4.6.2 Trasformazione delle componenti vettoriali e tensoriali

Le componenti controvarianti $\hat{v}^i$ di un generico vettore $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\hat{\mathbf{g}}_i$ si ottengono al solito utilizzando la (78), cioè facendo uso della base duale $\hat{\mathbf{g}}^i$:

$$\hat{v}^i = \hat{\mathbf{g}}^i \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{T}^{-T} \mathbf{g}^i) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{g}^i \cdot (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{v}), \quad (149)$$

avendo utilizzato la (145) e la definizione di tensore trasposto (60). Le componenti controvarianti di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\hat{\mathbf{g}}_i$ coincidono dunque con le componenti controvarianti del vettore $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{v}$ nella base $\mathbf{g}_i$. Il tensore $\mathbf{T}^{-1}$ rappresenta l'inverso di $\mathbf{T}$, cioè la trasformazione che porta la base di arrivo $\hat{\mathbf{g}}_i$ sulla base $\mathbf{g}_i$ di partenza. La relazione tra le componenti controvarianti v^i di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathbf{g}_i$ e quelle $\hat{v}^i$ rispetto alla base $\hat{\mathbf{g}}_i$ risulta quindi:

$$\hat{v}^i = \sum_j T^{-1}{}^i{}_j v^j, \quad \{\hat{\mathbf{v}}\} = [\mathbf{T}]^{-1} \{\mathbf{v}\}, \quad (150)$$

Utilizzando la definizione (98) di componente mista di un tensore, si perviene in modo analogo alla relazione esistente tra le componenti $A^i{}_j$ e $\hat{A}^i{}_j$ di un tensore doppio $\mathbf{A}$, valutate nelle basi $\mathbf{g}_i$ e $\hat{\mathbf{g}}_i$ rispettivamente:

$$\hat{A}^i{}_j = \hat{\mathbf{g}}^i \cdot \mathbf{A} \hat{\mathbf{g}}_j = (\mathbf{T}^{-T} \mathbf{g}^i) \cdot (\mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{g}_j) = \mathbf{g}^i \cdot (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{g}_j). \quad (151)$$

Le componenti di $\mathbf{A}$ rispetto alla base $\hat{\mathbf{g}}_i$ coincidono dunque con le componenti del tensore doppio $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$ nella base $\mathbf{g}_i$:

$$\hat{A}^i{}_j = \sum_{hk} T^{-1}{}^i{}_h A^h{}_k T^k{}_j, \quad [\hat{\mathbf{A}}] = [\mathbf{T}]^{-1} [\mathbf{A}] [\mathbf{T}]. \quad (152)$$

4.6.3 Cambiamento di basi ortonormali

Siano $Oxyz$ e $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ due sistemi di riferimento cartesiani ortogonali aventi l'origine O in comune (fig. 26). Siano inoltre $\hat{\mathbf{i}}_x, \hat{\mathbf{i}}_y, \hat{\mathbf{i}}_z$ e $\hat{\mathbf{i}}_{\hat{x}}, \hat{\mathbf{i}}_{\hat{y}}, \hat{\mathbf{i}}_{\hat{z}}$ i versori individuati dagli assi dei due

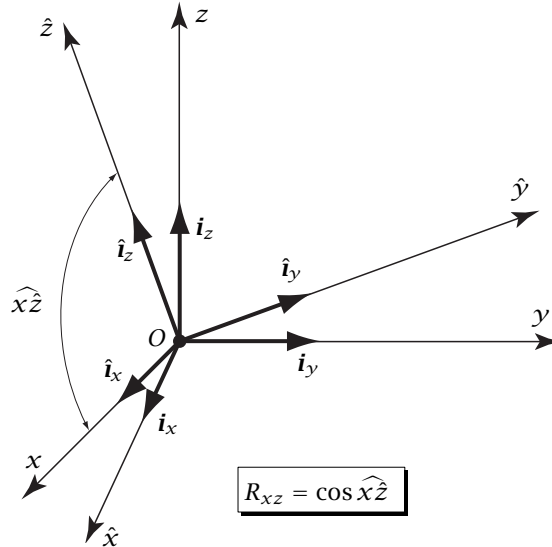


Figura 26: Trasformazione di coordinate

sistemi di riferimento. I versori $\hat{\mathbf{i}}_i$ possono essere individuati ruotando la base $\mathbf{i}_i$:

$$\hat{\mathbf{i}}_i = \mathbf{R} \mathbf{i}_i, \quad (153)$$

con il tensore rotazione $\mathbf{R}$ che soddisfa la condizione (68):

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T. \quad (154)$$

In accordo con la (146), le componenti di $\mathbf{R}$ rispetto alla base $\mathbf{i}_i$ valgono:

$$\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{R} \mathbf{i}_j = \mathbf{i}_i \cdot \hat{\mathbf{i}}_j. \quad (155)$$

La colonna j -esima della matrice $[\mathbf{R}]$, rappresentazione di $\mathbf{R}$ nel sistema $Oxyz$, è dunque composta dai coseni direttori dell'asse $\hat{x}_j$ rispetto agli assi del sistema $Oxyz$ (fig. 26).

Le componenti di un generico vettore $\mathbf{v}$ e di un generico tensore $\mathbf{A}$ nella base $\hat{\mathbf{i}}_i$, in funzione di quelle nella base $\mathbf{i}_i$, si ottengono particolarizzando le (150) e (152) rispettivamente, tenendo conto della (154):

$$\hat{v}_i = \sum_j R_{ji} v_j, \quad \{\hat{\mathbf{v}}\} = [\mathbf{R}]^T \{\mathbf{v}\}, \quad (156)$$

$$\hat{A}_{ij} = \sum_{hk} R_{hi} R_{kj} A_{hk}, \quad [\hat{\mathbf{A}}] = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{A}] [\mathbf{R}]. \quad (157)$$

5 Direzioni principali di un tensore doppio

5.1 Definizione di autovalore e autovettore di un tensore doppio

Applicando un tensore doppio ad un vettore qualunque si ottiene in generale un vettore avente direzione diversa da quella del vettore originale. Se sotto l'azione di un tensore $\mathbf{A}$ la direzione di un dato vettore $\mathbf{v}$ resta invariata, si dice che tale direzione è una *direzione principale* di $\mathbf{A}$, che un asse avente la direzione di $\mathbf{v}$ è un *asse principale* di $\mathbf{A}$ ed infine che $\mathbf{v}$ è un *autovettore* di $\mathbf{A}$. Se $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$ deve dunque risultare:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad (158)$$

e lo scalare λ è detto *autovalore* di $\mathbf{A}$.

Ad un dato autovalore λ di un tensore doppio $\mathbf{A}$ corrispondono infiniti autovettori. Infatti se $\mathbf{v}$ è un autovettore corrispondente a λ , allora anche $\alpha\mathbf{v}$, con α generico scalare, è un autovettore corrispondente a λ :

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{v}) = \alpha(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\alpha\mathbf{v}). \quad (159)$$

L'insieme degli autovettori corrispondenti ad un dato autovalore di un tensore doppio costituiscono un sottospazio di $\mathcal{V}$. Infatti la (159) mostra che moltiplicando un autovettore per uno scalare si ottiene ancora un autovettore corrispondente allo stesso autovalore. Inoltre la stessa cosa succede se si sommano due autovettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ corrispondenti allo stesso autovalore:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

L'insieme di tutti gli autovettori corrispondenti ad un dato autovalore λ di un tensore doppio è detto *autospatio* di λ , mentre l'insieme di tutti gli autovalori di un tensore doppio $\mathbf{A}$ è detto *spettro* di $\mathbf{A}$.

I versori delle direzioni principali sono, per quanto visto, degli autovettori e vengono detti *autoversori*. Se $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$, l'autoversore $\mathbf{e}_v$ equiverso a $\mathbf{v}$ vale:

$$\mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}}.$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{v}$ la relazione (158) e risolvendo in λ si ottiene:

$$\lambda = \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_v. \quad (160)$$

Tenendo presente la definizione (98) delle componenti di un tensore doppio, la (160) afferma che in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale avente un asse principale tra gli assi coordinati, la componente nella posizione diagonale corrispondente a tale asse coincide con l'associato autovalore.

5.2 Calcolo degli autovalori e degli autovettori di un tensore doppio

Al fine del calcolo degli autovalori di un tensore doppio $\mathbf{A}$, la condizione (158) può essere posta nella forma:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (161)$$

La rappresentazione matriciale della (161) risulta:

$$[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] \{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{0}\}. \quad (162)$$

Il sistema omogeneo (162) di 3 equazioni in tre incognite ammette soluzioni $\{\mathbf{v}\} \neq \{\mathbf{0}\}$ se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti $[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}]$ non è nullo:

$$\det [\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = 0. \quad (163)$$

Sviluppando il determinante (163) si ottiene un'equazione cubica in λ , detta *equazione caratteristica* di $\mathbf{A}$:

$$\lambda^3 - A_I \lambda^2 + A_{II} \lambda - A_{III} = 0, \quad (164)$$

dove:

$$A_I = \sum_i A^i_i = A^x_x + A^y_y + A^z_z, \quad (165a)$$

$$A_{II} = (A^z_z A^y_y - A^z_y A^y_z) + (A^x_x A^z_z - A^x_z A^z_x) + (A^y_y A^x_x - A^y_x A^x_y), \quad (165b)$$

$$A_{III} = \det [\mathbf{A}]. \quad (165c)$$

L'equazione caratteristica (164) ammette al massimo tre radici distinte, reali o complesse. Sostituendo le radici dell'equazione caratteristica nel sistema (162) si ottengono gli associati autovettori, reali o complessi a seconda che i corrispondenti autovalori siano rispettivamente reali oppure complessi.

5.3 Proprietà degli autovalori e degli autovettori di un tensore doppio simmetrico

Diamo nel seguito alcune importanti proprietà degli autovalori e degli autovettori di un generico tensore doppio simmetrico $\mathbf{S}$.

Proposizione 1. *Gli autovalori di un tensore doppio simmetrico sono tutti reali.*

Dimostrazione. Se così non fosse si avrebbe:

$$\mathbf{S}(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2) = (\lambda_1 + i\lambda_2)(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2), \quad \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}, \lambda_2 \neq 0, \quad (a)$$

dove 'i' indica l'unità immaginaria. Sviluppando la (a) ed uguagliando le parti reali ed immaginarie si ottiene:

$$\mathbf{S}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 - \lambda_2 \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{S}\mathbf{v}_2 = \lambda_1 \mathbf{v}_2 + \lambda_2 \mathbf{v}_1. \quad (b)$$

Infine, sottraendo la prima delle (b), moltiplicata scalarmente per $\mathbf{v}_2$, dalla seconda delle (b), moltiplicata scalarmente per $\mathbf{v}_1$, si perviene alla relazione:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{S}\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{S}\mathbf{v}_1 = \lambda_2 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2). \quad (c)$$

Se $\mathbf{S}$ è simmetrico, il primo membro della (c) è nullo. Ma il secondo membro è nullo se e solo se $\lambda_2 = 0$ oppure $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, contrariamente all'ipotesi. ■

Proposizione 2. *Due autovettori di un tensore doppio simmetrico corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro.*

Dimostrazione. Infatti, se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono due autovettori di un tensore simmetrico $\mathbf{S}$, corrispondenti a due distinti autovalori, λ_1 e λ_2 rispettivamente, si ha:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{S}\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{S}\mathbf{v}_1 = \lambda_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (\lambda_2 - \lambda_1) \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2. \quad (d)$$

Il primo membro della (d) è nullo poiché $\mathbf{S}$ è simmetrico. L'ultimo membro della (a) deve quindi essere nullo. Per l'ipotesi $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, questo è possibile se e solo se $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. ■

Dalla definizione (158) di autovalore segue immediatamente la seguente proprietà:

Proposizione 3. Se $\mathbf{u}$ è un vettore ortogonale ad un autovettore $\mathbf{v}$ di un tensore doppio simmetrico $\mathbf{S}$ risulta:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{S}\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}\mathbf{u} = 0. \quad (166)$$

Tenendo presente la definizione (98) delle componenti di un tensore doppio e riferendosi ad un sistema cartesiano ortogonale, la (166) afferma che una componente non diagonale di $\mathbf{S}$ è nulla se uno dei due assi coordinati rispetto ai quali è calcolata è un asse principale.

Se l'asse x di un sistema di riferimento $Oxyz$ cartesiano ortogonale è asse principale di un tensore doppio simmetrico $\mathbf{S}$, dalle relazioni (160) e (166) segue immediatamente la seguente rappresentazione:

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & S_{yy} & S_{yz} \\ 0 & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix}, \quad (167)$$

dove λ_x è l'autovalore associato all'asse x . È chiaro che rappresentazioni analoghe alla (167) valgono nei casi in cui y oppure z siano assi principali. Inversamente:

Proposizione 4. Se un tensore doppio simmetrico $\mathbf{S}$ si rappresenta nella forma (167) in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, allora x è asse principale e λ_x rappresenta l'autovalore associato all'asse x .

Dimostrazione. Se vale la rappresentazione (167) si ha:

$$\mathbf{i}_y \cdot \mathbf{S}\mathbf{i}_x = \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{S}\mathbf{i}_x = 0.$$

Quindi $\mathbf{S}\mathbf{i}_x$ è ortogonale ad $\mathbf{i}_y$ ed $\mathbf{i}_z$ contemporaneamente e perciò ha la direzione di $\mathbf{i}_x$:

$$\mathbf{S}\mathbf{i}_x = (\mathbf{i}_x \cdot \mathbf{S}\mathbf{i}_x) \mathbf{i}_x = \lambda_x \mathbf{i}_x,$$

come volevasi dimostrare. ■

Una ulteriore conseguenza della relazione (166) è che un vettore $\mathbf{u}$ ortogonale ad un autovettore $\mathbf{v}$ di $\mathbf{S}$ si trasforma tramite $\mathbf{S}$ in un vettore ancora ortogonale a $\mathbf{v}$. Ne consegue:

Proposizione 5. Se $\mathbf{v}$ è un autovettore di un tensore doppio simmetrico $\mathbf{S}$, allora la restrizione di $\mathbf{S}$ al sottospazio $\mathbf{v}^\perp \subset \mathcal{V}$ dei vettori normali a $\mathbf{v}$ rappresenta una trasformazione lineare in $\mathbf{v}^\perp$.

Vediamo ora di analizzare i diversi casi che si possono presentare:

1. Il tensore doppio simmetrico $\mathbf{S}$ possiede tre autovalori distinti λ_ξ , λ_η e λ_ζ .

Ai tre autovalori distinti di $\mathbf{S}$ sono associate, in virtù della proprietà di ortogonalità (proposizione 2), tre direzioni principali ξ , η e ζ ortogonali tra loro ed univocamente determinate. Esiste quindi uno, ed un solo, sistema di riferimento principale cartesiano ortogonale, avente tutti e tre gli assi coordinati principali. La rappresentazione algebrica di $\mathbf{S}$ nel riferimento principale $O\xi\eta\zeta$, in virtù della rappresentazione (167), risulta:

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \lambda_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\zeta \end{bmatrix} \quad (168)$$

2. Il tensore doppio simmetrico $\mathbf{S}$ possiede un autovalore semplice λ_ξ e un autovalore doppio λ_η .

Se ξ è un'asse principale associato a λ_ξ , la forma (163) dell'equazione caratteristica di $\mathbf{S}$ in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\xi yz$, avente il primo asse coordinato coincidente con ξ diventa:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda_\xi - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & S_{yy} - \lambda & S_{yz} \\ 0 & S_{yz} & S_{zz} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Tale equazione ammette una radice doppia se e solo se $\lambda_\eta = S_{yy} = S_{zz}$ e $S_{yz} = 0$. La rappresentazione di $\mathbf{S}$ nel riferimento prescelto è dunque diagonale e quindi il riferimento è principale:

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \lambda_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\eta \end{bmatrix}.$$

Data l'arbitrarietà nella scelta degli assi coordinati y e z , se ne conclude che tutte le direzioni ortogonali a ξ sono direzioni principali associate all'autovalore λ_η . Inoltre, ogni direzione principale associata a λ_ξ deve essere ortogonale a tutte le direzioni principali associate a λ_η , essendo per ipotesi $\lambda_\xi \neq \lambda_\eta$. Ne consegue che la direzione ξ è univocamente determinata.

3. Il tensore doppio simmetrico $\mathbf{S}$ possiede un autovalore triplo λ_ξ .

Ragionando come sopra, la rappresentazione in un sistema $O\xi yz$ diventa:

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \lambda_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\xi & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\xi \end{bmatrix} = \lambda_\xi [\mathbf{I}].$$

Il tensore $\mathbf{S}$ risulta quindi proporzionale al tensore identità e tutte le direzioni dello spazio sono principali.

Riassumendo:

Proposizione 6. *Un tensore doppio simmetrico possiede sempre tre direzioni principali ortogonali tra loro. è dunque sempre possibile scegliere un sistema di riferimento principale cartesiano ortogonale $O\xi\eta\zeta$ nel quale tale tensore simmetrico si rappresenta nella forma (168), equivalente a scrivere:*

$$\mathbf{S} = \lambda_\xi \mathbf{i}_\xi \otimes \mathbf{i}_\xi + \lambda_\eta \mathbf{i}_\eta \otimes \mathbf{i}_\eta + \lambda_\zeta \mathbf{i}_\zeta \otimes \mathbf{i}_\zeta. \quad (169)$$

Naturalmente, il sistema principale varia al variare del tensore simmetrico considerato. Inoltre, tale sistema è unico se e solo se i tre autovalori sono tutti distinti. Infine, ad un autovalore semplice corrisponde una sola direzione principale, ad un autovalore doppio corrispondono tutte le direzioni di un piano, e ad un autovalore triplo corrispondono tutte le direzioni dello spazio.

6 Invarianti scalari di un tensore doppio

Si noti che gli autovalori di un tensore doppio, quali soluzioni del problema (158), sono indipendenti dalla base in cui è scritta l'equazione caratteristica (164). Ne risulta che i coefficienti dell'equazione caratteristica sono indipendenti dalla base, e per questo sono detti *invarianti scalari*. In particolare, A_I è detto *invariante lineare*, A_{II} *invariante quadratico* ed infine A_{III} *invariante cubico*.

6.1 Traccia di un tensore doppio

Qui ci interessa in particolare l'invariante lineare (165a) di $\mathbf{A}$, più noto con il nome di *traccia* ed indicato nel seguito con $\text{tr } \mathbf{A}$:

$$\text{tr } \mathbf{A} = \sum_i A^i_i. \quad (170)$$

Che tale espressione sia indipendente dalla base può essere facilmente verificato utilizzando la legge di trasformazione (152) delle componenti di un tensore doppio:

$$\begin{aligned} \text{tr } \hat{\mathbf{A}} &= \sum_i \hat{A}^i_i = \sum_{ihk} T^{-1}{}_i^h A^h_k T^k{}_i \\ &= \sum_{hk} \left(A^h_k \sum_i T^k{}_i T^{-1}{}_i^h \right) = \sum_{hk} \left\{ A^h_k \left(\mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \right)^k{}_h \right\} = \sum_{hk} A^h_k \delta^k_h = \sum_h A^h_h. \end{aligned}$$

Alcune semplici ed importanti proprietà della traccia sono le seguenti:

$$\text{tr } \mathbf{A} = \text{tr } \mathbf{A}^T, \quad (171a)$$

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA}), \quad (171b)$$

$$\text{tr}(\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) = \alpha \text{tr } \mathbf{A} + \beta \text{tr } \mathbf{B}, \quad (171c)$$

$$\text{tr } \mathbf{W} = 0, \quad \forall \mathbf{W} \in \text{Skw}, \quad (171d)$$

$$\text{tr } \mathbf{I} = 3. \quad (171e)$$

6.1.1 Parte sferica e parte deviatorica di un tensore doppio

È possibile decomporre in modo unico un qualunque tensore doppio nella somma di un tensore proporzionale al tensore identità e di uno a traccia nulla:

$$\mathbf{A} = a\mathbf{I} + \mathbf{D}_A, \quad (172)$$

dove:

$$a = \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{A}, \quad \mathbf{D}_A = \mathbf{A} - a\mathbf{I}. \quad (173)$$

Un tensore a traccia nulla è detto *deviatorico* ed uno proporzionale all'identità è detto *sferico*. Gli insiemi dei tensori sferici e deviatorici costituiscono due sottospazi disgiunti di Lin , dei quali Lin , per via della (172), è somma diretta. I tensori sferici costituiscono uno spazio di dimensione uno, di cui l'identità $\mathbf{I}$ rappresenta una base. I tensori deviatorici costituiscono invece uno spazio di dimensione otto, poiché gli elementi diagonali sono legati dalla relazione lineare:

$$D^x{}_x + D^y{}_y + D^z{}_z = 0. \quad (174)$$

Un tensore deviatorico $\mathbf{D}$ può essere dunque rappresentato in una base di otto tensori deviatorici, per esempio nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = & D^x{}_x (\mathbf{g}_x \otimes \mathbf{g}^x - \mathbf{g}_z \otimes \mathbf{g}^z) \\ & + D^y{}_y (\mathbf{g}_y \otimes \mathbf{g}^y - \mathbf{g}_z \otimes \mathbf{g}^z) \\ & + D^z{}_y \mathbf{g}_z \otimes \mathbf{g}^y + D^y{}_z \mathbf{g}_y \otimes \mathbf{g}^z \\ & + D^x{}_z \mathbf{g}_x \otimes \mathbf{g}^z + D^z{}_x \mathbf{g}_z \otimes \mathbf{g}^x \\ & + D^y{}_x \mathbf{g}_y \otimes \mathbf{g}^x + D^x{}_y \mathbf{g}_x \otimes \mathbf{g}^y. \end{aligned} \quad (175)$$

6.1.2 Prodotto scalare di tensori

Le forme bilineari sullo spazio dei vettori $\mathcal{V}$ e su quello dei covettori $\mathcal{V}^*$, cioè gli elementi di Blin e Blin^* rispettivamente, possono essere messe in dualità definendo l'azione di una qualunque diade di vettori $\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2$ su una qualunque diade di covettori:

$$\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 (\mathbf{v}_1^* \otimes \mathbf{v}_2^*) = (\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^*) (\mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^*). \quad (176)$$

Si ricordi che il prodotto tensoriale di vettori genera un elemento di Blin^* e quello di covettori un elemento di Blin . La generalizzazione della (176) a forme bilineari generiche si fonda sulle rappresentazioni in componenti (116) e (120) delle forme bilineari:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^*(\mathbf{b}) &= \sum_{ij} A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \left(\sum_{hk} B_{hk} \mathbf{g}^{*h} \otimes \mathbf{g}^{*k} \right) \\ &= \sum_{ijhk} A^{ij} B_{hk} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j (\mathbf{g}^{*h} \otimes \mathbf{g}^{*k}) \\ &= \sum_{ijhk} A^{ij} B_{hk} \delta_i^h \delta_j^k = \sum_{ij} A^{ij} B_{ij},\end{aligned}\quad (177)$$

dove A^{ij} e B_{ij} sono rispettivamente le componenti controvarianti del tensore $\mathbf{A}$ corrispondente della forma $\mathbf{a}^*$ e le componenti covarianti del tensore $\mathbf{B}$ corrispondente della forma $\mathbf{b}$. Essendo espressa per il tramite delle componenti dei tensori doppi corrispondenti, via tensore metrico, delle forme bilineari, la relazione (177) definisce anche un prodotto scalare tra tensori doppi:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{ij} A^{ij} B_{ij}. \quad (178)$$

Volendo esprimere il prodotto scalare (178) per il tramite delle componenti miste, con primo indice controvariante, si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \sum_{ij} \left(\sum_h I^{jh} A^i_h \right) \left(\sum_k I_{ik} B^k_j \right) \\ &= \sum_{ih} A^i_h \left(\sum_{jk} I^{jh} I_{ik} B^k_j \right) = \sum_{ih} A^i_h B^{Th}_i\end{aligned}\quad (179)$$

avendo sfruttato la relazione (133), p. 42, sulle componenti del tensore trasposto in Lin. Tenendo poi conto della definizione (170) di traccia e della rappresentazione (101f) del prodotto di due tensori, la (178) può essere messa nella forma:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{AB}^T). \quad (180)$$

Il prodotto scalare così definito gode delle proprietà richieste affinché Lin sia uno spazio con prodotto interno, secondo la definizione (4) di p. 11:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \quad (181a)$$

$$(\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \alpha (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) + \beta (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}), \quad (181b)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \geq 0 \quad \text{e} \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = 0), \quad (181c)$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \text{Lin}$. Per quel che riguarda la relazione (181c), si tenga conto che in un sistema cartesiano ortogonale risulta $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \sum_{ij} (A_{ij})^2 \geq 0$ per ogni $\mathbf{A}$. Altre due importanti proprietà riguardano il prodotto scalare di tensori simmetrici ed emisimmetrici:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}_A, \quad \forall \mathbf{S} \in \text{Sym}, \quad (182)$$

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{A} = -\mathbf{W} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}_A, \quad \forall \mathbf{W} \in \text{Skw}, \quad (183)$$

dove $\mathbf{S}_A$ e $\mathbf{W}_A$ sono la parte rispettivamente simmetrica ed emisimmetrica di $\mathbf{A}$, fornite dalle relazioni (63). Infine il prodotto scalare di due diadi, in accordo con la (176), risulta:

$$(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_1) (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_2), \quad (184)$$

per ogni vettore $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

Il prodotto scalare (180) rende ortonormale la base di Lin costituita dalle nove diadi $\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j$ che si ottengono da una qualunque base ortonormale $\mathbf{i}_i$ di $\mathcal{V}$. D'altronde, la rappresentazione ortonormale $\sum_{ij} A_{ij} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j$ impone che necessariamente debba essere $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{ij} A_{ij} B_{ij}$, per un qualunque prodotto scalare in Lin che renda ortonormale la base $\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j$. Per avere invece una

base ortonormale sia di Sym che di Skw , la rappresentazione ortonormale di un qualunque tensore simmetrico $\mathbf{S}$ va posta nella forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & S_{xx} \{ \mathbf{i}_x \otimes \mathbf{i}_x \} \\ & + S_{yy} \{ \mathbf{i}_y \otimes \mathbf{i}_y \} \\ & + S_{zz} \{ \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z \} \\ & + \sqrt{2}S_{zy} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_y + \mathbf{i}_y \otimes \mathbf{i}_z) \right\}, \quad \forall \mathbf{S} \in \text{Sym}. \\ & + \sqrt{2}S_{xz} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i}_x \otimes \mathbf{i}_z + \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_x) \right\} \\ & + \sqrt{2}S_{yx} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i}_y \otimes \mathbf{i}_x + \mathbf{i}_x \otimes \mathbf{i}_y) \right\} \end{aligned} \quad (185)$$

mentre quella di un qualunque tensore emisimmetrico $\mathbf{W}$ diventa:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = & + \sqrt{2}W_{zy} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_y - \mathbf{i}_y \otimes \mathbf{i}_z) \right\} \\ & + \sqrt{2}W_{xz} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i}_x \otimes \mathbf{i}_z - \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_x) \right\}, \quad \forall \mathbf{W} \in \text{Skw}. \\ & + \sqrt{2}W_{yx} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i}_y \otimes \mathbf{i}_x - \mathbf{i}_x \otimes \mathbf{i}_y) \right\} \end{aligned} \quad (186)$$

6.2 Determinante di un tensore doppio

L'invariante cubico (165c) mostra che il determinante della matrice rappresentazione algebrica di un tensore doppio non dipende dal riferimento. È dunque possibile introdurre il concetto di *determinante di un tensore doppio*.

Indicato con $\det \mathbf{A}$ il determinante del tensore doppio $\mathbf{A}$, dalla rappresentazione ortonormale (95) del prodotto misto risulta:

$$(\mathbf{A} \mathbf{i}_x \times \mathbf{A} \mathbf{i}_y) \cdot \mathbf{A} \mathbf{i}_z = \det \mathbf{A}. \quad (187)$$

dove $\mathbf{i}_i$ è una qualunque base ortonormale. Tenendo poi conto della definizione (83) del simbolo di permutazione e ancora della rappresentazione ortonormale del prodotto misto, risulta anche:

$$(\mathbf{A} \mathbf{i}_i \times \mathbf{A} \mathbf{i}_j) \cdot \mathbf{A} \mathbf{i}_k = \varepsilon_{ijh} \det \mathbf{A}. \quad (188)$$

Vediamo di dedurre dalle (187) e (188) alcune proprietà del determinante. Il determinante del prodotto di due tensori doppi ugualgia il prodotto dei determinanti dei due tensori:

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B}). \quad (189)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= (\mathbf{AB} \mathbf{i}_x \times \mathbf{AB} \mathbf{i}_y) \cdot \mathbf{AB} \mathbf{i}_z \\ &= \left(\mathbf{A} \sum_i B_{ix} \mathbf{i}_i \times \mathbf{A} \sum_j B_{jy} \mathbf{i}_j \right) \cdot \left(\mathbf{A} \sum_k B_{kz} \mathbf{i}_k \right) \\ &= \sum_{ijk} B_{ix} B_{jy} B_{kz} (\mathbf{A} \mathbf{i}_i \times \mathbf{A} \mathbf{i}_j) \cdot \mathbf{A} \mathbf{i}_k \\ &= \det \mathbf{A} \left(\sum_{ijk} \varepsilon_{ijh} B_{ix} B_{jy} B_{kz} \right) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Il determinante del tensore trasposto e del tensore inverso (se esiste), sono forniti poi dalle seguenti relazioni:

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}, \quad \det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}. \quad (190)$$

La prima delle (190) è equivalente allo sviluppo (86) del determinante, mentre la seconda è una diretta conseguenza della definizione $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}$ di tensore inverso. Se $\mathbf{R} \in \text{Orth}^+$, cioè se $\mathbf{R}$ è una rotazione, risulta poi:

$$\det \mathbf{R} = (\mathbf{R} \mathbf{i}_x \times \mathbf{R} \mathbf{i}_y) \cdot \mathbf{R} \mathbf{i}_z = \mathbf{R} \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{R} \mathbf{i}_z,$$

e quindi:

$$\det \mathbf{R} = 1. \quad (191)$$

Se invece $\mathbf{Q} \in \text{Orth}$, cioè se $\mathbf{Q}$ è una trasformazione ortogonale, dalla relazione $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ risulta $(\det \mathbf{Q})^2 = 1$ e quindi:

$$\det \mathbf{Q} = \pm 1. \quad (192)$$

È infine possibile riottenere l'invarianza del determinante al variare della base ortonormale da quella $\hat{\mathbf{i}}_i$ a quella $\hat{\mathbf{i}}_i$ ruotata tramite $\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} \det \hat{\mathbf{A}} &= (\hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{i}}_x \times \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{i}}_y) \cdot \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{i}}_z \\ &= (\mathbf{A} \mathbf{R} \hat{\mathbf{i}}_x \times \mathbf{A} \mathbf{R} \hat{\mathbf{i}}_y) \cdot \mathbf{A} \mathbf{R} \hat{\mathbf{i}}_z = \det(\mathbf{A} \mathbf{R}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{R} = \det \mathbf{A}. \end{aligned}$$

7 Assiale di una trasformazione emisimmetrica

Dato un vettore $\mathbf{a}$, la trasformazione $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{v}$, che ad un vettore $\mathbf{v}$ associa il suo prodotto vettoriale con il vettore $\mathbf{a}$, rappresenta un tensore doppio emisimmetrico. Infatti, la linearità di tale trasformazione è una diretta conseguenza della linearità del prodotto vettoriale:

$$\mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha (\mathbf{a} \times \mathbf{u}) + \beta (\mathbf{a} \times \mathbf{v}).$$

Inoltre, l'emisimmetria di tale tensore doppio è equivalente alla seguente uguaglianza:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}. \quad (193)$$

I due membri di tale uguaglianza, in componenti rispetto ad una base ortonormale, si scrivono $\sum_{ijh} \varepsilon_{ijh} a_i u_j v_h$, e $-\sum_{ihj} \varepsilon_{ihj} a_i v_h u_j$ rispettivamente. L'identità $\varepsilon_{ijh} = -\varepsilon_{ihj}$ dimostra quindi la validità della (193).

Le componenti in una base ortonormale del tensore doppio emisimmetrico $\mathbf{A}$ associato al vettore $\mathbf{a}$ si ottengono dall'uguaglianza:

$$\sum_j A_{ij} u_j = \sum_{hj} \varepsilon_{ijh} a_h u_j, \quad (194)$$

che deve valere per ogni vettore $\mathbf{u}$. Ne risulta quindi:

$$A_{ij} = -\sum_h \varepsilon_{ijh} a_h, \quad (195)$$

il che equivale a scrivere:

$$[\mathbf{A}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (196)$$

Inversamente, dato un tensore doppio emisimmetrico esiste sempre un vettore $\mathbf{a}$, detto *vettore assiale* di $\mathbf{A}$, tale che

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{u}, \quad (197)$$

per ogni vettore $\mathbf{u}$. Il vettore $\mathbf{a}$ si rappresenta in componenti ortonormali nella forma:

$$a_i = -\frac{1}{2} \sum_{jh} \varepsilon_{ijh} A_{jh}. \quad (198)$$

Tale proprietà è dimostrata dalla seguente catena di uguaglianze, dove è esplicitamente utilizzata l'emisimmetria di $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{u})_k &= \sum_{il} \varepsilon_{kil} a_i u_l && \text{per la (91)} \\ &= \sum_{il} \varepsilon_{kil} \left(-\frac{1}{2} \sum_{jh} \varepsilon_{ijh} A_{jh} \right) u_l && \text{per la (198)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{l,j,h} \left(\sum_i \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{ijh} \right) A_{jh} u_l & \varepsilon_{ikl} = -\varepsilon_{kil} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{l,j,h} \left(\delta_{kj} \delta_{lh} - \delta_{kh} \delta_{lj} \right) A_{jh} u_l & \text{per la } \varepsilon\text{-}\delta \text{ identità (85)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_l (A_{kl} - A_{lk}) u_l & \sum_{j,h} \delta_{kj} \delta_{lh} A_{jh} = A_{kl}, \dots \\
&= \sum_l A_{kl} u_l = (\mathbf{A} \mathbf{u})_k. & \text{per la emisimmetria di } \mathbf{A}
\end{aligned}$$

La (198) equivale a scrivere:

$$\{\mathbf{a}\} \equiv \begin{Bmatrix} A_{zy} \\ A_{xz} \\ A_{yx} \end{Bmatrix}. \quad (199)$$

8 Trasformazione di bivettori e trivettori

8.1 Trasformazione del prodotto misto (trivettori)

Vogliamo mostrare come varia il prodotto misto di tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ a seguito dell'applicazione, ad ognuno di tali vettori, di un tensore doppio $\mathbf{A}$. Ricordiamo che il prodotto misto rappresenta la misura, con segno, del volume individuato dai tre vettori e che tale volume rappresenta la componente del trivettore individuato da $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ rispetto al trivettore individuato da una base ortonormale $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$ ed $\mathbf{i}_z$. Precisamente, vogliamo mostrare che vale la relazione:

$$(\mathbf{A} \mathbf{u} \times \mathbf{A} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{A} \mathbf{w} = \det \mathbf{A} \{ (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \}. \quad (200)$$

Si noti che il prodotto misto $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ è invariante nell'insieme delle terne di vettori che rappresentano uno stesso trivettore. La (200) definisce quindi una trasformazione lineare nello spazio dei trivettori, indotta dal tensore doppio $\mathbf{A}$. Inoltre, la (200) può essere vista quale definizione indipendente di $\det \mathbf{A}$:

$$\det \mathbf{A} = \frac{(\mathbf{A} \mathbf{u} \times \mathbf{A} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{A} \mathbf{w}}{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}}. \quad (201)$$

Dimostrazione. La (200) può essere dimostrata dalle seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \mathbf{u} \times \mathbf{A} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{A} \mathbf{w} &= \left\{ \mathbf{A} \sum_i u_i \mathbf{i}_i \times \mathbf{A} \sum_j v_j \mathbf{i}_j \right\} \cdot \mathbf{A} \sum_h w_h \mathbf{i}_h \\
&= \sum_{i,j,h} u_i v_j w_h (\mathbf{A} \mathbf{i}_i \times \mathbf{A} \mathbf{i}_j) \cdot \mathbf{A} \mathbf{i}_h \\
&= \det \mathbf{A} \left(\sum_{i,j,h} \varepsilon_{ijh} u_i v_j w_h \right),
\end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è utilizzata la relazione (188). ■

8.2 Trasformazione del prodotto vettoriale (bivettori)

Il modulo del prodotto vettoriale di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ rappresenta la misura dell'area individuata dai due vettori, ed inoltre le componenti di tale prodotto vettoriale rappresentano le componenti del bivettore individuato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ rispetto alla base costituita dai tre bivettori $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y)$, $(\mathbf{i}_z, \mathbf{i}_x)$ e $(\mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)$ individuati dai versori degli assi coordinati.

Il prodotto vettoriale di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si trasforma, a seguito dell'applicazione, ad ognuno di tali vettori, di un tensore doppio $\mathbf{A}$ invertibile, nel modo seguente:

$$\mathbf{A} \mathbf{u} \times \mathbf{A} \mathbf{v} = (\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}). \quad (202)$$

Il prodotto vettoriale $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ è invariante nell'insieme delle coppie di vettori che rappresentano uno stesso bivettore. La (202) definisce quindi una trasformazione lineare nello spazio dei bivettori, indotta dal tensore doppio $\mathbf{A}$.

La dimostrazione della (202) è immediata se $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$. Supponiamo allora che sia $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq 0$. Mostriamo innanzitutto che le componenti del vettore $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{u} \times \mathbf{A}\mathbf{v})$ in direzione di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono nulle, cioè che tale vettore ha la direzione di $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{u} \times \mathbf{A}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} &= (\mathbf{A}\mathbf{u} \times \mathbf{A}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{A}\mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{u} \times \mathbf{A}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} &= (\mathbf{A}\mathbf{u} \times \mathbf{A}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} = 0.\end{aligned}$$

Il versore della direzione di $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, concorde con questo, vale

$$\mathbf{e}_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}.$$

La seguente uguaglianza completa quindi la dimostrazione:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{u} \times \mathbf{A}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} &= \frac{1}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} (\mathbf{A}\mathbf{u} \times \mathbf{A}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\ &= \frac{\det \mathbf{A}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\ &= \det \mathbf{A} |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|.\end{aligned}$$

8.3 Componenti covarianti del prodotto vettoriale

Si può sfruttare la (202) per ottenere le componenti covarianti del prodotto vettoriale. A tale scopo si riprenda la relazione (89), che esprime il prodotto vettoriale di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ in funzione del prodotto vettoriale tra i vettori di una generica base covariante $\mathbf{g}_i$, relazione che qui riscriviamo:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \sum_{ij} u^i v^j (\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j). \quad (203)$$

Si consideri allora una base ortonormale destra $\mathbf{i}_i$ e la trasformazione $\mathbf{T}$ che porta la base ortonormale destra in quella covariante:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{T} \mathbf{i}_i. \quad (204)$$

Per via delle (204) e (202) risulta:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j &= \mathbf{T} \mathbf{i}_i \times \mathbf{T} \mathbf{i}_j = (\det \mathbf{T}) \mathbf{T}^{-T} (\mathbf{i}_i \times \mathbf{i}_j) \\ &= (\det \mathbf{T}) \mathbf{T}^{-T} (\sum_h \varepsilon_{ijh} \mathbf{i}_h) = (\det \mathbf{T}) \sum_h \varepsilon_{ijh} \mathbf{g}^h,\end{aligned} \quad (205)$$

dove si è sfruttata la proprietà (82b) delle basi ortonormali e la trasformazione (145) tra le basi duali. Si ricordi che nel caso di una base ortonormale la base covariante e la sua duale controvariante coincidono. Si noti inoltre che ε_{ijh} è un semplice simbolo che non dipende dal riferimento e i suoi indici non sono né covarianti e né controvarianti. Invece, per via della (204), alla base $\alpha \mathbf{g}_i$ amplificata corrisponde la trasformazione $\alpha \mathbf{T}$ e quindi il determinante $\alpha^3 \det \mathbf{T}$. Questo significa che la quantità complessiva $(\det \mathbf{T}) \varepsilon_{ijh}$ può essere considerata come una quantità con tre indici covarianti. Inoltre il determinante $\det \mathbf{T}$, per via della (200) e della trasformazione (204), può essere espresso, senza riferimento alla base ortonormale, nella forma:

$$\det \mathbf{T} = (\mathbf{T} \mathbf{i}_x \times \mathbf{T} \mathbf{i}_y) \cdot \mathbf{T} \mathbf{i}_z = (\mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y) \cdot \mathbf{g}_z. \quad (206)$$

Tale espressione ci dice innanzitutto che $\det \mathbf{T}$ dipende solo dalla scelta della base covariante e non da quella della base ortonormale destra di partenza. Risulta inoltre evidente che $\det \mathbf{T}$ è negativo nel caso in cui la base $\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y, \mathbf{g}_z$ è sinistra. Naturalmente ciò dipende dal fatto che

si è prescelta una orientazione destra dello spazio e che i vettori assiali sono rappresentati nel modo conseguente a tale scelta, indipendentemente dal fatto che la base prescelta sia destra o sinistra.

Si indichi ora con g il determinante delle componenti covarianti del tensore metrico rispetto alla base $\mathbf{g}_i$, che sappiamo essere coincidenti con le componenti covarianti del tensore identità:

$$g = \det [\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j] = \det [I_{ij}]. \quad (207)$$

Tale determinante è sempre positivo poiché il tensore metrico è una forma bilineare simmetrica definita positiva, avente quindi determinante della matrice delle componenti positivo. Si osservi inoltre che il determinante di un tensore doppio riguarda gli elementi di Lin e si calcola quindi con riferimento alle componenti miste. Si può anzi dire che proprio perché il determinante è calcolato con riferimento alle componenti miste viene generato un invariante. Il concetto di determinante non esiste invece per le forme bilineari poiché le componenti covarianti originano una matrice il cui determinante dipende dalla base. D'altronde, amplificando la base tramite uno scalare α le componenti con due indici covarianti si amplificano di α^2 e quindi il determinante si amplifica di α^6 non potendo essere di conseguenza un invariante. In altri termini in generale si ha $\det \mathbf{I} \neq \det [I_{ij}]$. Ciò premesso, il determinante $\det \mathbf{T}$, definito dalla (206), della trasformazione $\mathbf{T}$ definita dalla (204) può allora essere espresso anche nella forma:

$$\det \mathbf{T} = \pm \sqrt{g}, \quad (208)$$

dove va scelto il segno + oppure quello – a seconda che la base covariante di vettori sia rispettivamente destra oppure sinistra.

La (208) si può dimostrare notando che:

$$\det \mathbf{T} = \pm \sqrt{\det (\mathbf{T}^T \mathbf{T})},$$

e valutando il determinante di $\mathbf{T}^T \mathbf{T}$ utilizzando le sue componenti ortonormali:

$$\det (\mathbf{T}^T \mathbf{T}) = \det [\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{i}_j] = \det [\mathbf{T} \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{T} \mathbf{i}_j] = \det [\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j].$$

In definitiva la (205), insieme alla (208), fornisce la seguente rappresentazione del prodotto vettoriale di due elementi di una base covariante:

$$\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j = \pm \sum_h \sqrt{g} \varepsilon_{ijh} \mathbf{g}^h, \quad (209)$$

e questa, introdotta nella (203), fornisce infine la rappresentazione del prodotto vettoriale di due vettori:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \pm \sum_{ijh} \sqrt{g} \varepsilon_{ijh} u^i v^j \mathbf{g}^h. \quad (210)$$

In altri termini, le componenti covarianti del prodotto vettoriale di due generici vettori valgono:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_h = \pm \sum_{ij} \sqrt{g} \varepsilon_{ijh} u^i v^j, \quad (211)$$

da cui consegue poi la rappresentazione del prodotto misto di tre vettori:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \pm \sum_{ijh} \sqrt{g} \varepsilon_{ijh} u^i v^j w^h. \quad (212)$$

Riferimenti bibliografici

Burke, W. L. (1985) *Applied Differential Geometry*. Cambridge University Press, Cambridge.

- Fleming, W. (1977) *Functions of Several Variables*. Springer-Verlag, New York, seconda edizione. Corrected third printing, 1987.
- Hilbert, D. (1970) *Fondamenti della Geometria, con i supplementi di Paul Bernays*. Feltrinelli, Milano. [Titolo dell'Opera Originale: *Grundlagen der Geometrie*, decima edizione, Teubner, Stuttgart, 1968].
- ISO 31-11 (1992) *Quantities and Units: Mathematical Signs and Symbols for Use in the Physical Sciences and Technology*. International Organization for Standardization, Geneva.
- UNI CEI ISO 31-11 (1998) *Grandezze ed Unità di Misura: Segni e Simboli Matematici da Usare nelle Scienze Fisiche e nella Tecnica*. UNI Ente Nazionale di Unificazione, Milano.