

ANALISI TENSORIALE

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile

Università di Trieste

Piazzale Europa 1, Trieste

Trieste, 18 giugno 2005

Indice

1 Operatori differenziali	3
1.1 Derivazione e integrazione delle funzioni di una sola variabile	3
1.1.1 Derivazione	3
1.1.2 Regole di derivazione	4
1.1.3 Integrazione	5
1.2 Campi scalari, vettoriali e tensoriali	6
1.2.1 Gradiente	6
1.2.2 Divergenza	6
1.2.3 Rotore	8
1.2.4 Formula di Green	9
1.2.5 Campi scalari	10
1.2.6 Campi vettoriali	11
1.2.7 Campi tensoriali	12
2 Sistemi di coordinate generali	15
2.1 Basi locali	15
2.2 Base duale	18
2.3 Derivazione covariante (gradiente)	20
2.4 Esempio: coordinate cilindriche	22
3 Tensore di curvatura di Riemann-Christoffel	25
3.1 Indici di Christoffel di prima specie	25
3.2 Inversione nell'ordine di derivazione covariante	26

Nei capitoli seguenti è utilizzata la convenzione di Einstein della sommatoria implicita: ogni volta che in un monomio un indice è ripetuto due volte si sottintende una sommatoria in tale indice.

Capitolo 1

Operatori differenziali

1.1 Derivazione e integrazione delle funzioni di una sola variabile

1.1.1 Derivazione

Siano date delle funzioni scalari f , vettoriali $\underline{u}$ e tensoriali $\underline{A}$ di una sola variabile (per es. il tempo):

$$f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t),$$

$$\underline{u}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{V}, \quad t \mapsto \underline{u}(t),$$

$$\underline{A}: \mathcal{I} \rightarrow \text{Lin}, \quad t \mapsto \underline{A}(t),$$

dove $\mathcal{I}$ è un intervallo di $\mathbb{R}$. Le derivate risultano:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{\Delta t},$$

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{u}(t_2) - \underline{u}(t_1)}{\Delta t},$$

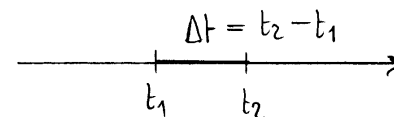
$$\frac{d\underline{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{A}(t_2) - \underline{A}(t_1)}{\Delta t}.$$

Gli incrementi Δf , $\Delta \underline{u}$ e $\Delta \underline{A}$ delle funzioni dovute all'incremento Δt della variabile indipendente valgono:

$$\Delta f = f(t_2) - f(t_1) = \frac{df}{dt} \Delta t + o(\Delta t),$$

$$\Delta \underline{u} = \underline{u}(t_2) - \underline{u}(t_1) = \Delta t \frac{d\underline{u}}{dt} + o(\Delta t),$$

$$\Delta \underline{A} = \underline{A}(t_2) - \underline{A}(t_1) = \Delta t \frac{d\underline{A}}{dt} + o(\Delta t).$$



Le parti lineari df , $d\underline{u}$ e $d\underline{A}$ degli incrementi di f , $\underline{u}$, e $\underline{A}$ valgono:

$$df = \frac{df}{dt} \Delta t,$$

$$d\underline{y} = \Delta t \frac{d\underline{y}}{dt},$$

$$d\underline{A} = \Delta t \frac{d\underline{A}}{dt}.$$

Si noti che le trasformazioni lineari $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \rightarrow V$ e $\mathbb{R} \rightarrow \text{Lin}$ sono del tipo $t \mapsto ct$, $t \mapsto t\underline{c}$ e $t \mapsto t\underline{C}$ rispettivamente, dove c , $\underline{c}$ e $\underline{C}$ sono scalari, vettori e tensori costanti. Le precedenti relazioni affermano che tali quantità costanti sono individuate dalle derivate.

1.1.2 Regole di derivazione

Somma :

$$\frac{d}{dt}(\alpha + \beta) = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}.$$

Infatti per la associatività e la commutatività dell'addizione:

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha + \beta) &= (\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1) \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1) = \Delta\alpha + \Delta\beta. \end{aligned}$$

Prodotto :

$$\frac{d}{dt}(\alpha \beta) = \frac{d\alpha}{dt} \beta + \alpha \frac{d\beta}{dt}.$$

Infatti per la distributività della somma rispetto al prodotto:

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha \beta) &= \alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 \beta_1 \\ &= \alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 \beta_2 + \alpha_1 \beta_2 - \alpha_1 \beta_1 \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1) \beta_2 + \alpha_1 (\beta_2 - \beta_1) \\ &= \Delta\alpha \beta_2 + \alpha_1 \Delta\beta. \end{aligned}$$

Si noti che la formula è valida indipendentemente dalla commutatività della moltiplicazione.

Inverso :

$$\frac{d}{dt}(\alpha^{-1}) = -\alpha^{-1} \frac{d\alpha}{dt} \alpha^{-1}.$$

Infatti:

$$\alpha \alpha^{-1} = 1 \implies \frac{d\alpha}{dt} \alpha^{-1} + \alpha \frac{d\alpha^{-1}}{dt} = 0.$$

Se il prodotto è commutativo:

$$\frac{d}{dt}(\alpha^{-1}) = -\alpha^{-2} \frac{d\alpha}{dt}.$$

Linearità della derivazione:

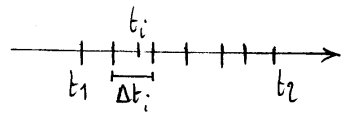
$$\frac{d}{dt}(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) = \alpha_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\beta_2}{dt},$$

dove α_1 e α_2 sono funzioni costanti.

1.1.3 Integrazione

L'integrale di una funzione, per es. vettoriale, di una variabile scalare risulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{u}(t) dt = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta t_i \underline{u}(t_i).$$



Somma:

$$\int dt (\underline{u} + \underline{v}) = \int dt \underline{u} + \int dt \underline{v}.$$

Prodotto nel caso $c = \text{cost}$:

$$\int dt c \underline{u} = c \int dt \underline{u}.$$

Prodotto nel caso $\underline{u} = \text{cost}$:

$$\int dt c \underline{u} = \left(\int c dt \right) \underline{u}.$$

Ne risulta che l'integrale è un operatore lineare.

Utilizzando le componenti vettoriali fatte rispetto ad un sistema cartesiano ortogonale si ottiene l'estensione del teorema fondamentale del calcolo integrale alle funzioni vettoriali:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\underline{u}}{dt} dt &= \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{du_i}{dt} dt \right) \underline{e}_i \\ &= \left(u_i(t_2) - u_i(t_1) \right) \underline{e}_i = \\ &= \underline{u}(t_2) - \underline{u}(t_1). \end{aligned}$$

1.2 Campi scalari, vettoriali e tensoriali

Le funzioni con cui si ha a che fare nell'ambito della meccanica del continuo sono funzioni definite nella generica configurazione B del corpo continuo oppure nella configurazione lagrangiana di riferimento.

Queste funzioni possono essere a valori scalari, vettoriali oppure tensoriali e sono chiamate campi (scalari, vettoriali e rispettivamente tensoriali):

$$\left\{ \begin{array}{l} f: B \rightarrow \mathbb{R} \\ \underline{v}: B \rightarrow \mathcal{V} \\ \underline{A}: B \rightarrow \text{Lin} \end{array} \right. .$$

1.2.1 Gradiente

I campi scalari, vettoriali e tensoriali subiscono degli incrementi passando da un punto P ad un altro



punto Q tramite il vettore $Q-P$:

$$\Delta f = f(Q) - f(P),$$

$$\Delta \underline{v} = \underline{v}(Q) - \underline{v}(P),$$

$$\Delta \underline{A} = \underline{A}(Q) - \underline{A}(P).$$

Lo studio di tali incrementi nell'intorno di un punto conduce al concetto di gradiente (studio della parte lineare dell'incremento).

1.2.2 Divergenza

Per i campi vettoriali e tensoriali legati alle aree orientate, ovvero rappresentanti delle

trasformazioni lineari del tipo:

$$\underline{v}: d\underline{A} \mapsto \underline{v} \cdot d\underline{A} = \underline{v} \cdot \underline{n} dA, \quad v \in \mathcal{V}$$

$$\underline{\sigma}: d\underline{A} \rightarrow \underline{\sigma} d\underline{A} = \underline{\sigma} \underline{n} dA, \quad \underline{\sigma} \in \text{Lin}$$

è naturale introdurre il concetto di divergenza,
che riduce il flusso attraverso una superficie chiusa
ad una funzione del punto:

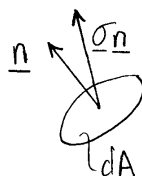
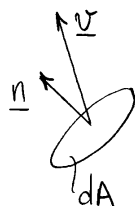
$$\text{div } \underline{v} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\int_{\partial V} \underline{v} \cdot \underline{n} dA}{V} \quad (\text{scalare})$$

$$\text{div } \underline{\sigma} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\int_{\partial V} \underline{\sigma} \underline{n} dA}{V} \quad (\text{vettore})$$

avendo tenuto conto che attraverso un'area orientata $d\underline{A} = dA \underline{n}$
si ha:

$$\text{flusso scalare di } \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{n} dA,$$

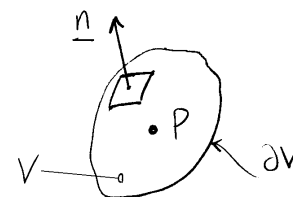
$$\text{flusso vettoriale di } \underline{\sigma} = \underline{\sigma} \underline{n} dA,$$



e che quindi il flusso attraverso una superficie chiusa vale:

$$\text{flusso scalare di } \underline{v} = \int_{\partial V} \underline{v} \cdot \underline{n} dA,$$

$$\text{flusso vettoriale di } \underline{\sigma} = \int_{\partial V} \underline{\sigma} \underline{n} dA.$$



Dalle definizioni seguono immediatamente i
teoremi della divergenza:

$$\int_{\partial V} \underline{v} \cdot \underline{n} dA = \int_V \text{div } \underline{v} dV,$$

$$\int_{\partial V} \underline{\sigma} \underline{n} dA = \int_V \text{div } \underline{\sigma} dV.$$

Risulta:

$$(\text{div } \underline{\sigma}) \cdot \underline{a} = \text{div}(\underline{\sigma}^T \underline{a}), \quad \text{per ogni } \underline{a} \in \mathcal{V}.$$

Infatti:

$$\begin{aligned}\int_V \operatorname{div}(\underline{\sigma}^T \underline{a}) dV &= \int_{\partial V} \underline{\sigma}^T \underline{a} \cdot \underline{n} dA \\ &= \int_{\partial V} (\underline{\sigma} \underline{n}) \cdot \underline{a} dA = \underline{a} \cdot \int_{\partial V} \underline{\sigma} \underline{n} dA \\ &= \int_V (\operatorname{div} \underline{\sigma}) \cdot \underline{a} dV,\end{aligned}$$

per ogni V contenente P , e quindi anche:

$$\int_V \{ \operatorname{div}(\underline{\sigma}^T \underline{a}) - (\operatorname{div} \underline{\sigma}) \cdot \underline{a} \} dV = 0$$

come volevasi dimostrare.

1.2.3 Rotore

Per i campi vettoriali e tensoriali legati alle linee orientate, ovvero sia campi di trasformazioni lineari del tipo:

$$\underline{v}: d\underline{s} \rightarrow \underline{v} \cdot d\underline{s} = \underline{v} \cdot \underline{t} ds, \quad \underline{v} \in \mathcal{V},$$

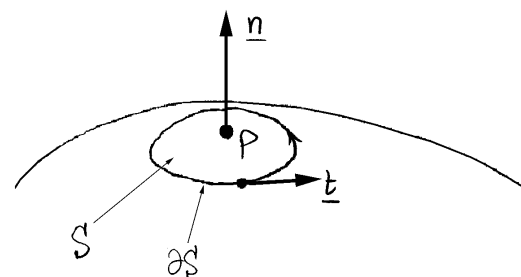
$$\underline{\varepsilon}: d\underline{s} \rightarrow \underline{\varepsilon} d\underline{s} = \underline{\varepsilon} \underline{t} ds, \quad \underline{\varepsilon} \in \operatorname{Lin},$$

è naturale il concetto di rotore che riduce la circolazione su una linea chiusa ad un flusso attraverso una qualunque superficie racchiusa dalla linea:

$$(\operatorname{rot} \underline{v}) \cdot \underline{n} = \lim_{S' \rightarrow P} \frac{\int_{\partial S'} \underline{v} \cdot \underline{t} ds}{S}, \quad \text{per ogni } \underline{n} \in \mathcal{V},$$

$$(\operatorname{rot} \underline{\varepsilon}) \underline{n} = \lim_{S' \rightarrow P} \frac{\int_{\partial S'} \underline{\varepsilon} \underline{t} ds}{S}, \quad \text{per ogni } \underline{n} \in \mathcal{V},$$

dove il limite $S' \rightarrow P$ è inteso su una superficie contenente P e di normale $\underline{n}$ in P .



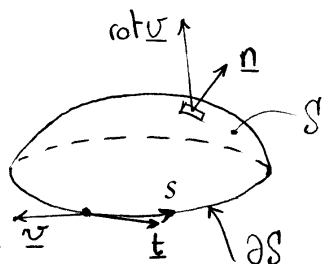
Il rotore di $\underline{v}$ risulta un vettore avente la direzione della normale alle superfici sul contorno delle quali la

circolazione è massima.

Dalle definizioni seguono i teoremi di Stokes:

$$\int_{\partial S} \underline{v} \cdot \underline{t} \, ds = \int_S (\text{rot } \underline{v}) \cdot \underline{n} \, dA,$$

$$\int_{\partial S} \underline{\varepsilon} \underline{t} \, ds = \int_S (\text{rot } \underline{\varepsilon}) \underline{n} \, dA.$$



Risulta:

$$(\text{rot } \underline{\varepsilon})^T \underline{a} = \text{rot}(\underline{\varepsilon}^T \underline{a}), \text{ per ogni } \underline{a} \in \mathcal{V}.$$

Infatti se S è una superficie che in P ha per normale un $\underline{n}$ generico si ottiene:

$$\int_S \text{rot}(\underline{\varepsilon}^T \underline{a}) \cdot \underline{n} \, dA = \int_{\partial S} \underline{\varepsilon}^T \underline{a} \cdot \underline{t} \, ds =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\partial S} \underline{\varepsilon} \underline{t} \cdot \underline{a} \, ds = \underline{a} \cdot \int_{\partial S} \underline{\varepsilon} \underline{t} \, ds = \\ &= \int_S (\text{rot } \underline{\varepsilon}) \underline{n} \cdot \underline{a} \, dA = \int_S (\text{rot } \underline{\varepsilon})^T \underline{a} \cdot \underline{n} \, dA \end{aligned}$$

e cioè:

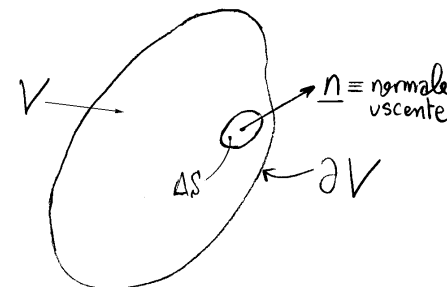
$$\int_V \{ \text{rot}(\underline{\varepsilon}^T \underline{a}) - (\text{rot } \underline{\varepsilon})^T \underline{a} \} \cdot \underline{n} \, dV = 0,$$

per ogni $\underline{n} \in \mathcal{V}$, come volevasi dimostrare

1.2.4 Formula di Green

Dato un campo scalare $f: B \rightarrow \mathbb{R}$, definito in un volume B dello spazio euclideo E , vale la formula:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dV = \int_{\partial V} f n_i \, dS,$$

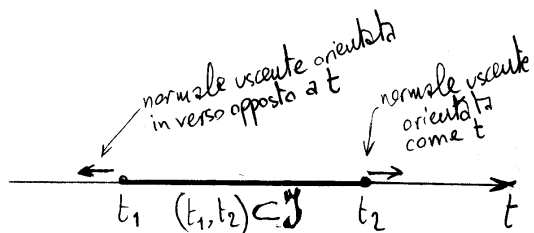


dove V è un qualunque volume finito contenuto in B (il tutto naturalmente condizionato da opportune condizioni di regolarità).

Nel caso di una funzione di una sola variabile tale formula equivale al teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{df}{dt} \right) dt = f(t_2) - f(t_1),$$

valido in ogni intervallo (t_1, t_2) contenuto nell'intervallo $\mathcal{I}$ di definizione della funzione $f: \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



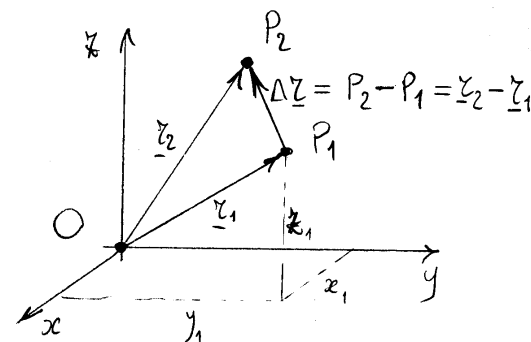
1.2.5 Campi scalari

Sia dato un campo scalare f :

$$f: \begin{cases} B_0 \rightarrow \mathbb{R}, & P \rightarrow f(P) \\ \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, & \underline{r} \rightarrow f(\underline{r}) \\ \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, & (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) \end{cases},$$

dove:

$$\underline{r} = P - O = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z.$$



Una trasformazione lineare $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ è del tipo $\underline{v} \rightarrow \underline{a} \cdot \underline{v}$ con $\underline{a}$ vettore costante.

Se esiste $\underline{a} \in \mathcal{V}$ tale che:

$$\Delta f = \underbrace{\underline{a} \cdot \Delta \underline{r}}_{\text{parte lineare dell'incremento di } f} + o(|\Delta \underline{r}|),$$

dove Δf funzione di $\Delta \underline{r}$, allora:

$$\underline{a} = \text{grad } f.$$

In componenti:

$$\{\text{grad } f\} = \begin{Bmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{Bmatrix}.$$

Teorema del gradiente per un campo scalare

Dato un campo scalare $f: B \rightarrow \mathbb{R}$, la formula di Green permette di scrivere:

$$\begin{aligned} \int_V \text{grad } f \, dV &= \left(\int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dV \right) \underline{e}_i \\ &= \int_{\partial V} f n_i \underline{e}_i dS = \int_{\partial V} f \underline{n} dS, \end{aligned}$$

e quindi:

$$\int_V \text{grad } f \, dV = \int_{\partial V} f \underline{n} dV.$$

1.2.6 Campi vettoriali

Sia dato un campo vettoriale $\underline{u}$:

$$\underline{u}: B_0 \rightarrow \mathcal{V}, \quad P \rightarrow \underline{u}(P).$$

In tal caso, la parte lineare dell'incremento di $\underline{u}$ è una trasformazione lineare $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, cioè è un tensore doppio, indicato con $\text{grad } \underline{u}$:

$$\Delta \underline{u} = (\text{grad } \underline{u}) \Delta \underline{r} + o(|\Delta \underline{r}|).$$

Le componenti ortonormali risultano:

$$[\text{grad } \underline{u}]_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Infatti, se $\Delta \underline{r} = a \underline{e}_j$ allora:

$$\Delta \underline{u} = a (\text{grad } \underline{u}) \underline{e}_j + o(a),$$

e quindi:

$$(\text{grad } \underline{u}) \underline{e}_j = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{u}}{a} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_j}.$$

Teorema del gradiente per un campo vettoriale

Dato un campo vettoriale $\underline{v} : B \rightarrow \mathcal{V}$, si ha:

$$\int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV = \int_{\partial V} v_i n_j dS,$$

da cui si trae:

$$\int_V \text{grad} \underline{v} dV = \int_{\partial V} \underline{v} \otimes \underline{n} dS,$$

$$\int_V \text{tr}(\text{grad} \underline{v}) dV = \int_{\partial V} \underline{v} \cdot \underline{n} dS.$$

Il teorema del gradiente per un campo vettoriale dimostra l'esistenza della divergenza di un campo vettoriale (naturalmente nell'ipotesi che valgano le condizioni di regolarità richieste dal teorema del gradiente) e l'uguaglianza:

$$\text{div} \underline{v} = \text{tr}(\text{grad} \underline{v}).$$

In componenti:

$$\text{div} \underline{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

1.2.7 Campi tensoriali

Sia dato un campo tensoriale $\underline{A}$:

$$\underline{A} : B_0 \rightarrow \text{Lin}, \quad P \rightarrow \underline{A}(P).$$

In tal caso, la parte lineare dell'incremento di $\underline{A}$ è una trasformazione lineare $\mathcal{V} \rightarrow \text{Lin}$, e tale risulta quindi essere il gradiente:

$$\Delta \underline{A} = \underbrace{(\text{grad} \underline{A}) \Delta \underline{x}}_{\text{parte lineare dell'incremento di } \underline{A}} + o(|\Delta \underline{x}|).$$

Le trasformazioni lineari $\mathcal{V} \rightarrow \text{Lin}$, e quindi $\text{grad} \underline{A}$, sono caratterizzate da componenti a tre indici. In B_0 , la base $\underline{e}_k$ di $\mathcal{V}$ viene trasformata da $\text{grad} \underline{A}$ nei tre tensori doppi $(\text{grad} \underline{A}) \underline{e}_k$ che a loro volta possono rappresentarsi nella forma:

$$(\text{grad } \underline{A}) \underline{e}_k = (\text{grad } A)_{ijk} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j.$$

Le $3 \times 3 \times 3 = 27$ componenti di $\text{grad } \underline{A}$ risultano:

$$(\text{grad } A)_{ijk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}.$$

La divergenza di un campo tensoriale $\underline{\sigma}$ resta poi individuata dalla condizione:

$$(\text{div } \underline{\sigma}) \cdot \underline{a} = \text{div}(\underline{\sigma}^T \underline{a}), \text{ per ogni } \underline{a} \in \mathcal{V}.$$

In componenti:

$$\begin{aligned} (\text{div } \underline{\sigma})_i &= (\text{div } \underline{\sigma}) \cdot \underline{e}_i = \text{div}(\underline{\sigma}^T \underline{e}_i) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\underline{e}_j \cdot \underline{\sigma}^T \underline{e}_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\underline{e}_i \cdot \underline{\sigma} \underline{e}_j). \end{aligned}$$

In definitiva:

$$(\text{div } \underline{\sigma})_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial z}.$$

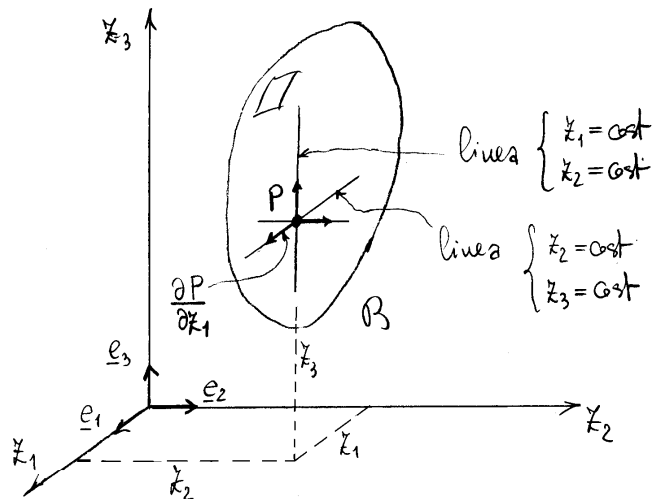
Capitolo 2

Sistemi di coordinate generali

2.1 Basi locali

Un sistema di riferimento cartesiano ortogonale dello spazio euclideo $\mathcal{E}$ mappa $\mathcal{E}$ stesso in $\mathbb{R}^3$ e un suo aperto B (una configurazione del corpo continuo) in un aperto $U_{\mathcal{E}}$ di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{Z}: B \rightarrow U_{\mathcal{Z}}, \quad P \mapsto \mathcal{Z}(P) = (z_1, z_2, z_3).$$



Tale mappa è biunivoca e quindi invertibile ed è inoltre continua. Le superfici coordinate sono i piani individuati dalle equazioni:

$$z_i(P) = \text{cost},$$

dove le 3 funzioni scalari z_i sono le proiezioni di $\mathcal{Z}$ sugli assi coordinati. Le linee coordinate sono le rette intersezione dei piani coordinati. Tali linee generano in ogni punto P , una base locale e_i dello spazio vettoriale tramite i vettori tangenti alle linee coordinate:

$$e_i = \frac{\partial P}{\partial z_i},$$

dove:

$$P: U_{\mathcal{Z}} \rightarrow B, \quad (z_1, z_2, z_3) \rightarrow P(z_1, z_2, z_3),$$

è la funzione inversa di $\mathcal{Z}$. Chiaramente tutte le basi locali coincidono con la base individuata dai versori degli assi coordinati.

Posto il problema delle coordinate in tale forma è immediata la sua generalizzazione. Intanto non interessa mappare l'intero spazio $\mathcal{E}$ in $\mathbb{R}^3$, ma soltanto la configurazione B del corpo continuo, e, per quel che riguarda l'aperto B , non è limitativo se la mappatura non riguarda tutto B ma solamente un insieme denso in B .

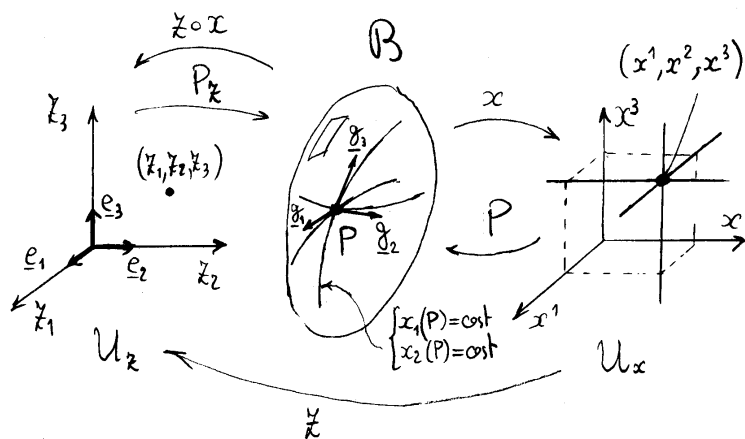
Dunque, un sistema di riferimento generale per l'aperto B sarà una funzione x biunivoca:

$$x: \mathcal{D} \rightarrow U_x, \quad P \rightarrow x(P) = (x^1, x^2, x^3)$$

dove $\mathcal{D}$ è denso in B (ovvero sia le chiusure di $\mathcal{D}$ e di B in $\mathcal{E}$ coincidono: $\bar{\mathcal{D}} = \bar{B}$),

U_x è un aperto di $\mathbb{R}^3$ ed inoltre la funzione è sufficientemente regolare (a volte si richiede che

x sia C^∞ , cioè indefinitamente derivabile e con derivate continue, e che anche la sua inversa P sia C^∞).



Le superfici coordinate hanno equazione:

$$x^i(P) = \text{cost.}$$

Le basi locali $\underline{g}_i$ generate dalle linee coordinate (intersezioni delle superfici coordinate) non sono in generale ortogonali (e quindi ancora meno ortonormali) né costanti in tutto $\mathcal{D}$:

$$\underline{g}_i = \frac{\partial P}{\partial x^i}.$$

Il calcolo delle $\underline{g}_i$ può essere mediato da un riferimento cartesiano ortogonale $\mathbb{Z}$. Se è nota la composizione:

$$\mathbb{Z} : U_x \rightarrow U_z, (x^1, x^2, x^3) \mapsto \mathbb{Z}(x^1, x^2, x^3),$$

perché, per esempio, il sistema generale è stato proprio definito da tale funzione, allora risulta:

$$P = P_z \circ \mathbb{Z},$$

e per la regola di derivazione delle funzioni di funzione risulta:

$$\underline{g}_i = \frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial x^i} \underline{e}_h.$$

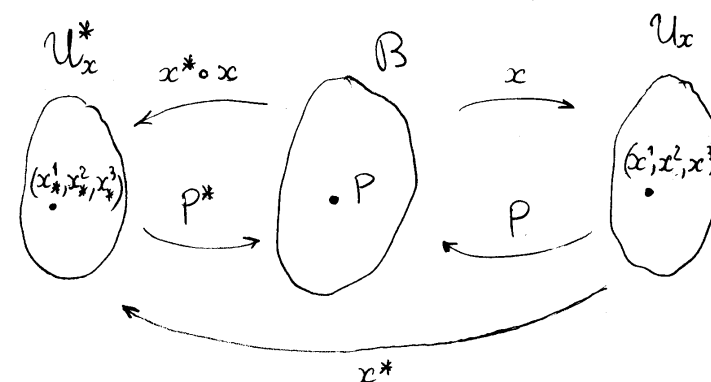
Una funzione del tipo:

$$x^* : U_x \rightarrow U_x^*, (x^1, x^2, x^3) \mapsto x^*(x^1, x^2, x^3),$$

rappresenta un cambiamento di coordinate generali (se la x^* è biunivoca e sufficientemente regolare).

Come prima risulta:

$$P = P^* \circ x^*,$$



e se ne ottiene:

$$\underline{g}_i = \frac{\partial x_*^h}{\partial x^i} \underline{g}_h^*,$$

o, inversamente:

$$\underline{g}_i^* = \frac{\partial x^h}{\partial x_*^i} \underline{g}_h.$$

Un campo vettoriale $\underline{v}$ si rappresenta nel riferimento locale

$\underline{g}_i$ in componenti contravarianti v^i :

$$\underline{v} = v^i \underline{g}_i.$$

Le formule di trasformazione si ottengono facilmente:

$$\underline{v} = v^i \underline{g}_i = v^i \frac{\partial x_*^h}{\partial x^i} \underline{g}_h^*,$$

e quindi:

$$v_*^h = \frac{\partial x_*^h}{\partial x^i} v_i.$$

Un campo tensoriale $\underline{A}$ si rappresenta, nel riferimento locale $\underline{g}_i \otimes \underline{g}_j$, in componenti contravarianti A^{ij} :

$$\underline{A} = A^{ij} \underline{g}_i \otimes \underline{g}_j.$$

Procedendo come prima si ottengono le formule di trasformazione:

$$\underline{A} = A^{ij} \frac{\partial x_*^h}{\partial x^i} \frac{\partial x_*^k}{\partial x^j} \underline{g}_h^* \otimes \underline{g}_k^*,$$

cioè:

$$A_*^{hk} = \frac{\partial x_*^h}{\partial x^i} \frac{\partial x_*^k}{\partial x^j} A^{ij}.$$

2.2 Base duale

La base duale $\underline{g}^i$ (contravariante) della base locale $\underline{g}_i$ (covariante) viene definita come segue:

$$\underline{g}^i \cdot \underline{g}_j = \delta^i_j.$$

Poiché un vettore $\underline{a}$ (in ambiente euclideo) rappresenta una trasformazione lineare $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{v} \mapsto \underline{a} \cdot \underline{v}$, la definizione data è generalizzabile anche al caso di uno spazio vettoriale senza prodotto interno, dove la base duale rappresenta una base dello spazio duale di $\mathcal{V}$, cioè dello spazio delle trasformazioni lineari $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$.

Se $\mathbb{Z}$ rappresenta una trasformazione di coordinate da quelle generali x ad altre cartesiane

ortogonali, risulta:

$$\underline{g}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^h} \underline{e}_h.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^h} \underline{e}_h \right) \cdot \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^j} \underline{e}_k \right) &= \frac{\partial x^i}{\partial x^h} \frac{\partial x^k}{\partial x^j} \delta_{hk} \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^h} \frac{\partial x^h}{\partial x^j} = \delta^i_j. \end{aligned}$$

Dato un campo vettoriale $\underline{v}$ questo si rappresenta nelle basi duali attraverso le componenti covarianti v_i :

$$\underline{v} = v_i \underline{g}^i.$$

Analogamente per un campo tensoriale $\underline{A}$:

$$\underline{A} = A_{ij} \underline{g}^i \otimes \underline{g}^j.$$

Questi però si può anche rappresentare in componenti miste:

$$\underline{A} = A_i{}^j \underline{g}^i \otimes \underline{g}_j = A^i{}_j \underline{g}_i \otimes \underline{g}^j.$$

Formule di trasformazione:

$$v_i^* = \frac{\partial x^h}{\partial x_*^i} v_h,$$

$$A_{ij}^* = \frac{\partial x^h}{\partial x_*^i} \frac{\partial x^k}{\partial x_*^j} A_{hk},$$

$$A_i{}^{*j} = \frac{\partial x^h}{\partial x_*^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^k} A_h{}^k.$$

Risulta:

$$\underline{v} \cdot \underline{g}_i = (v_h \underline{g}^h) \cdot \underline{g}_i = v_i,$$

$$\underline{v} \cdot \underline{g}^i = (v^h \underline{g}_h) \cdot \underline{g}^i = v^i.$$

Quindi le componenti covarianti di $\underline{v}$ si ottengono dalla base covariante:

$$v_i = \underline{v} \cdot \underline{g}_i,$$

e quelle contravarianti dalla base contravariante:

$$v^i = \underline{v} \cdot \underline{g}^i.$$

Analogamente:

$$A_{ij} = \underline{g}_i \cdot \underline{A} \underline{g}_j ,$$

$$A^{ij} = \underline{g}^i \cdot \underline{A} \underline{g}^j ,$$

$$A^i_j = \underline{g}^i \cdot \underline{A} \underline{g}_j .$$

Componenti del tensore identità (o tensore metrico):

$$I_{ij} = \underline{g}_i \cdot \underline{g}_j = g_{ij} ,$$

$$I^{ij} = \underline{g}^i \cdot \underline{g}^j = g^{ij} ,$$

$$I^i_j = \underline{g}^i \cdot \underline{g}_j = \delta^i_j .$$

Significato del tensore metrico:

$$v^2 = \underline{v} \cdot \underline{v} = (v^i \underline{g}_i) \cdot (v^j \underline{g}_j) = g_{ij} v^i v^j ,$$

e analogamente:

$$v^2 = g^{ij} v_i v_j = v_i v^i .$$

2.3 Derivazione covariante (gradiente)

Cerchiamo le componenti del gradiente.

1) Campo scalare f :

$$f_{,i} = (\text{grad } f)_i = \text{grad } f \cdot \underline{g}_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} .$$

2) Campo vettoriale $\underline{v}$:

$$v_{i,j} = (\text{grad } \underline{v})_{ij} = \underline{g}_i \cdot (\text{grad } \underline{v}) \underline{g}_j .$$

$$= \underline{g}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}}{\partial x^j}$$

$$= \underline{g}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} (v_h \underline{g}^h)$$

$$= \frac{\partial v_i}{\partial x^j} + v_h \underline{g}_i \cdot \frac{\partial \underline{g}^h}{\partial x^j} .$$

Posto:

$$\gamma^h_{ij} = -\underline{g}_i \cdot \frac{\partial \underline{g}^h}{\partial x_j} ,$$

risulta :

$$v_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \gamma_{ij}^h v_h ,$$

e i coefficienti γ_{ij}^h vengono detti simboli di Christoffel di seconda specie.

Derivando la definizione $\underline{g}^h \cdot \underline{g}_i = \delta_i^h$ di base duale si ottiene :

$$\frac{\partial \underline{g}^h}{\partial x^i} \cdot \underline{g}_i + \underline{g}^h \cdot \frac{d \underline{g}_i}{dx^i} = 0 ,$$

e quindi :

$$\gamma_{ij}^h = \underline{g}^h \cdot \frac{\partial \underline{g}_i}{\partial x_j} .$$

Mediando con un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\underline{z}$:

$$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{z}_l}{\partial x^i} \underline{e}_l , \quad \underline{g}^h = \frac{\partial x^h}{\partial \underline{z}_k} \underline{e}_k ,$$

si ottiene :

$$\gamma_{ij}^h = \frac{\partial^2 \underline{z}_k}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^h}{\partial \underline{z}_k} .$$

Procedendo in modo analogo :

$$v^i{}_{,j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \gamma_{hj}^i v^h .$$

2) Campo tensoriale A :

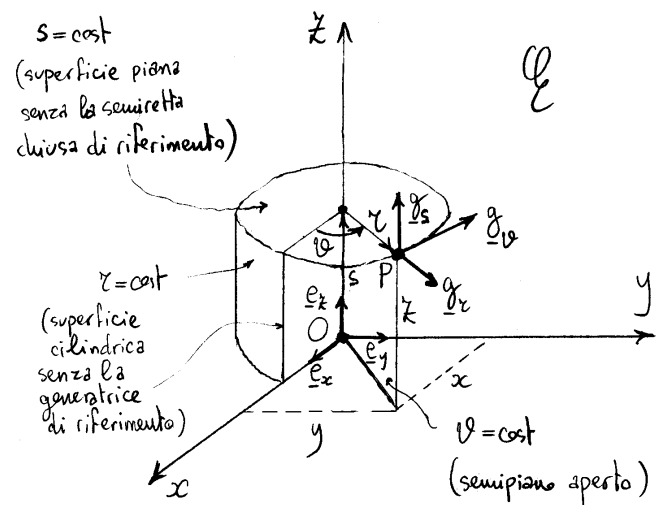
$$A_{ij,k} = (\text{grad } \underline{A})_{ij,k} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} - \gamma_{ik}^h A_{hj} - \gamma_{jk}^h A_{ih} ,$$

$$A^i{}_{j,k} = \frac{\partial A^i{}_j}{\partial x^k} + \gamma_{hk}^i A^h{}_j - \gamma_{jk}^h A^i{}_h ,$$

$$A^{ij}{}_{,k} = \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^k} + \gamma_{hk}^i A^{hj} + \gamma_{hk}^j A^{ih} .$$

2.4 Esempio: coordinate cilindriche

Nel caso di coordinate cilindriche è escluso dalla mappatura il semipiano positivo chiuso $x\mathbb{Z}$. Indicando



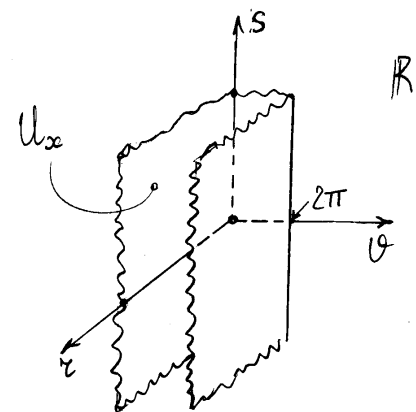
le coordinate con r, θ, s il loro campo di variazione risulta:

$$r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad s \in \mathbb{R},$$

e risulta:

$$U_r = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}.$$

Utilizzando come referente un sistema cartesiano



Ox y z la funzione $\mathbb{Z}(x)$ risulta:

$$(r, \theta, s) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, s),$$

ovverossia:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = s \end{cases}.$$

Quindi risulta:

$$\underline{g}_r = \frac{\partial x}{\partial r} \underline{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \underline{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r} \underline{e}_z,$$

e analogamente per $\underline{g}_\theta$ e $\underline{g}_s$. Quindi:

$$\begin{cases} \underline{g}_r = \cos\vartheta \underline{e}_x + \sin\vartheta \underline{e}_y \\ \underline{g}_\vartheta = -r \sin\vartheta \underline{e}_x + r \cos\vartheta \underline{e}_y \\ \underline{g}_s = \underline{e}_z \end{cases}$$

Il vettore $\underline{g}_r$ è unitario, invece il modulo di $\underline{g}_\vartheta$ è pari ad r . Inoltre la base locale risulta ortogonale (ma non ortonormale poiché $\underline{g}_\vartheta$ non è un versore: solo nei punti del cilindro di raggio unitario la base locale è ortonormale). La base duale risulta:

$$\underline{g}^r = \frac{1}{(\underline{g}_r \times \underline{g}_\vartheta) \cdot \underline{g}_s} \underline{g}_\vartheta \times \underline{g}_s,$$

$$\underline{g}^\vartheta = \frac{1}{(\underline{g}_r \times \underline{g}_\vartheta) \cdot \underline{g}_s} \underline{g}_s \times \underline{g}_r,$$

$$\underline{g}^s = \frac{1}{(\underline{g}_r \times \underline{g}_\vartheta) \cdot \underline{g}_s} \underline{g}_r \times \underline{g}_\vartheta.$$

Poiché:

$$(\underline{g}_r \times \underline{g}_\vartheta) \cdot \underline{g}_s = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -r \sin\vartheta & r \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

e:

$$\underline{g}_r \times \underline{g}_\vartheta = r \underline{g}_s,$$

$$\underline{g}_\vartheta \times \underline{g}_s = r \underline{g}_r,$$

$$\underline{g}_s \times \underline{g}_r = \frac{1}{r} \underline{g}_\vartheta,$$

si ottiene:

$$\begin{cases} \underline{g}^r = \underline{g}_r = \cos\vartheta \underline{e}_x + \sin\vartheta \underline{e}_y, \\ \underline{g}^\vartheta = \frac{1}{r^2} \underline{g}_\vartheta = -\frac{1}{r} \sin\vartheta \underline{e}_x + \frac{1}{r} \cos\vartheta \underline{e}_y, \\ \underline{g}^s = \underline{g}_s = \underline{e}_z. \end{cases}$$

Simboli di Christoffel:

$$\gamma_{ij}^h = \underline{g}^h \cdot \frac{\partial \underline{g}_i}{\partial x_j},$$

$$\left[\frac{\partial \underline{g}_i}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\vartheta \underline{e}_x + \cos\vartheta \underline{e}_y & 0 \\ -\sin\vartheta \underline{e}_x + \cos\vartheta \underline{e}_y & -r \cos\vartheta \underline{e}_x - r \sin\vartheta \underline{e}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ \vartheta \\ s \end{matrix}.$$

Le coppie di indici (i, j) che conducono a simboli non nulli sono:

$$(i, j) \in \{(r, \vartheta), (\vartheta, r), (\vartheta, \vartheta)\},$$

e si ottengono i seguenti valori (unici non nulli) dei simboli di Christoffel:

$$\begin{cases} \gamma_{\vartheta\vartheta}^r = \underline{g}^r \cdot \frac{\partial \underline{g}_\vartheta}{\partial \vartheta} = -r \\ \gamma_{r\vartheta}^\vartheta = \underline{g}^\vartheta \cdot \frac{\partial \underline{g}_r}{\partial \vartheta} = \frac{1}{r} \end{cases}.$$

Capitolo 3

Tensore di curvatura di Riemann-Christoffel

3.1 Indici di Christoffel di prima specie

Allo scopo di esprimere gli indici di Christoffel di seconda specie in funzione delle sole componenti della metrica, si introducono gli indici di Christoffel di prima specie $\gamma_{ij,h}$:

$$\gamma_{ij,h} = g_{hl} \gamma_{ij}^l,$$

oppure, inversamente:

$$\gamma_{ij}^h = g^{hl} \gamma_{ij,l}.$$

Relativamente ad un sistema di coordinate cartesiane risulta:

$$g_{hl} = g_h \cdot g_l = \frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial x^h} \frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial x^l},$$

e dunque:

$$\begin{aligned} \gamma_{ij,h} &= \frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial x^h} \frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}_n} \frac{\partial^2 \tilde{x}_n}{\partial x^i \partial x^j} = \\ &= \frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial x^h} \frac{\partial^2 \tilde{x}_n}{\partial x^i \partial x^j} \delta_{mn}, \end{aligned}$$

e infine:

$$\gamma_{ij,h} = \frac{\partial^2 \tilde{x}_m}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial x^h}.$$

Poiché:

$$\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 \tilde{x}_m}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial x^h} + \frac{\partial^2 \tilde{x}_m}{\partial x^h \partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial x^i},$$

e quindi anche:

$$\frac{\partial g_{hi}}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \tilde{x}_m}{\partial x^h \partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 \tilde{x}_m}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial x^h},$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = \frac{\partial^2 \tilde{x}_m}{\partial x^i \partial x^h} \frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 \tilde{x}_m}{\partial x^j \partial x^h} \frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial x^i},$$

risulta:

$$\gamma_{ij,h} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{hi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right).$$

Si sono così definiti i simboli di Christoffel di prima specie, e quindi anche quelli di seconda specie, utilizzando le sole componenti della metrica e senza fare alcun riferimento a coordinate cartesiane. La simmetria delle componenti del tensore metrico porta con sé la simmetria dei primi due indici dei simboli di Christoffel di prima specie ed anche quella dei due indici covarianti dei simboli di seconda specie.

3.2 Inversione nell'ordine di derivazione covariante

Sia dato un sistema di coordinate generali nella configurazione spaziale B del corpo continuo e sia $\underline{v}$ un generico campo vettoriale in B . Vogliamo calcolare le componenti di $\text{grad}(\text{grad } \underline{v})$. Intanto ricordiamo che le componenti covarianti di $\text{grad } \underline{v}$ valgono:

$$v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \gamma_{ij}^k v_k.$$

Le componenti di $\text{grad}(\text{grad } \underline{v})$ valgono invece:

$$\begin{aligned} v_{ijk} &= (\text{grad } \underline{v})_{i,j,k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} (\text{grad } v_{ij}) - \gamma_{ik}^h (\text{grad } \underline{v})_{hj} - \gamma_{jk}^h (\text{grad } \underline{v})_{ih} \\ &= \frac{\partial v_{i,j}}{\partial x^k} - \gamma_{ik}^h v_{h,j} - \gamma_{jk}^h v_{i,h}. \end{aligned}$$

Poiché:

$$v_{h,j} = \frac{\partial v_h}{\partial x^j} - \gamma_{hj}^l v_l, \quad ,$$

$$v_{i,h} = \frac{\partial v_i}{\partial x^h} - \gamma_{ih}^l v_l, \quad ,$$

sostituendo si ottiene:

$$v_{i,jk} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^j \partial x^k} - \gamma_{ij}^h \frac{\partial v_h}{\partial x^k} - \gamma_{ik}^h \frac{\partial v_h}{\partial x^j} - \gamma_{jk}^h \frac{\partial v_i}{\partial x^h} - v_l \left\{ \frac{\partial \gamma_{ij}^l}{\partial x^k} - \gamma_{ik}^h \gamma_{hj}^l - \gamma_{jk}^h \gamma_{ih}^l \right\}.$$

Scambiando il ruolo di j e k :

$$v_{i,kj} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^k \partial x^j} - \gamma_{ik}^h \frac{\partial v_h}{\partial x^j} - \gamma_{ij}^h \frac{\partial v_h}{\partial x^k} - \gamma_{kj}^h \frac{\partial v_i}{\partial x^h} - v_l \left\{ \frac{\partial \gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \gamma_{ij}^h \gamma_{hk}^l - \gamma_{kj}^h \gamma_{ih}^l \right\}.$$

L'ordine di derivazione parziale è interscambiabile:

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^k \partial x^j} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^j \partial x^k}, \quad ,$$

ed inoltre i simboli di Christoffel di seconda specie sono simmetrici negli indici covarianti:

$$\gamma_{jk}^h = \gamma_{kj}^h,$$

come è stato mostrato in generale senza fare riferimento alla struttura euclidea dello spazio.

La differenza $v_{i,jk} - v_{i,kj}$ esprime la mancanza di commutatività nell'ordine della derivazione covariante:

$$v_{i,jk} - v_{i,kj} = R_{ijk}^l v_l,$$

dove:

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \gamma_{ij}^l}{\partial x^k} + \gamma_{ik}^h \gamma_{hj}^l - \gamma_{ij}^h \gamma_{hk}^l.$$

In forma compatta:

$$\text{grad}(\text{grad } \underline{v}) - \{\text{grad}(\text{grad } \underline{v})\}^T = \underline{R} \underline{v},$$

dove, detto $A: \text{Lin} \rightarrow V$, l'operazione di trasposizione è definita sugli ultimi due indici:

$$A^T[\underline{x}] = A[\underline{x}^T], \quad \text{per ogni } \underline{x} \in \text{Lin},$$

e, in componenti covarianti:

$$A_{ijk}^T = g_i \cdot A^T[g_j \otimes g_k] = g_i \cdot A[g_k \otimes g_j] = A_{ikj}.$$

Quindi gli 81 scalari R_{ijk}^l rappresentano le componenti miste di un tensore del quarto ordine detto tensore di curvatura di Riemann-Christoffel. Se lo spazio è euclideo, le componenti cartesiane di $\underline{R}$ (e quindi $\underline{R}$ stesso) si annullano poiché in un sistema di coordinate cartesiane sono nulli tutti i simboli di Christoffel di seconda specie. In tal caso la derivazione covariante è commutativa. In generale quando

$\underline{R} = \underline{0}$ si dice che lo spazio è piatto.

Un teorema di calcolo tensoriale afferma che lo spazio è piatto se e solo se esiste un sistema di coordinate rispetto al quale la metrica si rappresenta ovunque nella forma diagonale:

$$g_{ij} = \delta_{ij}.$$

Tale teorema è vincolato alla condizione di monodimensionalità dello spazio. Dunque, se lo spazio è multidimensionale, il sistema di coordinate esclude un numero di superfici sufficienti a rendere lo spazio monodimensionale.