

CINEMATICA E DINAMICA DEL CONTINUO

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile

Università di Trieste

Piazzale Europa 1, Trieste

Trieste, 29 giugno 2005

Indice

1	Analisi della deformazione	3
1.1	Funzione di deformazione	3
1.2	“Pull-back” e “push-forward” di punti	4
1.3	Gradiente della deformazione	5
1.4	“Pull-back” e “push-forward” di vettori e tensori	8
1.5	Gradiente degli spostamenti	13
1.5.1	Gradiente materiale degli spostamenti	13
1.5.2	Gradiente spaziale degli spostamenti	15
1.6	Tensori di Cauchy-Green	15
1.6.1	Tensore destro di Cauchy-Green	15
1.6.2	Tensore sinistro di Cauchy-Green	16
1.7	Misure di deformazione	17
1.7.1	Dilatazione lineare	17
1.7.2	Scorrimento tra due linee inizialmente ortogonali	18
1.7.3	Coefficiente di dilatazione cubica	19
1.8	Deformazione di un elemento di area orientato (formula di Nanson)	20
1.9	Tensori di deformazione	21
1.9.1	Tensore di Green-Lagrange	21
1.9.2	Tensore di Almansi	22
1.10	Decomposizione polare del gradiente della deformazione	24
1.10.1	Tensore destro di stiramento (stretch)	24
1.10.2	Decomposizione polare destra	24
1.10.3	Tensore sinistro di stiramento e decomposizione polare sinistra	25
1.10.4	Tensori ingegneristici della deformazione	26
1.10.5	Pull-back e push-forward tramite la rotazione rigida locale	27
1.11	Compatibilità della deformazione	28
1.11.1	Sistema di coordinate convected	28
1.11.2	Equazioni di compatibilità	29
2	Sistemi di riferimento	33
2.1	Moto rigido	33
2.2	Eventi e sistemi di riferimento	34
2.3	Cambiamento di sistema di riferimento	35
2.4	Gruppi di trasformazioni	37
2.5	Quantità oggettive	39
2.6	Effetto del cambiamento di sistema di riferimento sulla deformazione	41
2.7	Effetto del cambiamento di sistema di riferimento sul moto	44
2.8	Prima e seconda legge di Newton	45
3	Velocità di deformazione	47
3.1	Derivazione materiale	47
3.2	Gradiente spaziale della velocità	48
3.3	Velocità di deformazione (stretching) e di rotazione (spin)	49
3.4	Velocità di dilatazione lineare	50
3.5	Velocità di scorrimento	51
3.6	Derivata di Lie	52
4	Dinamica	55
4.1	Conservazione della massa	55
4.1.1	Equazione di continuità	55
4.1.2	Teorema del trasporto di Reynolds	57
4.1.3	Derivate materiali della quantità di moto e del momento della quantità di moto	58
4.2	Ipotesi di Cauchy	59
4.3	Tensore degli sforzi di Cauchy	60
4.4	Equazione spaziale del moto	63
4.5	Equazione spaziale di equilibrio al contorno	64
4.6	Simmetria del tensore degli sforzi	65
4.7	Primo e secondo tensore di Piola-Kirchhoff	67
4.8	Equazione materiale del moto	69
4.9	Equazione materiale di equilibrio al contorno	69
5	Principi generali	71
5.1	Principio dei lavori virtuali	71
5.2	Bilancio termodinamico	76
5.3	Produzione di entropia	79

Capitolo 1

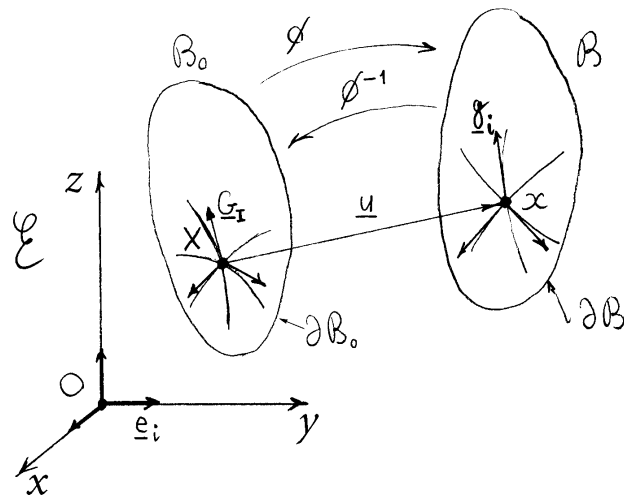
Analisi della deformazione

1.1 Funzione di deformazione

Il moto del corpo continuo è descritto relativamente ad una configurazione di riferimento B_0 (lagrangiana o materiale). La deformazione:

$$\phi: B_0 \rightarrow B, \quad X \rightarrow x = \phi(X),$$

che mappa la configurazione di riferimento B_0 in quella B (spaziale o euleriana), che il corpo assume al



tempo t , è continua e invertibile con inversa continua. In ognuna delle due configurazioni B_0 e B può essere assunto un sistema di coordinate generale. Un punto $X \in B_0$ avrà coordinate X^I nel riferimento generale della configurazione di riferimento e in sua corrispondenza le linee coordinate individuano la base locale $\underline{G}_I$ (dello spazio tangente nel punto X). Analogamente $x \in B$ avrà coordinate x^i nel riferimento generale della configurazione B dove le linee coordinate generano la base locale $\underline{g}_i$. Poiché lo spazio ambiente $\mathcal{E}$ è euclideo, è poi sempre possibile assumere in questo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Tale sistema genera le coordinate cartesiane ortogonali X_i e x_i dei punti di entrambe le configurazioni e le basi locali sia in B_0 che in B sono tutte coincidenti con la

base individuata dai versori degli assi coordinati. Nel seguito, salvo avviso contrario, le coordinate e le componenti dei campi vettoriali e tensoriali saranno riferite ad un sistema di assi cartesiani ortogonali.

In componenti, la deformazione è rappresentata da tre funzioni scalari:

$$\phi_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y, Z) \mapsto x_i = \phi_i(X, Y, Z),$$

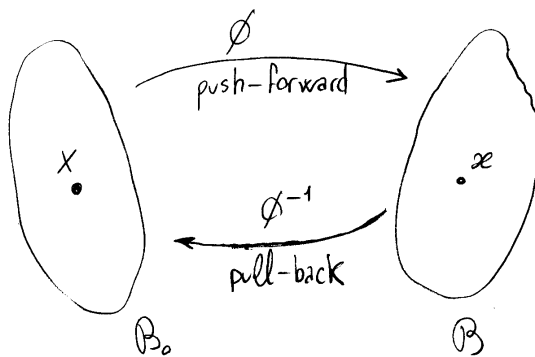
che forniscono le 3 coordinate del punto spaziale x in funzione delle tre coordinate del punto materiale X .

1.2 "Pull-back" e "push-forward" di punti

La funzione ϕ di deformazione della configurazione B che il corpo continuo assume al tempo t rispetto alla configurazione B_0 di riferimento, permette di ricondurre le quantità definite nella configurazione spaziale a

quantità definite nella configurazione materiale tramite la sua inversa ϕ^{-1} . Questa operazione di riduzione del moto al "comune denominatore" B_0 è indispensabile per il fatto che la configurazione B rappresenta una incognita del problema che si vuole affrontare, e per il fatto che le variazioni delle quantità materiali, in quanto riferite ad una comune configurazione, acquistano un significato fisico più preciso rispetto alle variazioni delle corrispondenti quantità spaziali, riferite ad una configurazione variabile.

L'operazione di portare le quantità e le operazioni spaziali in quantità e operazioni materiali viene detta, con denominazione inglese, pull-back (portare indietro, alla configurazione materiale). L'operazione inversa viene invece detta push-forward (portare



avanti, alla configurazione spaziale).

I punti materiali X e quelli spaziali x sono collegati tramite la funzione deformazione ϕ :

$$x = \phi(X), \quad X = \phi^{-1}(x), \quad (1)$$

1.3 Gradiente della deformazione

Il gradiente della deformazione rappresenta il gradiente della funzione di deformazione ϕ . Posto:

$$\underline{F} = \text{Grad } \phi,$$

risulta:

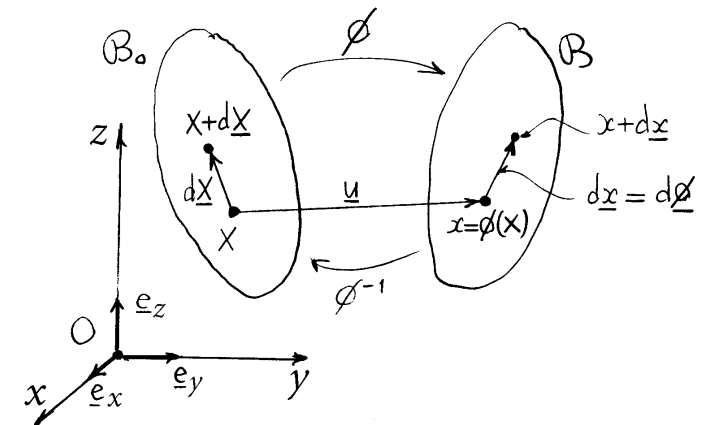
$$d\underline{x} = \underline{F} d\underline{X}.$$

Il gradiente $\underline{F}$ è dunque un campo tensoriale:

$$\underline{F} : B_0 \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V}_X, \mathcal{V}_x), \quad X \mapsto \underline{F}(X)$$

che trasforma gli elementi lineari $d\underline{X}$ uscenti da un punto materiale X (appartenti allo spazio tangente $\mathcal{V}_X$ in X) nei corrispondenti (tramite la deformazione) elementi lineari $d\underline{x}$ uscenti dal punto spaziale x corrispondente (nella deformazione) del punto materiale X (elementi lineari $d\underline{x}$ appartenenti allo spazio tangente $\mathcal{V}_x$ in x).

Il gradiente della deformazione in un punto è una



trasformazione lineare $\mathcal{V}_X \rightarrow \mathcal{V}_x$ che ad elementi geometrici di B_0 associa elementi geometrici di B , sempre rappresentati da vettori ma che fisicamente rappresentano linee diverse (in B_0 e in B):

$$\underline{F}(X): \mathcal{V}_X \rightarrow \mathcal{V}_x, \quad dX \mapsto dx = \underline{F} dX.$$

Per questo viene detto essere un two point tensor

In componenti cartesiane ortogonali risulta:

$$F_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial Z_j} = \frac{\partial z_i}{\partial Z_j}.$$

Infatti:

$$F_{ij} = e_i \cdot (\text{Grad } \phi) e_j,$$

e:

$$\begin{aligned} (\text{Grad } \phi) e_j &= \frac{(\text{Grad } \phi)(dZ_j e_j)}{dZ_j} \\ &= \lim_{dZ_j \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi(dZ_j e_j)}{dZ_j} = \frac{\partial \phi}{\partial Z_j}. \end{aligned}$$

Se $X^I(Z_j)$ e $x^i(z_j)$ sono due sistemi di coordinate generali, il primo materiale e il secondo spaziale, le componenti miste

di $\underline{F}$, con primo indice controvariante spaziale e secondo indice covariante materiale risultano:

$$F^i_I = \frac{\partial x^i}{\partial z_h} \frac{\partial z_h}{\partial Z_k} \frac{\partial Z_k}{\partial X^I} = \frac{\partial x^i}{\partial X^I} = \frac{\partial \phi^i}{\partial X^I}.$$

Si noti che in tale espressione non compaiono simboli di Christoffel. Questo poiché la funzione ϕ non rappresenta un campo vettoriale ma una mappa di punti.

Si noti che la rappresentazione naturale di dx è nella base covariante $\underline{g}_i$ dello spazio tangente in x :

$$dx = dx^i \underline{g}_i, \quad dx^i = dx \cdot \underline{g}^i.$$

e quella di dX è nella base covariante $\underline{G}_I$ dello spazio tangente in X :

$$dX = dX^I \underline{G}_I, \quad dX^I = dX \cdot \underline{G}^I.$$

Ne risulta che le componenti "natural" di $\underline{F}$ sono quelle miste prima introdotte:

$$dx^i = F^i_I dX^I, \quad F^i_I = \underline{g}^i \cdot \underline{F} \underline{G}_I.$$

Trasposta di $\underline{F}$

Quale trasformazione tra due spazi vettoriali $\mathcal{V}_x$ e $\mathcal{V}_x$ "diversi", la trasposta $\underline{F}^T: \mathcal{V}_x \rightarrow \mathcal{V}_x$ di $\underline{F}$:

$$d\underline{x} \cdot \underline{F}^T d\underline{x} = d\underline{x} \cdot \underline{F} d\underline{x}, \quad \forall d\underline{x} \in \mathcal{V}_x, d\underline{x} \in \mathcal{V}_x,$$

non può coincidere con $\underline{F}$. Non ha quindi senso fisico parlare della simmetria di $\underline{F}$.

Inversa di $\underline{F}$

Se esiste, l'inversa di $\underline{F}$ soddisfa la condizione:

$$\underline{F}^{-1} \underline{F} = \underline{I}_X, \quad \underline{F} \underline{F}^{-1} = \underline{I}_x.$$

L'inversa esiste se e solo se lo jacobiano della deformazione $J = \det \underline{F}$ non è nullo. In tal caso, poiché $\phi^{-1} \circ \phi(X) = X$ e $\phi \circ \phi^{-1}(x) = x$ risulta:

$$(\text{grad } \phi^{-1}) \underline{F} = \underline{I}_X \quad \text{e} \quad \underline{F} (\text{grad } \phi^{-1}) = \underline{I}_x.$$

L'inversa $\underline{F}^{-1}: \mathcal{V}_x \rightarrow \mathcal{V}_X$ della $\underline{F}$ rappresenta

quindi il gradiente della trasformazione inversa:

$$\underline{F}^{-1} = \text{grad } \phi^{-1}, \quad F_{ij}^{-1} = \frac{\partial \phi_i^{-1}}{\partial x_j} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}.$$

Per essa vale la relazione:

$$d\underline{X} = \underline{F}^{-1} d\underline{x}.$$

Si noti che la condizione $J \neq 0$

è in accordo con il teorema della funzione inversa che assicura che se ϕ è una funzione C^1 e se $J \neq 0$ in un punto allora ϕ è localmente invertibile (in un intorno di tale punto), ϕ^{-1} è una funzione C^1 e $J(\phi^{-1}) = \frac{1}{J(\phi)}$. Tale teorema assicura solo l'inversione locale, per cui la sola richiesta di essere ϕ una funzione C^1 con $J \neq 0$ ovunque non assicura l'esistenza di una ϕ^{-1} globale.

Si scelga inoltre la configurazione B_0 in modo tale che possa fare parte di un possibile moto che la colleghi alla generica configurazione spaziale B . Quando B coincide con B_0 si ha $\underline{F} = \underline{I}$ e quindi $J=1$ in tutti i punti. Non potendo mai annullarsi

ne consegue che in tal caso:

$$J = \det \underline{F} > 0.$$

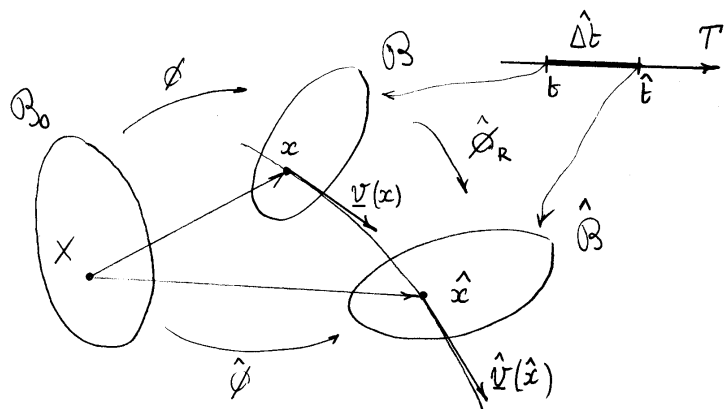
Configurazione lagrangiana relativa:

Se la generica configurazione $\hat{B}$ è riferita alla configurazione lagrangiana relativa B oltre che a quella totale B_0 risulta:

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}_R \circ \phi.$$

Derivando tale espressione si ottiene:

$$\underline{\hat{F}} = \underline{\hat{F}}_R \underline{F} \quad \text{oppure} \quad \underline{\hat{F}}_R = \underline{\hat{F}} \underline{F}^{-1}.$$



Il gradiente $\underline{\hat{F}}_R$, relativo alla configurazione lagrangiana relativa B , rappresenta la deformazione nell'intervallo di tempo $\Delta t \equiv (t, \hat{t})$, cosa che né $\underline{F}$, né $\underline{\hat{F}}$ rappresentano.

1.4 “Pull-back” e “push-forward” di vettori e tensori

Il push-forward di un elemento di linea materiale si effettua tramite il gradiente della deformazione $\underline{F}$, mentre il pull-back di un elemento di linea spaziale si effettua tramite l'inversa di $\underline{F}$:

$$dx = \underline{F} dX, \quad dX = \underline{F}^{-1} dx. \quad (2)$$

Si considerino gli spazi tangenti V_x e $V_{\hat{x}}$ in x e $\hat{x}$ rispettivamente. Le corrispondenze (1) e (2) inducono delle ulteriori corrispondenze tra le forme lineari su V_x e quelle su $V_{\hat{x}}$ e tra i tensori doppi definiti in V_x e

quelli definiti in $\mathcal{V}_x$. Tali corrispondenze sono ancora dette pull-back se vanno da $\mathcal{V}_x$ a $\mathcal{V}_x$, cioè da elementi spaziali a elementi materiali, e viceversa push-forward se vanno da elementi materiali ad elementi spaziali.

I pull-back e i push-forward si possono indicare con i simboli ϕ^* e ϕ_* rispettivamente (ϕ perché fonte alla deformazione, mentre gli asterischi come esponente e come pedice sono simboli standard dell'andare indietro e dell'andare avanti rispettivamente tramite una funzione). Con questa terminologia le (2) definiscono il push-forward di un vettore $\underline{v}$ materiale:

$$\phi_* \underline{v} = \underline{F} \underline{v}, \quad \underline{v} \in \mathcal{V}_x \quad (3)$$

e il pull-back di un vettore $\underline{u}$ spaziale:

$$\phi^* \underline{u} = \underline{F}^{-1} \underline{u}, \quad \underline{u} \in \mathcal{V}_x. \quad (4)$$

Si consideri poi una forma lineare spaziale $\underline{\alpha} : \mathcal{V}_x \rightarrow \mathbb{R}$. Al suo pull-back $\phi^* \underline{\alpha} : \mathcal{V}_x \rightarrow \mathbb{R}$ si richiede che agisca su vettori materiali $\underline{v} \in \mathcal{V}_x$ come $\underline{\alpha}$ agisce

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_x & \xrightarrow{\underline{F}} & \mathcal{V}_x \\ \phi^* \underline{\alpha} \downarrow & & \downarrow \underline{\alpha} \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{i} & \mathbb{R} \end{array} \quad i = \text{identità in } \mathbb{R}$$

sui push-forward $\phi_* \underline{v}$ dei vettori materiali:

$$(\phi^* \underline{\alpha}) \underline{v} = \underline{\alpha} (\phi_* \underline{v}), \quad \underline{\alpha} \in \mathcal{V}_x^*, \quad (5)$$

ovverossia:

$$(\phi^* \underline{\alpha}) \underline{v} = \underline{\alpha} (\underline{F} \underline{v}) = (\underline{\alpha} \circ \underline{F}) \underline{v},$$

e quindi:

$$\phi^* \underline{\alpha} = \underline{\alpha} \circ \underline{F}. \quad (6)$$

In componenti covarianti:

$$\begin{aligned} (\phi^* \underline{\alpha})_I &= \underline{\alpha} \circ \underline{F} (\underline{G}_I) = \underline{\alpha} (F_I^j \underline{g}_j) \\ &= F_I^j \underline{\alpha} (\underline{g}_j) = \alpha_j F_I^j. \end{aligned} \quad (7)$$

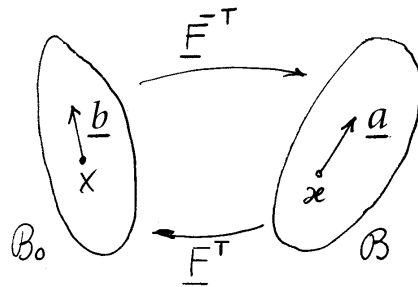
Se $\underline{\alpha}$ si rappresenta tramite il vettore $\underline{a}$ tale che $\underline{\alpha} \underline{u} = \underline{a} \cdot \underline{u}$ per ogni $\underline{u} \in \mathcal{V}_x$ allora risulta:

$$(\phi^* \underline{a}) \cdot \underline{v} = \underline{a} \cdot \underline{F} \underline{v} = \underline{F}^T \underline{a} \cdot \underline{v},$$

da cui:

$$\phi^* \underline{a} = \underline{F}^T \underline{a}. \quad (8)$$

Quindi, se il vettore spaziale $\underline{a} \in \mathcal{V}_x$ rappresenta una forma lineare spaziale, il suo pull-back $\phi^* \underline{a}$, un vettore materiale che rappresenta il pull-back della forma lineare spaziale, è fornito dalla (8).



In componenti contravarianti si ha:

$$(\phi^* \underline{a})^i = F^{Ti}{}_h a^h = G^{iH} g_{Hh} F^h{}_H a^h, \quad (9)$$

mentre in componenti covarianti risulta:

$$(\phi^* \underline{a})_I = G_{IL} (\phi^* \underline{a})^L = (g_I{}^H F^H{}_H) (g_{Hh} a^h) = a_h F^h{}_I. \quad (10)$$

Notare che la (10) coincide con la seconda delle (6) tenendo conto che le componenti covarianti di una forma lineare coincidono con quelle contravarianti del vettore corrispondente.

Naturalmente il push-forward di un vettore materiale $\underline{b}$,

quale rappresentante di una forma lineare, vale:

$$\phi_* \underline{b} = F^{-T} \underline{b}, \quad \underline{b} \in \mathcal{V}_x. \quad (11)$$

Vediamo ora il pull-back dei tensori doppi. Sia allora $\underline{A}$ un endomorfismo su $\mathcal{V}_x$, quindi spaziale. Il suo pull-back $\phi^* \underline{A}$ agisce su vettori materiali $\underline{v} \in \mathcal{V}_x$ fornendo il pull-back del vettore spaziale che si ottiene applicando $\underline{A}$ al push-forward di $\underline{v}$:

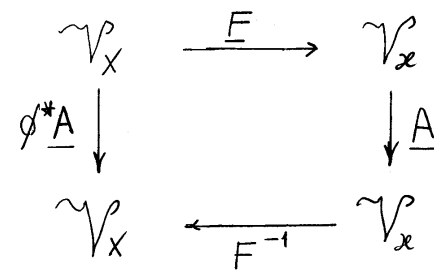
$$(\phi^* \underline{A}) \underline{v} = \phi^* [\underline{A}(\phi_* \underline{v})], \quad \text{per ogni } \underline{v} \in \mathcal{V}_x, \quad (12)$$

ovverossia:

$$\phi^* \underline{A} = \underline{F}^{-1} \underline{A} \underline{F}. \quad (13)$$

In componenti risulta:

$$(\phi^* \underline{A})^i{}_J = F^{-1I}{}_i A^i{}_j F^j{}_J, \quad (14)$$



Naturalmente il push-forward di $A \in \text{Lin}_x$ risulta:

$$\phi_* A = \underline{F} \underline{A} \underline{F}^{-1}, \quad (\phi^* \underline{A})^i_j = F^i_I A^I_J F^{-1J}_j. \quad (15)$$

Analogamente si definisce il pull-back di una forma bilineare spaziale $\underline{A}: \mathcal{V}_x \times \mathcal{V}_x \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\phi^* \underline{A}(\underline{u}, \underline{v}) = A(\phi_* \underline{u}, \phi_* \underline{v}) \text{ per ogni } \underline{u}, \underline{v} \in \mathcal{V}_x, \quad (16)$$

ovverossia:

$$\phi^* A = \underline{A} \circ (\underline{F} \times \underline{F}), \quad (17)$$

dove:

$$\underline{F} \times \underline{F}(\underline{u}, \underline{v}) = (\underline{F}\underline{u}, \underline{F}\underline{v}).$$

In componenti covarianti:

$$\begin{aligned} (\phi^* \underline{A})_{IJ} &= \underline{A} \circ \underline{F} \times \underline{F}(\underline{G}_I, \underline{G}_J) = \underline{A}(F^i_I \underline{g}_i, F^j_J \underline{g}_j) \\ &= F^i_I F^j_J \underline{A}(\underline{g}_i, \underline{g}_j) = F^i_I F^j_J \underline{A}_{ij}. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_x \times \mathcal{V}_x & \xrightarrow{\phi_* \times \phi_*} & \mathcal{V}_x \times \mathcal{V}_x \\ \downarrow \phi^* \underline{A} & & \downarrow \underline{A} \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{i} & \mathbb{R} \end{array}$$

Invece di $\underline{A} \in \text{Blin}_x$ si consideri il corrispondente endomorfismo $\underline{B} \in \text{Lin}_x$ tale che:

$$\underline{u} \cdot \underline{B} \underline{v} = \underline{A}(\underline{u}, \underline{v}) \text{ per ogni } \underline{u}, \underline{v} \in \mathcal{V}_x. \quad (18)$$

Relativamente a $\underline{B}$ la (16) richiede:

$$\underline{u} \cdot (\phi^* \underline{B}) \underline{v} = \phi_* \underline{u} \cdot \underline{B}(\phi_* \underline{v}), \quad (19)$$

per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in \mathcal{V}_x$, e si ottiene:

$$\underline{u} \cdot (\phi^* \underline{B}) \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{F}^T \underline{B} \underline{F} \underline{v}, \quad (20)$$

ovverossia:

$$\phi^* \underline{B} = \underline{F}^T \underline{B} \underline{F}, \quad (21)$$

e, in componenti miste:

$$(\phi^* \underline{B})^i_J = F^{Ti}_I B^i_j F^j_J, \quad (22)$$

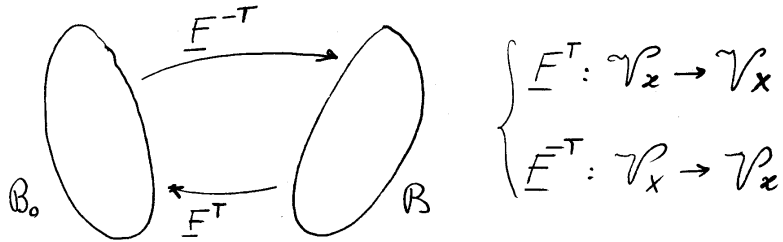
oppure, in componenti covarianti:

$$\begin{aligned} (\phi^* \underline{B})_{IJ} &= G_{IH} (G^{HL} g_{mi} F^i_L) B^m_j F^j_J = \\ &= F^i_I B_{ij} F^j_J. \end{aligned} \quad (23)$$

Per quel che riguarda il push-forward di un endomorfismo

$A \in \text{Lin}_X$, corrispondente di una forma bilineare materiale su $\mathcal{V}_X$, si ottiene poi:

$$\phi_* A = F^{-T} A F^{-1}. \quad (24)$$



Senza entrare troppo in dettaglio, il pull-back di una forma bilineare spaziale su $\mathcal{V}_x^*$ è tale che:

$$(\phi^* A)(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = A(\underline{\alpha} \circ F^{-1}, \underline{\beta} \circ F^{-1}). \quad (25)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_X^* \times \mathcal{V}_X^* & \xrightarrow{(\cdot, \cdot) \circ F^{-1} \times F^{-1}} & \mathcal{V}_x^* \times \mathcal{V}_x^* \\ \phi^* A \downarrow & & \downarrow A \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{i} & \mathbb{R} \end{array}$$

Se si passa al corrispondente endomorfismo $B \in \text{Lin}_x$ e $\underline{a}$ e $\underline{b}$ sono i vettori corrispondenti alle forme $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ si ottiene:

$$\underline{a} \cdot (\phi^* B) \underline{b} = (F^{-T} \underline{a}) \cdot B (F^{-T} \underline{b}), \quad (26)$$

per ogni $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{V}_x$ e si ottiene:

$$\phi^* B = F^{-1} B F^{-T}. \quad (27)$$

Inversamente, il push-forward di un $B \in \text{Lin}_x$ quale forma di $B \text{lin}_x^*$ risulta:

$$\phi_* B = F B F^T. \quad (28)$$

Infine, il pull-back di un endomorfismo spaziale $\mathcal{V}_x^* \rightarrow \mathcal{V}_x^*$ è tale che:

$$(\phi^* A) \underline{\alpha} = [A(\underline{\alpha} \circ F^{-1})] \circ F. \quad (29)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_X^* & \xrightarrow{(\cdot) \circ F^{-1}} & \mathcal{V}_x^* \\ \phi^* A \downarrow & & \downarrow A \\ \mathcal{V}_X^* & \xleftarrow{(\cdot) \circ F} & \mathcal{V}_x^* \end{array}$$

L'endomorfismo B di Lin_x corrispondente di A è tale che:

$$(\phi^* B) \underline{a} = \phi^* [B(\phi_* \underline{a})] = F^T B F^{-T} \underline{a}, \quad (30)$$

e infine:

$$\phi^* \underline{B} = \underline{F}^T \underline{B} \underline{F}^{-T}. \quad (31)$$

Inversamente:

$$\phi_* \underline{B} = \underline{F}^{-T} \underline{B} \underline{F}^T. \quad (32)$$

Tabella riassuntiva dei pull-back e dei push-forward

Tipo di tensore	Pull-back	Push-forward
Vettori	$\underline{F}^{-1}(\cdot)$	$\underline{F}(\cdot)$
Forme lineari	$\underline{F}^T(\cdot)$	$\underline{F}^{-T}(\cdot)$
Endomorfismi (tra vettori)	$\underline{F}^{-1}(\cdot) \underline{F}$	$\underline{F}(\cdot) \underline{F}^{-1}$
Endomorfismi (tra forme lineari)	$\underline{F}^T(\cdot) \underline{F}^{-T}$	$\underline{F}^{-T}(\cdot) \underline{F}^T$
Forme bilineari (di vettori)	$\underline{F}^T(\cdot) \underline{F}$	$\underline{F}^{-T}(\cdot) \underline{F}^{-1}$
Forme bilineari (di forme lineari)	$\underline{F}^{-1}(\cdot) \underline{F}^{-T}$	$\underline{F}(\cdot) \underline{F}^T$

1.5 Gradiente degli spostamenti

1.5.1 Gradiente materiale degli spostamenti

Il gradiente materiale degli spostamenti rappresenta il gradiente del campo materiale $\underline{u}$ degli spostamenti:

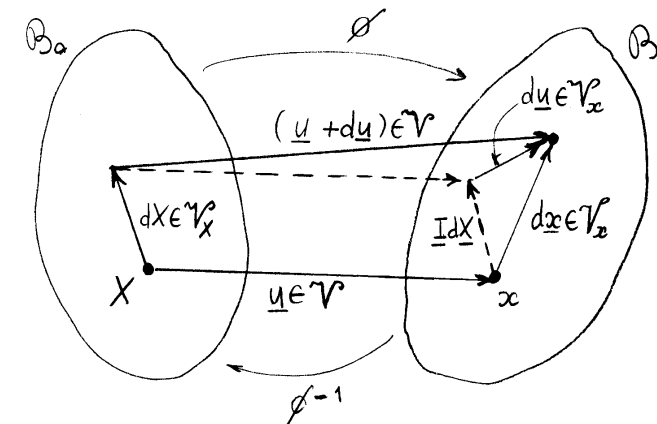
$$\underline{u} : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{V}, \quad X \mapsto \underline{u} = \phi(X) - X.$$

Con riferimento ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ gli spostamenti $\underline{u}$ si possono esprimere in componenti:

$$u_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y, Z) \mapsto u_i = u_i(X, Y, Z),$$

e risulta:

$$u_i = \phi_i - X_i.$$



Posto:

$$\underline{H} = \text{Grad } \underline{u} \quad ,$$

risulta:

$$d\underline{u} = \underline{H} d\underline{X} \quad .$$

Il vettore $\underline{u}$ appartiene allo spazio $\mathcal{V}$ dei vettori geometrici dello spazio ambiente $\mathcal{E}$. Il gradiente materiale degli spostamenti è invece un two point tensor:

$$\text{Grad } \underline{u}: \mathcal{B}_0 \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V}_X, \mathcal{V}_x), \quad X \mapsto \underline{H}(X),$$

$$\underline{H}(X): \mathcal{V}_X \rightarrow \mathcal{V}_x, \quad d\underline{X} \mapsto d\underline{u} = \underline{H} d\underline{X}.$$

Dall'identità:

$$d\underline{x} = \underline{I} d\underline{X} + d\underline{u} \quad ,$$

si ottiene:

$$\underline{F} = \underline{I} + \underline{H} \quad \text{oppure} \quad \underline{H} = \underline{F} - \underline{I} \quad ,$$

dove l'identità $\underline{I}$, detta shifter, rappresenta il trasporto parallelo dallo spazio $\mathcal{V}_X$ tangente in X allo spazio $\mathcal{V}_x$ tangente in x . È chiaro che in ambiente euclideo $\underline{I}$ è l'identità nello spazio $\mathcal{V}$ dei vettori geometrici, spazio che coincide con entrambi gli spazi tangenti $\mathcal{V}_X$ e $\mathcal{V}_x$. Nel

caso di diverse basi locali negli spazi $\mathcal{V}_X$ e $\mathcal{V}_x$, le componenti di $\underline{I}$ risultano:

$$I^i_{\mathbf{I}} = \underline{g}^i \cdot \underline{I} \underline{G}_{\mathbf{I}} = \underline{g}^i \cdot \underline{G}_{\mathbf{I}}$$

e il trasporto parallelo fornisce un cambio di componenti (dalla base $\underline{G}_{\mathbf{I}}$ materiale a quella spaziale $\underline{g}_i$). Nel caso di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale lo shifter è rappresentato dalla matrice identità.

Le componenti di $\underline{H}$ rispetto ad una base ortonormale risultano:

$$H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}.$$

Infatti:

$$(\text{Grad } \underline{u})_{ij} = \underline{e}_i \cdot (\text{Grad } \underline{u}) \underline{e}_j,$$

$$(\text{Grad } \underline{u}) \underline{e}_j = \frac{(\text{Grad } \underline{u})(dX_j \underline{e}_j)}{dX_j} = \lim_{(dX_j \rightarrow 0)} \frac{\Delta \underline{u}(dX_j \underline{e}_j)}{dX_j} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial X_j}.$$

Se u, v e w sono le componenti dello spostamento rispetto agli assi x, y e z si ha infine:

$$[\underline{H}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial w}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial Y} & \frac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix}.$$

1.5.2 Gradiente spaziale degli spostamenti

Se il campo degli spostamenti $\underline{u}$ si considera quale campo spaziale:

$$\underline{u}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}, \quad x \mapsto \underline{u} = x - \phi^{-1}(x),$$

si ottiene il gradiente spaziale degli spostamenti $\text{grad } \underline{u}$ tale che:

$$d\underline{u} = \text{grad } \underline{u} \, d\underline{x}.$$

Il gradiente spaziale degli spostamenti è un tensore spaziale:

$$\text{grad } \underline{u}: \mathcal{B} \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_x), \quad x \mapsto \text{grad } \underline{u}(x),$$

$$\text{grad } \underline{u}(x): \mathcal{V}_x \rightarrow \mathcal{V}_x, \quad d\underline{x} \mapsto d\underline{u} = (\text{grad } \underline{u}) d\underline{x}.$$

Dall'identità:

$$\underline{I} \underline{F}^{-1} d\underline{x} + d\underline{u} = d\underline{x},$$

si ottiene:

$$\text{grad } \underline{u} = \underline{I}_x - \underline{I} \underline{F}^{-1}, \quad \text{oppure} \quad \underline{F}^{-1} = \underline{I}^T (\underline{I}_x - \text{grad } \underline{u}),$$

dove $\underline{I}_x$ rappresenta l'identità in $\mathcal{V}_x$, $\underline{I}$ è ancora lo shifter da $\mathcal{V}_x$ a $\mathcal{V}_x$ e $\underline{I}^T$ è lo shifter da $\mathcal{V}_x$ a $\mathcal{V}_x$.

1.6 Tensori di Cauchy-Green

1.6.1 Tensore destro di Cauchy-Green

Il tensore destro di Cauchy-Green $\underline{C}$ rappresenta la forma bilineare materiale la cui associata forma quadratica genera i quadrati delle lunghezze delle linee spaziali:

$$d\underline{x}^2 = d\underline{x} \cdot \underline{C} d\underline{x}.$$

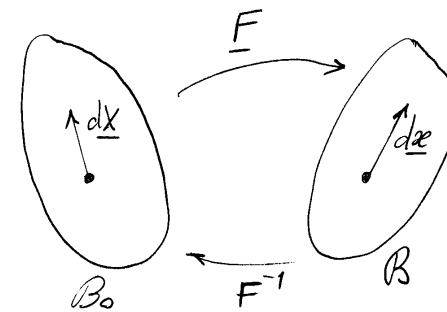
Poiché il tensore identità spaziale $\underline{I}_x$ è l'analogo spaziale del tensore destro di Cauchy-Green, ne consegue che $\underline{C}$ risulta essere il pull-back (quale forma bilineare) dell'identità spaziale:

$$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{I}_x \underline{F} = \underline{F}^T \underline{F}.$$

D'altronde, poiché risulta $d\underline{x} = \underline{F} d\underline{X}$ deve aversi:

$$d\underline{x}^2 = \underline{F} d\underline{X} \cdot \underline{F} d\underline{X} = d\underline{X} \cdot \underline{F}^T \underline{F} d\underline{X}.$$

Poiché $\underline{I}_x$, identità spaziale, rappresenta il tensore metrico



dello spazio ambiente, $\underline{C}$ rappresenta la corrispondente metrica materiale.

$\underline{C}$ rappresenta un campo tensoriale materiale:

$$\underline{C} : \mathcal{B}_0 \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V}_X, \mathcal{V}_X), \quad X \rightarrow \underline{C}(X)$$

il cui valore in un punto risulta essere una trasformazione lineare $\underline{C} : \mathcal{V}_X \rightarrow \mathcal{V}_X$ ottenuta dalla composizione delle due trasformazioni $\underline{F}^T : \mathcal{V}_x \rightarrow \mathcal{V}_X$ e $\underline{F} : \mathcal{V}_X \rightarrow \mathcal{V}_x$.

Poiché $d\underline{X} \cdot \underline{C} d\underline{X}$ rappresenta il quadrato del modulo del vettore $\underline{F} d\underline{X}$, è senz'altro una quantità strettamente positiva se $d\underline{X} \neq \underline{0}$:

$$d\underline{X} \cdot \underline{C} d\underline{X} > 0 \quad \text{per ogni } d\underline{X} \neq \underline{0},$$

e dunque $\underline{C}$ è definito positivo. Inoltre $\underline{C}$ è simmetrico:

$$\underline{C}^T = (\underline{F}^T \underline{F})^T = \underline{F}^T \underline{F} = \underline{C}.$$

In definitiva:

$$\underline{C} \in \text{Psym}.$$

Vediamo ora l'espressione di $\underline{C}$ in funzione del gradiente degli spostamenti $\underline{H}$:

$$\underline{C} = (\underline{I} + \underline{H})^T (\underline{I} + \underline{H}),$$

cioè:

$$\underline{C} = \underline{I}_X + \underline{I}^T \underline{H} + \underline{H}^T \underline{I} + \underline{H}^T \underline{H}.$$

Si ricordi che $\underline{H}$ è una trasformazione lineare $\mathcal{V}_X \rightarrow \mathcal{V}_x$, e che lo shifter $\underline{I}$ regola il trasporto parallelo tra $\mathcal{V}_X$ e $\mathcal{V}_x$, mentre il suo trasposto $\underline{I}^T$ regola il trasporto parallelo da $\mathcal{V}_x$ a $\mathcal{V}_X$.

1.6.2 Tensore sinistro di Cauchy-Green

L'inverso $\underline{B}^{-1}$ del tensore sinistro di Cauchy-Green $\underline{B}$, detto anche tensore di Finger, analogamente al tensore sinistro di Cauchy-Green, rappresenta la forma bilineare spaziale la cui associata forma quadratica genera i quadrati

delle lunghezze delle linee materiali:

$$dX^2 = d\underline{x} \cdot \underline{B}^{-1} d\underline{x}.$$

In altri termini rappresenta il push-forward dell'identità materiale $\underline{I}_X$ e quindi risulta:

$$\underline{B}^{-1} = \underline{F}^{-T} \underline{I}_X \underline{F}^{-1} = \underline{F}^{-T} \underline{F}^{-1},$$

da cui:

$$\underline{B} = \underline{F} \underline{F}^T.$$

D'altronde, poiché risulta $dX = \underline{F}^{-1} d\underline{x}$ deve aversi:

$$dX^2 = \underline{F}^{-1} d\underline{x} \cdot \underline{F}^{-1} d\underline{x} = d\underline{x} \cdot \underline{F}^{-T} \underline{F}^{-1} d\underline{x}.$$

$\underline{B}$ rappresenta un campo tensoriale spaziale:

$$\underline{B}: B_0 \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_x), \quad x \mapsto \underline{B}(x),$$

il cui valore in un punto risulta essere una trasformazione lineare $\underline{B}: \mathcal{V}_x \rightarrow \mathcal{V}_x$ ottenuta dalla composizione delle due trasformazioni $\underline{F}: \mathcal{V}_X \rightarrow \mathcal{V}_x$ e $\underline{F}^T: \mathcal{V}_x \rightarrow \mathcal{V}_X$.

Analogamente a $\underline{C}$, $\underline{B}$ è definito positivo e simmetrico.

Vediamo ora l'espressione di $\underline{B}$ in funzione del gradiente degli spostamenti spaziale $\text{grad } \underline{v}$:

$$\begin{aligned} \underline{B}^{-1} &= (\underline{I}_x - \text{grad } \underline{v}) \underline{I} \underline{I}^T (\underline{I}_x - \text{grad } \underline{v}) \\ &= \underline{I}_x - \text{grad } \underline{v} - \text{grad } \underline{v}^T + \text{grad } \underline{v}^T \text{grad } \underline{v}. \end{aligned}$$

1.7 Misure di deformazione

1.7.1 Dilatazione lineare

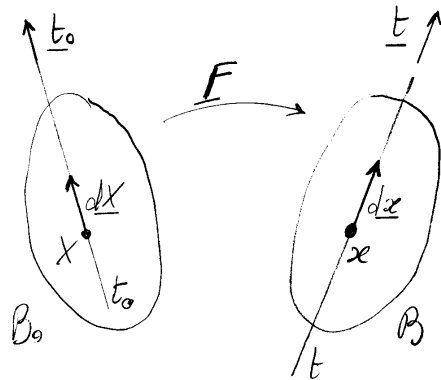
Se L rappresenta una linea (orientata) uscente dal punto materiale X , di vettore tangente $\underline{t}_0$ in X , il corrispondente elemento lineare dX risulta esprimibile nella forma:

$$dX = dX \underline{t}_0,$$

e quindi risulta:

$$dx = dX \underline{F} \underline{t}_0 \quad \text{oppure} \quad dx^2 = dX^2 \underline{t}_0 \cdot \underline{C} \underline{t}_0.$$

La dilatazione lineare ε_t nella direzione individuata



da $\underline{t}_0$ risulta dunque:

$$\varepsilon_t = \frac{dx - dX}{dX} = \frac{dx}{dX} - 1,$$

e quindi:

$$\varepsilon_t = |\underline{F} \underline{t}_0| - 1 \quad \text{oppure} \quad \varepsilon_t = \sqrt{\underline{t}_0 \cdot \underline{C} \underline{t}_0} - 1.$$

Nella versione spaziale risulta:

$$d\underline{x} = d\underline{x} \underline{t},$$

dove $\underline{t}$ è il versore della direzione spaziale corrispondente a $\underline{t}_0$ nella deformazione. Poiché:

$$d\underline{X} = d\underline{x} \underline{F}^{-1} \underline{t} \quad \text{oppure} \quad d\underline{X}^2 = d\underline{x}^2 \underline{t} \cdot \underline{B}^{-1} \underline{t},$$

risulta:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{|\underline{F}^{-1} \underline{t}|} \quad \text{oppure} \quad \varepsilon_t = \frac{1}{\sqrt{\underline{t} \cdot \underline{B}^{-1} \underline{t}}} - 1.$$

1.7.2 Scorrimento tra due linee inizialmente ortogonali

Siano L_1 ed L_2 due linee ortogonali uscenti dal punto materiale X , di versori tangenti $\underline{t}_{01}$ e $\underline{t}_{02}$ in X .

Due corrispondenti elementi lineari sono rappresentabili nella forma:

$$d\underline{X}_1 = dX_1 \underline{t}_{01} \quad \text{e} \quad d\underline{X}_2 = dX_2 \underline{t}_{02},$$

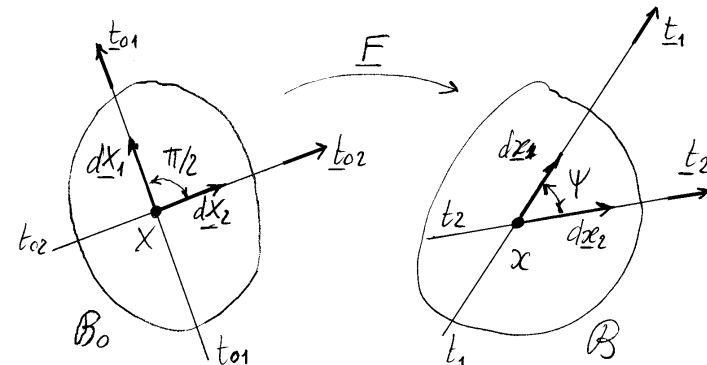
e risulta:

$$\underline{t}_{01} \cdot \underline{t}_{02} = 0.$$

Per definizione di prodotto scalare risulta inoltre:

$$d\underline{x}_1 \cdot d\underline{x}_2 = dx_1 dx_2 \cos \psi,$$

dove $d\underline{x}_1$ e $d\underline{x}_2$ sono gli elementi lineari uscenti



del punto spaziale x e corrispondenti, nella deformazione, agli elementi lineari materiali $d\underline{X}_1$ e $d\underline{X}_2$, mentre Ψ rappresenta l'angolo tra $d\underline{x}_1$ e $d\underline{x}_2$. Per definizione:

$$\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \Psi,$$

e dunque:

$$\begin{aligned} \sin \gamma_{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \Psi \right) = \cos \Psi \\ &= \frac{d\underline{x}_1 \cdot d\underline{x}_2}{|d\underline{x}_1| |d\underline{x}_2|} = \frac{d\underline{X}_1 \cdot d\underline{X}_2 (\underline{t}_{01} \cdot \underline{c}_{t_{02}})}{|d\underline{X}_1| |d\underline{X}_2| \sqrt{\underline{t}_{01} \cdot \underline{c}_{t_{01}}} \sqrt{\underline{t}_{02} \cdot \underline{c}_{t_{02}}}}, \end{aligned}$$

ed infine:

$$\sin \gamma_{12} = \frac{(\underline{t}_{01} \cdot \underline{c}_{t_{02}})}{\sqrt{\underline{t}_{01} \cdot \underline{c}_{t_{01}}} \sqrt{\underline{t}_{02} \cdot \underline{c}_{t_{02}}}}.$$

La versione spaziale è immediata:

$$\sin \gamma_{12} = \underline{t}_1 \cdot \underline{t}_2.$$

1.7.3 Coefficiente di dilatazione cubica

Un elemento di volume materiale nell'intorno di un punto X è individuato da tre elementi di linea $d\underline{X}_1$, $d\underline{X}_2$ e $d\underline{X}_3$ uscenti da X (un trivettore):

$$dV_0 = (d\underline{X}_1 \times d\underline{X}_2) \cdot d\underline{X}_3.$$

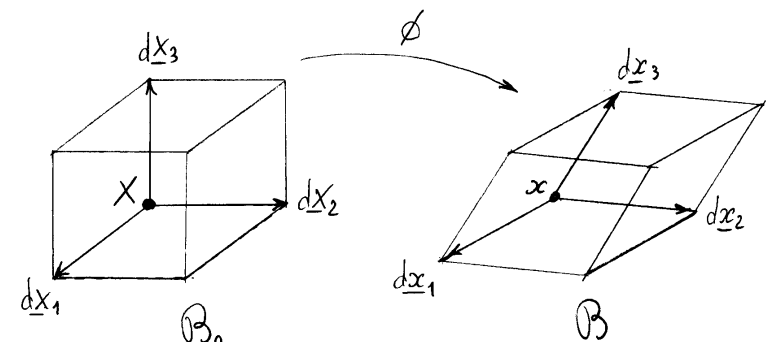
L'elemento di volume dV , nell'intorno del punto spaziale $x = \phi(X)$, corrispondente di dV_0 nella deformazione, risulta:

$$\begin{aligned} dV &= (d\underline{x}_1 \times d\underline{x}_2) \cdot d\underline{x}_3 = (\underline{E} d\underline{X}_1) \times (\underline{E} d\underline{X}_2) \cdot (\underline{E} d\underline{X}_3) \\ &= \det \underline{E} (d\underline{X}_1 \times d\underline{X}_2) \cdot d\underline{X}_3, \end{aligned}$$

e dunque:

$$dV = J dV_0$$

Tale trasformazione regola la trasformazione degli integrali estesi a volumi materiali in integrali estesi ai corrispondenti (nella deformazione) volumi spaziali e viceversa:



$$\int_V f dV = \int_{V_0} f J dV_0.$$

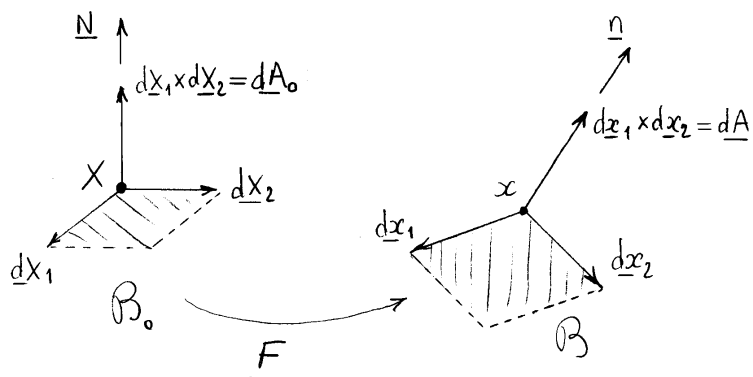
Il coefficiente di dilatazione cubica Θ vale:

$$\Theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = J - 1.$$

1.8 Deformazione di un elemento di area orientato (formula di Nanson)

Un elemento di area materiale nell'intorno di un punto X è individuato da due elementi di linee $d\underline{X}_1$ e $d\underline{X}_2$ uscenti da X (un bivettore):

$$d\underline{A}_0 = d\underline{X}_1 \times d\underline{X}_2.$$



Se $\underline{N}$ è la normale all'elemento d'area si ha:

$$d\underline{A}_0 = dA_0 \underline{N} = |d\underline{X}_1 \times d\underline{X}_2| \underline{N}.$$

L'elemento d'area $d\underline{A}$, nell'intorno del punto spaziale $x = \phi(X)$, corrispondente nella deformazione di $d\underline{A}_0$ risulta:

$$\begin{aligned} d\underline{A} &= d\underline{x}_1 \times d\underline{x}_2 = (\underline{F} d\underline{X}_1) \times (\underline{F} d\underline{X}_2) \\ &= (\det \underline{F}) \underline{F}^{-T} d\underline{X}_1 \times d\underline{X}_2 \end{aligned}$$

e cioè:

$$d\underline{A} = (\det \underline{F}) \underline{F}^{-T} d\underline{A}_0 = J \underline{F}^{-T} d\underline{A}_0,$$

dove J indica lo jacobiano della deformazione:

$$J = \det \underline{F}.$$

Se $\underline{n}$ è la normale all'elemento di area $d\underline{A}$ questa relazione si scrive (formula di Nanson)

$$d\underline{A} \underline{n} = dA_0 J \underline{F}^{-T} \underline{N}.$$

Ne consegue:

$$dA = \sqrt{d\underline{A} \cdot d\underline{A}} = J dA_0 \sqrt{\underline{N} \cdot \underline{C}^{-1} \underline{N}},$$

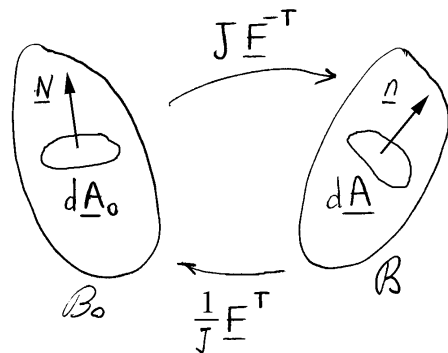
e il coefficiente di dilatazione quadratico vale dunque:

$$J_N = \frac{dA - dA_0}{dA_0} = J \sqrt{\underline{N} \cdot \underline{C}^{-1} \underline{N}} - 1.$$

Si noti che la deformazione trasforma i vettori elementi di area orientati: tramite la trasformazione lineare $J \underline{F}^{-T}$ e non tramite $\underline{F}$:

$$d\underline{A} = J \underline{F}^{-T} d\underline{A}_0.$$

Questa trasformazione risulta importante per lo studio di quelle trasformazioni lineari che, come i tensori degli sforzi, agiscono su aree orientate e non, come i tensori di deformazione, su linee orientate.



1.9 Tensori di deformazione

1.9.1 Tensore di Green-Lagrange

Il Tensore di Green-Lagrange $\underline{E}$ rappresenta la forma bilineare materiale la cui associata forma quadratica genera, a meno del coefficiente 2, la differenza tra i quadrati delle lunghezze delle linee spaziali e di quelle materiali:

$$dx^2 - dX^2 = 2 d\underline{X} \cdot \underline{E} d\underline{X}.$$

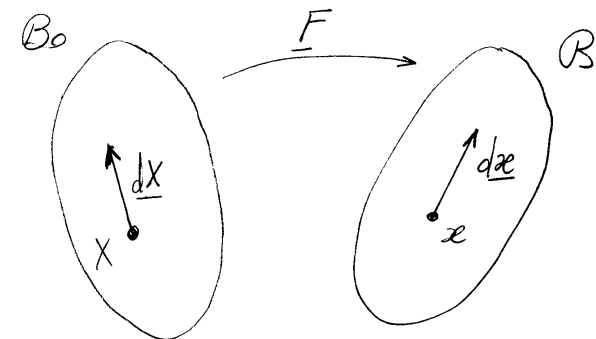
Poiché:

$$dx^2 = d\underline{X} \cdot \underline{C} d\underline{X},$$

deve aversi:

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{C} - \underline{I}_X).$$

Il coefficiente $1/2$ che compare nella definizione è "classico".



Un moto è rigido se e solo se tutte le lunghezze delle linee interne al corpo restano invariate, quindi se e solo se $\underline{E} = \underline{0}$. Il tensore di Green-Lagrange della deformazione fornisce dunque un campo tensoriale materiale simmetrico:

$$\underline{E} : B_0 \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V}_X, \mathcal{V}_X),$$

$$\underline{E}(X) : \mathcal{V}_X \rightarrow \mathcal{V}_X,$$

che si annulla ovunque se e solo se il moto è rigido.

Si noti che se $\underline{E} = \underline{0}$, o equivalentemente $\underline{C} = \underline{I}_X$, si annullano, come deve essere, anche gli scorrimenti γ_{12} tra due linee ortogonali, poiché in tal caso:

$$\underline{t}_{01} \circ \underline{C} \underline{t}_{02} = \underline{t}_{01} \circ \underline{t}_{02} = 0.$$

In funzione del gradiente degli spostamenti risulta:

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{I}^T \underline{H} + \underline{H}^T \underline{I} + \underline{H}^T \underline{H}).$$

In tale espressione compare la parte simmetrica del gradiente

materiale degli spostamenti $\underline{H}$:

$$\underline{E}_0 = \frac{1}{2} (\underline{I}^T \underline{H} + \underline{H}^T \underline{I}), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

nota come tensore lineare (materiale) della deformazione.

Con tale definizione risulta:

$$\underline{E} = \underline{E}_0 + \frac{1}{2} \underline{H}^T \underline{H}.$$

In componenti cartesiane ortogonali:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \right).$$

1.9.2 Tensore di Almansi

Il tensore di Almansi della deformazione rappresenta la forma bilineare spaziale controparte del tensore di Green-Lagrange. Si tratta quindi di un campo tensoriale e spaziale:

$$\underline{e} : B \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_x),$$

tale che:

$$(dx)^2 - (dX)^2 = 2 d\underline{x} \cdot \underline{e} d\underline{x}.$$

Ne consegue che $\underline{e}$ risulta essere il push-forward (quale forma bilineare) del tensore di Green-Lagrange:

$$\underline{e} = \underline{F}^{-T} \underline{E} \underline{F}^{-1} = \frac{1}{2} \underline{F}^{-T} (\underline{C} - \underline{I}_x) \underline{F}^{-1}.$$

Poichè i push-forward di $\underline{C}$ e $\underline{I}_x$ sono rispettivamente $\underline{I}_x$ e $\underline{B}^{-1}$ risulta infine:

$$\underline{e} = \frac{1}{2} (\underline{I}_x - \underline{B}^{-1}).$$

D'altronde, poichè risulta $dX^2 = d\underline{x} \cdot \underline{B}^{-1} d\underline{x}$ deve aversi:

$$\begin{aligned} d\underline{x}^2 - dX^2 &= d\underline{x} \cdot d\underline{x} - d\underline{x} \cdot \underline{B}^{-1} d\underline{x} \\ &= d\underline{x} \cdot (\underline{I}_x - \underline{B}^{-1}) d\underline{x}. \end{aligned}$$

In funzione del gradiente spaziale degli spostamenti il tensore di Almansi si scrive:

$$\underline{e} = \frac{1}{2} (\text{grad } \underline{u} + \text{grad}^T \underline{u} - \text{grad}^T \underline{u} \text{ grad } \underline{u}).$$

In tale espressione compare la parte simmetrica del gradiente spaziale degli spostamenti $\text{grad } \underline{u}$:

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad } \underline{u} + \text{grad}^T \underline{u}), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

nota come tensore lineare (spaziale) della deformazione.

Con tale definizione risulta:

$$\underline{E} = \underline{\varepsilon} + \frac{1}{2} \text{grad}^T \underline{u} \text{ grad } \underline{u}.$$

In componenti cartesiane ortogonali:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \right).$$

1.10 Decomposizione polare del gradiente della deformazione

1.10.1 Tensore destro di stiramento (stretch)

Il tensore destro di Cauchy-Green è simmetrico e definito positivo e possiede quindi tre autovalori positivi.

Siano allora $\underline{N}_1, \underline{N}_2, \underline{N}_3$ tre autovettori ortogonali tra loro di $\underline{C}$ e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i rispettivi autovalori.

Si definisce il tensore destro di stiramento nel modo seguente:

$$\underline{U} = \sqrt{\lambda_1} \underline{N}_1 \otimes \underline{N}_1 + \sqrt{\lambda_2} \underline{N}_2 \otimes \underline{N}_2 + \sqrt{\lambda_3} \underline{N}_3 \otimes \underline{N}_3.$$

Il tensore $\underline{U}$ è un tensore materiale simmetrico:

$$\underline{U}: \mathcal{V}_X \rightarrow \mathcal{V}_X,$$

definito positivo e soddisfacente la condizione:

$$\underline{U}^2 = \underline{C}.$$

Inoltre un tensore $\underline{U}$ simmetrico e definito positivo che soddisfa tale condizione è unico, per cui il tensore destro di stiramento resta definito da tale condizione. Infatti se $\underline{U}$

è simmetrico e definito positivo (cioè se i suoi autovalori

sono positivi), se $\underline{U}^2 = \underline{C}$ e se $\underline{N}$ è un autovettore di $\underline{U}$ di autovalore α allora:

$$\underline{C}\underline{N} = \underline{U}(\underline{U}\underline{N}) = \underline{U}(\alpha\underline{N}) = \alpha^2\underline{N},$$

e dunque $\underline{N}$ coincide con un autovettore di $\underline{C}$ e α^2 con il corrispondente autovalore.

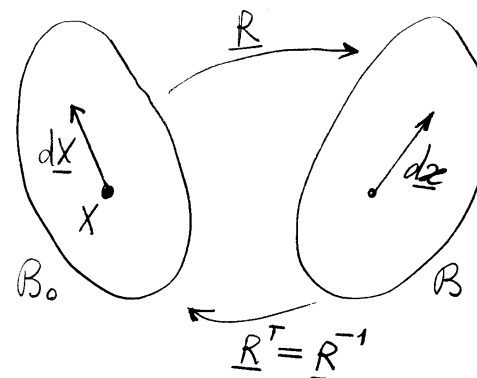
1.10.2 Decomposizione polare destra

Il two-point tensor:

$$\underline{R} = \underline{F}\underline{U}^{-1}, \quad \underline{R}: \mathcal{V}_X \rightarrow \mathcal{V}_x,$$

rappresenta una rotazione rigida. Infatti:

$$\underline{R}^T \underline{R} = \underline{U}^{-1} \underline{F}^T \underline{F} \underline{U}^{-1} = \underline{U}^{-1} \underline{C} \underline{U}^{-1} = \underline{U}^{-1} \underline{U} \underline{U} \underline{U}^{-1} = \underline{I}_X,$$



$$\underline{R} \underline{R}^T = \underline{F} \underline{U}^{-1} \underline{U}^T \underline{F}^T = \underline{F} \underline{C}^{-1} \underline{F}^T = \underline{F} \underline{F}^{-1} \underline{F}^{-T} \underline{F}^T = \underline{I}_x.$$

Cioè:

$$\underline{R}^T = \underline{R}^{-1}.$$

Inoltre, sotto l'ipotesi $\det \underline{F} > 0$ risulta:

$$\det \underline{I}_x = \det \underline{R}^T \underline{R} = (\det \underline{R})^2 \Rightarrow \det \underline{R} = \pm 1,$$

$$\det \underline{R} = \det(\underline{F} \underline{U}^{-1}) = \det \underline{F} \det \underline{U}^{-1} > 0 \Rightarrow \det \underline{R} = 1.$$

Nel caso non si imponga la condizione $\det \underline{F} > 0$ si può solo dedurre che $\det \underline{R} = \pm 1$ e il two-point tensor $\underline{R}$ risulta essere una trasformazione ortogonale.

Il gradiente della deformazione può quindi essere decomposto nella forma:

$$\underline{F} = \underline{R} \underline{U}$$

dove $\underline{R}: \mathcal{V}_x \rightarrow \mathcal{V}_x$ è una rotazione e $\underline{U}: \mathcal{V}_x \rightarrow \mathcal{V}_x$ è il tensore destro di stiramento (materiale, simmetrico, definito positivo).

1.10.3 Tensore sinistro di stiramento e decomposizione polare sinistra

Tensore sinistro di stiramento:

$$\underline{V} = \underline{R} \underline{U} \underline{R}^T.$$

Decomposizione polare (sinistra):

$$\underline{F} = \underline{V} \underline{R}.$$

Il tensore $\underline{V}: \mathcal{V}_x \rightarrow \mathcal{V}_x$ è un tensore materiale simmetrico. Se $\underline{N}$ è un autovettore di $\underline{U}$ di autovalore α risulta:

$$\underline{V}(\underline{R} \underline{N}) = \underline{R} \underline{U}(\underline{R}^T \underline{R}) \underline{N} = \underline{R}(\underline{U} \underline{N}) = \alpha \underline{R} \underline{N}.$$

Quindi $\underline{R} \underline{N}$ è un autovettore di $\underline{V}$ di autovalore α . I tensori $\underline{U}$ e $\underline{V}$ hanno gli stessi autovalori e se $\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3$ sono gli autovalori di $\underline{U}$ allora gli autovalori $\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3$ di $\underline{V}$ risultano:

$$\underline{n}_1 = \underline{R} \underline{n}_1, \quad \underline{n}_2 = \underline{R} \underline{n}_2, \quad \underline{n}_3 = \underline{R} \underline{n}_3.$$

Ne consegue che la rotazione $\underline{R}$ ruota le direzioni principali di $\underline{U}$ nelle direzioni principali di $\underline{V}$.

Le direzioni principali di $\underline{U}$ sono quindi trasformate da $\underline{F} = \underline{R}\underline{U}$ nelle direzioni principali di $\underline{V}$. Tali direzioni, ortogonali nella configurazione B_0 di riferimento, si trasformano quindi in tre direzioni ancora ortogonali della configurazione B spaziale.

Esistono dunque tre direzioni ortogonali che sono ancora ortogonali dopo la deformazione (attenzione: non è detto che nel corso di un moto da B_0 a B queste direzioni restino ortogonali durante tutto il moto; quello che si può dire è che tre direzioni ortogonali prima del moto sono ortogonali alla fine del moto).

Risulta:

$$\underline{V}^2 = \underline{R}\underline{U}\underline{R}^T \underline{R}\underline{U}\underline{R}^T = (\underline{R}\underline{U})(\underline{R}\underline{U})^T = \underline{F}\underline{F}^T$$

e cioè:

$$\underline{V}^2 = \underline{B}.$$

Essendo $\underline{B}$ simmetrica definita positiva esiste un solo $\underline{V}$ simmetrico definito positivo che soddisfa tale condizione. Inoltre se α è un autovettore di $\underline{V}$ di autovettore $\underline{n}$ allora α^2 è un autovettore di $\underline{B}$ di

autovettore $\underline{n}$. I tensori destro e sinistro di Cauchy-Green hanno quindi gli stessi autovettori e gli autovet-
tori si corrispondono tramite la rotazione $\underline{R}$.

1.10.4 Tensori ingegneristici della deformazione

Tensore ingegneristico della deformazione (materiale)

$$\underline{h}_0 = \underline{U} - \underline{I}_x.$$

Il tensore $\underline{h}_0: \mathcal{V}_x \rightarrow \mathcal{V}_x$ è un tensore materiale simmetrico. Se $\underline{N}$ è un autovettore di $\underline{U}$, e quindi anche di $\underline{h}_0$, di autovettore α risulta:

$$\underline{N} \cdot \underline{h}_0 \underline{N} = \alpha - 1.$$

D'altronde:

$$\varepsilon_N = \sqrt{\underline{N} \cdot \underline{C} \underline{N}} - 1 = \alpha - 1,$$

e quindi:

$$\varepsilon_N = \alpha - 1 = \underline{N} \cdot \underline{h}_0 \underline{N}.$$

Risulta:

$$(\underline{U} - \underline{I}_x)(\underline{U} + \underline{I}_x) = \underline{C} - \underline{I}_x.$$

Poiché $\underline{C} - \underline{I}_x$ è nullo se e solo se il moto è rigido ne risulta che $\underline{U} - \underline{I}_x$ è nullo se e solo se il moto è rigido, poiché in tal caso $\underline{U} + \underline{I}_x = 2\underline{I}_x$ ed è quindi senz'altro diverso da zero.

Tensor ingegneristico della deformazione (spaziale):

$$\underline{h} = \underline{V} - \underline{I}_x.$$

Il tensore $\underline{h}$ è un tensore spaziale simmetrico. Se $\underline{n}$ è un autovettore di $\underline{V}$ di autovalore α risulta:

$$\underline{n} \cdot \underline{h} \underline{n} = \alpha - 1,$$

e quindi ancora:

$$\varepsilon_n = \underline{n} \cdot \underline{h} \underline{n}.$$

Se i tre autovettori di $\underline{V}$ sono tutti distinti,

$$\varepsilon_N = \underline{N} \cdot \underline{h}_0 \underline{N} \quad \text{e} \quad \varepsilon_n = \underline{n} \cdot \underline{h} \underline{n},$$

valgono solo per le direzioni principali di $\underline{h}_0$ e, rispettivamente, per quelle di $\underline{h}$.

In fatti sia $\underline{t}_0$ una generica direzione materiale per la quale $\underline{U}\underline{t}_0 \neq \lambda \underline{t}_0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Risult:

$$\varepsilon_t = \sqrt{\underline{t}_0 \cdot \underline{U}^2 \underline{t}_0} - 1.$$

Poiché:

$$\underline{U}\underline{t}_0 = (\underline{t}_0 \cdot \underline{U}\underline{t}_0)\underline{t}_0 + \underline{v}$$

con $\underline{v} \neq 0$ e $\underline{v} \cdot \underline{t}_0 = 0$ risulta:

$$\underline{t}_0 \cdot \underline{U}^2 \underline{t}_0 = \underline{t}_0 \cdot \underline{U}(\underline{U}\underline{t}_0) = (\underline{t}_0 \cdot \underline{U}\underline{t}_0)^2 + \underline{t}_0 \cdot \underline{U}\underline{v}.$$

Poiché $\underline{t}_0 \cdot \underline{U}\underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{U}\underline{t}_0 \neq 0$ se ne deduce:

$$\sqrt{\underline{t}_0 \cdot \underline{U}^2 \underline{t}_0} \neq \underline{t}_0 \cdot \underline{U}\underline{t}_0 \Rightarrow \varepsilon_t \neq \underline{t}_0 \cdot \underline{h}_0 \underline{t}_0.$$

1.10.5 Pull-back e push-forward tramite la rotazione rigida locale

Si noti che $\underline{U}$ e $\underline{V}$, l'uno materiale, l'altro spaziale, si corrispondono tramite la rotazione rigida locale $\underline{R}$ e non tramite la deformazione $\underline{F}$. Inoltre anche i tensori ingegneristici della deformazione si corrispondono tramite la rotazione rigida locale:

$$\underline{R} \underline{h}_0 \underline{R}^T = \underline{R} \underline{U} \underline{R}^T - \underline{R} \underline{R}^T = \underline{V} - \underline{I}_x.$$

Il tensore di deformazione spaziale corrispondente a $\underline{C}$ tramite la rotazione rigida locale risulta essere :

$$\begin{aligned}\underline{R} \underline{C} \underline{R}^T &= \underline{R} \underline{U}^2 \underline{R}^T \\ &= \underline{R} \underline{V} \underline{R}^T \underline{R} \underline{V} \underline{R}^T = \underline{V}^2 = \underline{B}.\end{aligned}$$

1.11 Compatibilità della deformazione

1.11.1 Sistema di coordinate convected

Sia dato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in $\mathcal{E}$ e sia $\phi: B_0 \rightarrow B$ una deformazione di un corpo continuo la cui configurazione di riferimento è B_0 . In componenti :

$$\phi_i : Z_I \mapsto \xi_i = \phi_i(Z_I),$$

la deformazione può essere interpretata come un cambiamento di coordinate spaziali, da quelle ξ_i cartesiane ortogonali a quelle generali Z_I . Tale sistema di coordinate generali (spaziale) è detto sistema convected ed è funzione della deformazione.

La base di vettori associata al sistema convected risulta :

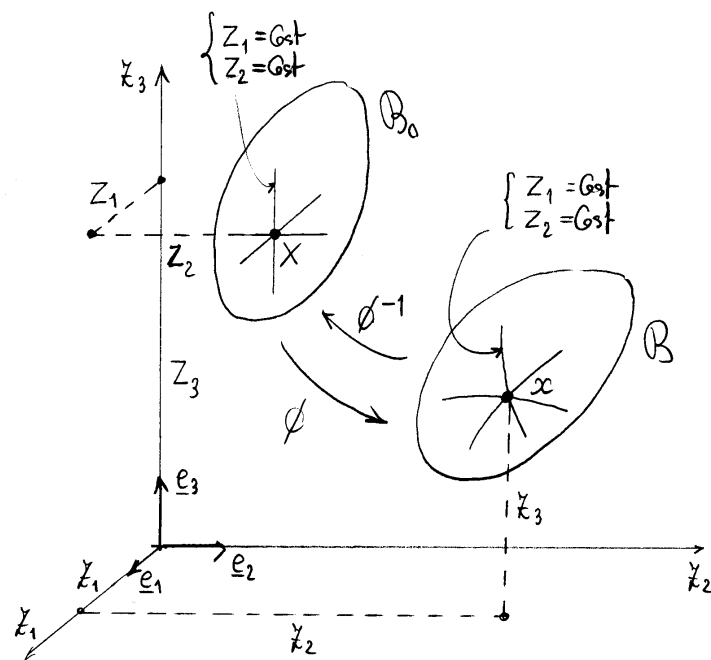
$$\underline{g}_I = \frac{\partial \phi_i}{\partial Z_I} \underline{e}_i = F_{iI} \underline{e}_i,$$

e le componenti covarianti della metrica:

$$\begin{aligned} g_{IJ} &= \underline{g}_I \cdot \underline{g}_J \\ &= \frac{\partial \phi_i}{\partial Z_I} \frac{\partial \phi_i}{\partial Z_J} \delta_{ij} = F_{iI} F_{iJ}, \end{aligned}$$

cioè:

$$g_{IJ} = C_{IJ}.$$



In modo analogo, oppure notando che:

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j,$$

si ottengono le componenti controvarianti:

$$g^{IJ} = C_{IJ}^{-1}.$$

Notare che tutte le componenti $F_{iI}, C_{IJ}, \bar{C}_{IJ}^{-1}$ sono date nel sistema cartesiano ortogonale ed è per questo che sono riportate sempre con gli indici al piede.

1.11.2 Equazioni di compatibilità

Si vogliono determinare le condizioni sotto le quali un campo tensoriale materiale $\underline{C}$ simmetrico e definito positivo rappresenta il tensore destro di Cauchy-Green di una deformazione ϕ del corpo continuo.

Se $\phi: B_0 \rightarrow B$ è una deformazione di B_0 , allora le componenti cartesiane C_{IJ} si possono

interpretare quali componenti del tensore metrico spaziale nel sistema di coordinate convected. Posto:

$$\gamma_{IJ,H}^{(c)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial C_{JH}}{\partial Z_I} + \frac{\partial C_{HI}}{\partial Z_J} - \frac{\partial C_{IJ}}{\partial Z_H} \right),$$

$$\gamma_{IJ}^{(c)H} = C_{HL}^{-1} \gamma_{IJ,L},$$

$$R_{\cdot IJK}^{(c)L} = \frac{\partial \gamma_{IK}^{(c)L}}{\partial Z_J} - \frac{\partial \gamma_{IJ}^{(c)L}}{\partial Z_K} + \gamma_{IK}^{(c)H} \gamma_{HJ}^{(c)L} - \gamma_{IJ}^{(c)H} \gamma_{HK}^{(c)L},$$

la struttura euclidea dello spazio impone:

$$R_{\cdot IJK}^{(c)L} = 0.$$

Viceversa se

$$R_{\cdot IJK}^{(c)L} = 0,$$

le componenti C_{IJ} rappresentano la metrica di uno spazio piatto. Dunque esiste (sotto la condizione che

B_0 sia monoconnesso) un sistema di coordinate:

$$z_i = \phi_i(Z_I),$$

tale che:

$$\frac{\partial Z_I}{\partial z_i} \frac{\partial Z_J}{\partial z_j} C_{IJ} = \delta_{ij},$$

avendo tenuto conto che $\underline{g}_i = \frac{\partial Z_I}{\partial z_i} \underline{g}_I$. Dunque:

$$C_{IJ} = \frac{\partial \phi_i}{\partial Z_I} \frac{\partial \phi_i}{\partial Z_J},$$

e $\underline{\underline{C}}$ rappresenta il tensore destro di Cauchy-Green della deformazione ϕ_i .

Si può mostrare che valgono le seguenti proprietà di simmetria:

$$R_{LIJK}^{(c)} = R_{JKLI}^{(c)},$$

di cui simmetria:

$$R_{LIJK}^{(c)} = -R_{ILJK}^{(c)},$$

$$R_{LIJK}^{(c)} = -R_{LIKJ}^{(c)},$$

e di somma:

$$R_{LIJH}^{(c)} + R_{LJHI}^{(c)} + R_{LHJL}^{(c)} = 0.$$

Ne consegue che vi sono solo sei distinte equazioni

di congruenza:

$$R_{3232}^{(c)} = 0, \quad R_{1313}^{(c)} = 0, \quad R_{2121}^{(c)} = 0,$$

$$R_{3213}^{(c)} = 0, \quad R_{2132}^{(c)} = 0, \quad R_{1321}^{(c)} = 0.$$

Tenere presente che per avere $\underline{R}^{(c)}$ in componenti covarianti occorre eseguire l'operazione:

$$R_{LIJK}^{(c)} = C_{LH} R^{(c)H}{}_{IJK}.$$

Valgono inoltre le identità di Bianchi:

$$R^{(c)L}{}_{IJK,H} + R^{(c)L}{}_{IKH,J} + R^{(c)L}{}_{IHJ,K} = 0.$$

Capitolo 2

Sistemi di riferimento

2.1 Moto rigido

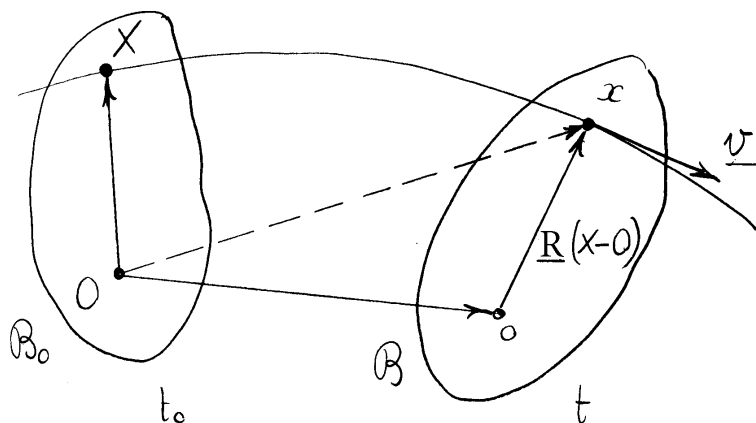
Risulta:

$$x - O = (o - O) + \underline{R} (X - O),$$

dove $\underline{R}$ è un tensore rotazione, quindi tale che:

$$\begin{cases} \underline{R} \underline{R}^T = \underline{R}^T \underline{R} = \underline{I} \\ \det \underline{R} = 1 \end{cases}$$

La velocità $\underline{v}$, valutata sulla traiettoria della



generica particella X , risulta:

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \dot{\underline{R}} (X - O) \quad \left[\underline{v}_0 = \frac{d}{dt} (o - O) \right]$$

$$= \underline{v}_0 + \dot{\underline{R}} \underline{R}^T \underline{R} (X - O) \quad \left[\underline{R}^T \underline{R} = \underline{I} \right]$$

$$= \underline{v}_0 + \dot{\underline{R}} \underline{R}^T (x - o) . \quad \left[x - o = \underline{R} (X - O) \right]$$

Posto:

$$\underline{\Omega} = \dot{\underline{R}} \underline{R}^T, \quad \underline{\Omega} \equiv \text{velocità angolare}$$

risulta infine:

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\Omega} (x - o) .$$

La velocità angolare $\underline{\Omega}$ è emisimmetrica. Infatti:

$$\underline{R} \underline{R}^T = \underline{I} \Rightarrow \dot{\underline{R}} \underline{R}^T + \underline{R} \dot{\underline{R}}^T = \underline{0} \Rightarrow \underline{\Omega} + \underline{\Omega}^T = \underline{0} .$$

Se $\underline{\omega}$ è il vettore assiale di $\underline{\Omega}$ risulta anche:

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times (x - o) .$$

Riordiniamo la relazione tra le componenti di $\underline{\Omega}$ e le componenti del suo vettore assiale:

$$\underline{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}, \quad \underline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix},$$

oppure: xyzxyz

$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_{yx} & \Omega_{xz} \\ \Omega_{yx} & 0 & -\Omega_{zy} \\ -\Omega_{xz} & \Omega_{zy} & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\omega} = \begin{Bmatrix} \Omega_{zy} \\ \Omega_{xz} \\ \Omega_{yx} \end{Bmatrix}.$$

Derivando la velocità, sempre su una traiettoria, si ottiene l'accelerazione:

$$\underline{a} = \underline{a}_0 + \dot{\underline{\Omega}}(x-o) + \underline{\Omega} \frac{d}{dt}(x-o).$$

dove:

$$\underline{a}_0 = \dot{\underline{v}}_0,$$

e' l'accelerazione del punto o di riferimento.

Poiché:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x-o) &= \frac{d}{dt} \{ \underline{R}(x-o) \} = \dot{\underline{R}}(x-o) \\ &= \dot{\underline{R}} \underline{R}^T \underline{R}(x-o) = \underline{\Omega}(x-o), \end{aligned}$$

risulta infine:

$$\underline{a} = \underline{a}_0 + (\dot{\underline{\Omega}} + \underline{\Omega}^2)(x-o).$$

2.2 Eventi e sistemi di riferimento

Un osservatore associa ad un evento la sua posizione nello spazio e l'istante di tempo in cui avviene. Eventi che avvengono nello stesso istante di tempo sono detti simultanei.

Nell'ambito della meccanica newtoniana lo spazio $\mathcal{E}$ in cui l'osservatore posiziona gli eventi è uno spazio euclideo tridimensionale, mentre lo spazio $\mathcal{T}$ degli istanti di tempo è

pure euclideo ma monodimensionale. Inoltre la simultaneità di due eventi, la distanza di due eventi simultanei e l'intervallo di tempo tra due eventi sono, sempre nell'ambito della meccanica newtoniana, dei concetti assoluti, ovvero non dipendono dall'osservatore. Dipende invece dall'osservatore la distanza di due eventi non simultanei, distanza che quindi non ha significato assoluto.

Lo spazio $\mathcal{E}$ delle posizioni e quello $\mathcal{T}$ degli istanti di tempo associati ad un osservatore costituiscono il suo sistema di riferimento. Sia in $\mathcal{E}$ che in $\mathcal{T}$ possono poi essere assunti diversi sistemi di coordinate. Dare un sistema di riferimento (cioè un osservatore con i suoi spazi associati) è quindi cosa distinta e precedente al dare un sistema di coordinate.

Lo spazio delle posizioni $\mathcal{E}$, associato ad un dato osservatore, non è altro che lo spazio rigidamente

connesso all'osservatore stesso. Spazi associati ad osservatori diversi si muoveranno l'uno rispetto all'altro di moto rigido.

2.3 Cambiamento di sistema di riferimento

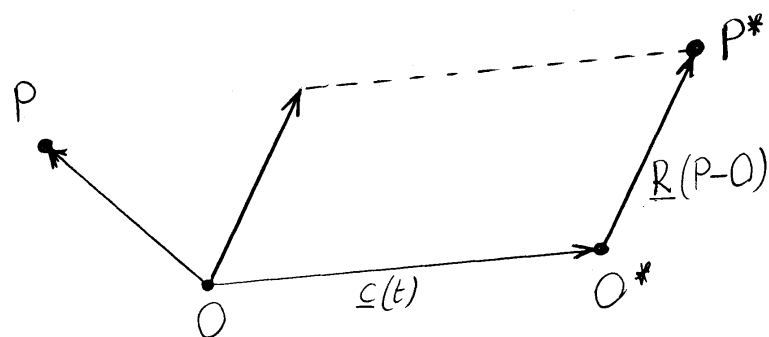
Si considerino due osservatori $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}^*$ con i loro sistemi di riferimento $(\mathcal{E}, \mathcal{T})$ e $(\mathcal{E}^*, \mathcal{T}^*)$.

Sia e un evento che avviene all'istante t_0 di $\mathcal{O}$ e a quello t_0^* di $\mathcal{O}^*$. Poiché gli eventi simultanei ad e sono indipendenti dall'osservatore è possibile istituire all'istante t_0 di $\mathcal{O}$ e t_0^* di $\mathcal{O}^*$ una corrispondenza tra i punti di $\mathcal{E}$ e quelli di $\mathcal{E}^*$, e tale corrispondenza deve essere una isometria, cioè una corrispondenza che lascia invariate le distanze. Identificati così i punti di $\mathcal{E}$ in $\mathcal{E}^*$ all'istante t_0 di $\mathcal{O}$, è poi possibile determinare la corrispondenza tra i due spazi ad un istante t di $\mathcal{O}$ generico. Dovendo

essere una isometria, tale corrispondenza si scrive:

$$P^* = O + \underline{c}(t) + \underline{R}(t)(P - O), \quad (1)$$

dove: O è un punto di $\mathcal{E}^*$ assunto quale riferimento; $\underline{c}(t)$ è il vettore posizione del punto O^* di $\mathcal{E}^*$ che coincide con il punto di $\mathcal{E}$ che al tempo t_0 coincide con O ; P^* è il punto di $\mathcal{E}^*$ che coincide con il punto di $\mathcal{E}$ che al tempo t_0 coincide con il punto P , sempre di $\mathcal{E}^*$; $\underline{R}(t)$ è il tensore rotazione del moto rigido dello spazio $\mathcal{E}$ rispetto allo spazio $\mathcal{E}^*$.



Spazio $\mathcal{E}^*$ di $\mathcal{O}^*$

In altre parole, P^* rappresenta la traiettoria in $\mathcal{E}^*$ di un punto connesso rigidamente all'osservatore $\mathcal{O}$. Se si vuole che la trasformazione (1) sia una trasformazione continua rispetto agli istanti t , allora $\underline{R}(t)$ deve essere una rotazione, cioè deve essere $\det \underline{R} = 1$. Infatti la (1) richiede che sia $\underline{R}(t_0) = \underline{I}$ affinché risulti $P^* = P$ al tempo t_0 di $\mathcal{O}$.

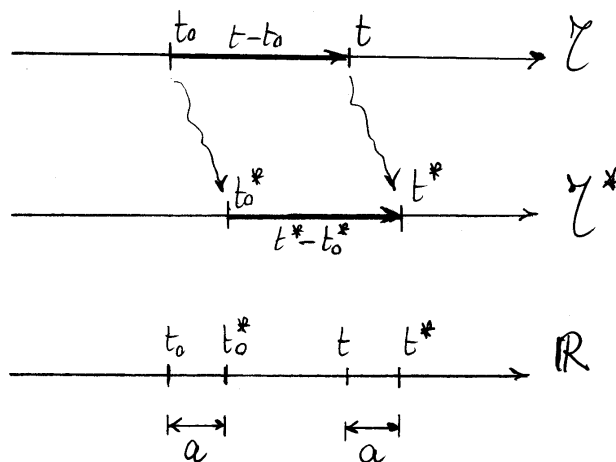
L'indipendenza degli intervalli di tempo dall'osservatore permette di istituire la seguente relazione tra gli istanti t di $\mathcal{O}$ e quelli corrispondenti t^* di $\mathcal{O}^*$:

$$t^* = t_0^* + (t - t_0). \quad (2)$$

Le (1) e (2) rappresentano un cambiamento di sistema di riferimento. L'evento individuato dalla coppia (P, t) relativamente all'osservatore $\mathcal{O}$ è individuato dalla coppia (P^*, t^*) relativamente all'osservatore

O^* . Si noti che l'isometria istituita al tempo t_0 di O tra i due spazi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}^*$ permette di interpretare la trasformazione (1) quale trasformazione dello spazio $\mathcal{E}^*$ in se stesso, poiché il punto P che compare nella (1) è il punto in $\mathcal{E}^*$ che corrisponde ad un punto di $\mathcal{E}$ all'istante t_0 di O .

Anche la relazione (2) può essere interpretata come una trasformazione di uno spazio in se stesso, al prezzo però di scriverla in componenti. Se infatti



invece degli istanti e degli intervalli di tempo (intesi come punti e come segmenti orientati sugli assi dei tempi Z^* e Z) consideriamo la loro misura la (2) diretta:

$$t^* = t + a \quad (3)$$

dove $a = t_0^* - t_0$. La (3) rappresenta una trasformazione dell'asse reale R in se stesso ed a ha il significato di una traslazione di tale asse.

2.4 Gruppi di trasformazioni

I cambiamenti di sistema di riferimento :

$$\begin{cases} P^* = O + \underline{C} + \underline{R}(P - O) \end{cases} \quad (1a)$$

$$\begin{cases} t^* = t + a \end{cases} \quad (1b)$$

dipendono dal vettore $\underline{C}$, che rappresenta una traslazione rigida dello spazio, dal tensore $\underline{R}$ che rappresenta una rotazione rigida dello spazio attorno al punto O e

dallo scalare a che rappresenta una traslazione dell'asse reale dei tempi. Le trasformazioni (1a) definiscono il gruppo dei moti rigidi dello spazio. Il gruppo delle traslazioni (trasformazioni di Galileo):

$$P^* = O + \underline{c}, \quad (2)$$

ne costituisce un sottogruppo, così come il gruppo delle rotazioni attorno ad un punto fisso O (un gruppo per ogni punto O):

$$P^* = O + \underline{R}(P-O). \quad (3)$$

Se al gruppo di trasformazioni (1a) aggiungiamo le inversioni dello spazio di dato centro O :

$$P^* = O - \underline{I}(P-O), \quad (4)$$

si ottiene il gruppo delle isometrie dello spazio, cioè il gruppo delle trasformazioni che lasciano invariate le distanze tra punti:

$$P^* = O + \underline{c} + \underline{Q}(P-O), \quad (5)$$

dove $\underline{Q}$ è una trasformazione ortogonale.

Diversi autori (compreso Truesdell) si riferiscono alla (5) e non alla (1a) quando parlano di cambiamento di sistema di riferimento (o di osservatore).

È prassi comune assumere che le leggi fisiche siano invarianti per inversione dello spazio. Un "osservatore" che differisce da un altro per l'aggiunta, oltre che di un moto rigido, anche di una inversione dello spazio non fa altro che concretizzare tale assunzione.

Anche le trasformazioni (1b) costituiscono un gruppo, il gruppo delle traslazioni rigide dell'asse reale dei tempi. Se a tale gruppo si aggiunge l'inversione dell'asse dei tempi:

$$t^* = -t, \quad (6)$$

si ottiene il gruppo delle isometrie dell'asse dei tempi:

$$t^* = qt + a, \quad (7)$$

dove $q = 1$ oppure $q = -1$.

2.5 Quantità oggettive

Nel seguito si farà riferimento al gruppo delle isometrie dello spazio e al gruppo delle traslazioni dell'asse dei tempi:

$$\begin{cases} P^* = O + \underline{c} + \underline{Q} (P - O), & (1a) \\ t^* = t + a & (1b) \end{cases}$$

dove $\underline{Q}$ è un generico tensore ortogonale, cioè tale che $\det \underline{Q} = \pm 1$.

Le trasformazioni (1a) dei punti dello spazio lasciano invariate le quantità scalari:

$$\alpha^* = \alpha. \quad (2)$$

Le quantità vettoriali e tensoriali sono invece modificate dalla trasformazione (1a). Sia infatti $\underline{v} = P_2 - P_1$. Risulta:

$$\underline{v}^* = P_2^* - P_1^* = \underline{Q} (P_2 - P_1),$$

e dunque:

$$\underline{v}^* = \underline{Q} \underline{v}. \quad (3)$$

Inoltre, se il tensore doppio $\underline{A}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, è tale che $\underline{u} = \underline{A} \underline{v}$, allora il corrispondente tensore $\underline{A}^*$ nella trasformazione deve essere tale che $\underline{u}^* = \underline{A}^* \underline{v}^*$, e poiché $\underline{u}^* = \underline{Q} \underline{u} = \underline{Q} \underline{A} \underline{v}$, deve risultare:

$$\underline{Q} \underline{A} \underline{v} = \underline{A}^* \underline{Q} \underline{v} \quad \text{per ogni } \underline{v} \in \mathcal{V}.$$

Ne consegue che deve essere:

$$\underline{A}^* = \underline{Q} \underline{A} \underline{Q}^T. \quad (4)$$

Per quel che riguarda una forma lineare $\underline{\beta}: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, se $\alpha = \underline{\beta} \underline{v}$ allora deve essere $\alpha^* = \underline{\beta}^* \underline{v}^*$ e poiché $\alpha^* = \alpha = \underline{\beta} \underline{v}$ e $\underline{v}^* = \underline{Q} \underline{v}$ deve infine essere:

$$\underline{\beta}^* = \underline{\beta} \circ \underline{Q}^T. \quad (5)$$

Si noti che se $\underline{b}$ è il vettore associato a $\underline{\beta}$, cioè tale che $\underline{b} \cdot \underline{v} = \underline{\beta} \underline{v}$ per ogni $\underline{v} \in \mathcal{V}$, allora deve risultare:

$$\underline{b}^* \cdot \underline{v}^* = \underline{b} \cdot \underline{v} \Rightarrow \underline{b}^* \cdot \underline{Q} \underline{v} = \underline{b} \cdot \underline{v},$$

per ogni $\underline{v} \in \mathcal{V}$ e dunque:

$$\underline{b}^* = \underline{Q} \underline{b}. \quad (6)$$

Ne risulta che il vettore rappresentativo di una forma lineare si trasforma in accordo con la (3). Analogamente, sia $\underline{A} : \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}^*$ un automorfismo su forme lineari e sia $\underline{B} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ il corrispondente automorfismo su vettori, cioè, se $\underline{\alpha} = \underline{A} \underline{\beta}$ allora $\underline{a} = \underline{B} \underline{b}$, dove $\underline{a}$ è il vettore associato a $\underline{\alpha}$ e $\underline{b}$ quello associato a $\underline{\beta}$.

Poichè i vettori che rappresentano covettori si trasformano allo stesso modo dei vettori, si ottiene l'analogia della (4):

$$\underline{B}^* = \underline{Q} \underline{B} \underline{Q}^T.$$

Analogamente, per il tensore $\underline{A}$ corrispondente di una forma bilineare su vettori deve risultare:

$$\underline{u}^* \cdot \underline{A}^* \underline{v}^* = \underline{u} \cdot \underline{A} \underline{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{u}^* \cdot \underline{A}^* \underline{v}^* = \underline{Q}^T \underline{u}^* \cdot \underline{A} \underline{Q}^T \underline{v}^*,$$

e quindi, ancora in accordo con la (4):

$$\underline{A}^* = \underline{Q} \underline{A} \underline{Q}^T.$$

Stesso risultato si ha per una forma bilineare su forme lineari, ovvero sia il corrispondente tensore doppio $\underline{A}$ si modifica in accordo alla (4). In definitiva, un tensore doppio (un endomorfismo su vettori) si modifica in accordo alla (4) indipendentemente da chi rappresenta, osi come un vettore si trasforma in accordo alla (3).

Grandezze scalari, vettoriali e tensoriali (del secondo ordine) di tipo spaziale (cioè indipendenti dalla configurazione di riferimento) che si trasformano in accordo con le (2), (3) e (4) sotto l'azione delle trasformazioni (1) sono dette oggettive, od anche

indipendenti dall'osservatore.

Si ricordi che punti e tempi corrispondenti tramite le (1) possono essere interpretati come lo stesso evento visto da osservatori diversi (a meno di una inversione dello spazio).

Infine notiamo che la trasformazione del prodotto $\underline{A}\underline{B}$ di due tensori si ottiene facendo i prodotti dei trasformati:

$$(\underline{A}\underline{B})^* = \underline{Q} \underline{A} \underline{B} \underline{Q}^T = (\underline{Q} \underline{A} \underline{Q}^T)(\underline{Q} \underline{B} \underline{Q}^T) = \underline{A}^* \underline{B}^*, \quad (7)$$

analogamente all'applicazione di un tensore a un vettore:

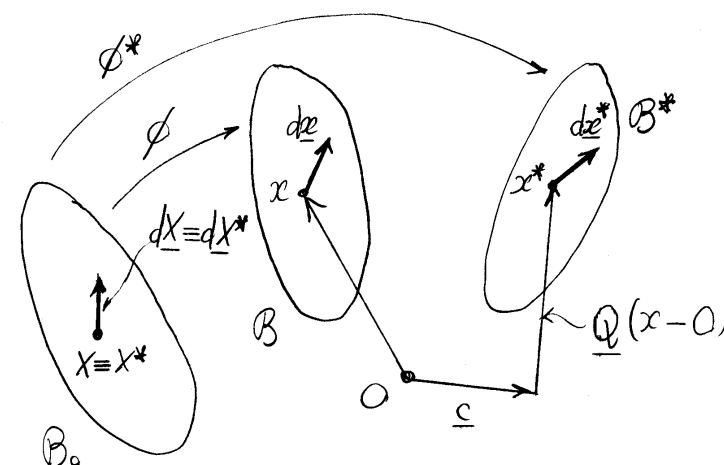
$$(\underline{A}\underline{v})^* = \underline{Q}(\underline{A}\underline{v}) = (\underline{Q} \underline{A} \underline{Q}^T)(\underline{Q} \underline{v}) = \underline{A}^* \underline{v}^*. \quad (8)$$

2.6 Effetto del cambiamento di sistema di riferimento sulla deformazione

Vediamo ora come si modificano la deformazione e le grandezze cinematiche derivate da essa a seguito delle trasformazioni dei punti dello spazio:

$$\begin{cases} x^* = O + \underline{c} + \underline{Q}(x - O), & (1a) \\ t^* = t + a. & (1b) \end{cases}$$

Ricordiamo che le trasformazioni (1) rappresentano un cambiamento di osservatore "proiettato" nello spazio dell'osservatore $\mathcal{O}^*$ tramite una isometria ad un



tempo t_0 . Questo per dire che uno dei due osservatori è fittizio e viene introdotto nel discorso al solo scopo di stabilire delle proprietà di invarianza. Da questo punto di vista non ha alcuna importanza il fatto che l'osservatore fittizio $\mathcal{O}$ potrebbe scegliere una configurazione di riferimento generica: la sua configurazione di riferimento può essere automaticamente fissata da quella dell'osservatore principale tramite l'isometria al tempo t_0 . La proiezione della configurazione di riferimento dell'osservatore fittizio $\mathcal{O}$ coincide quindi con quella B_0 di $\mathcal{O}^*$ ad ogni istante.

I punti materiali trasformati X^* coincidono dunque con quelli iniziali (in ogni caso la trasformazione sarebbe indipendente dal tempo):

$$X^* = X. \quad (2)$$

Sotto l'azione della (1a) una deformazione ϕ gene-

rica si trasforma secondo la relazione:

$$\phi^*(X^*) = \phi^*(X) = 0 + \underline{C} + \underline{Q} [\phi(X) - 0]. \quad (3)$$

Gli elementi di linea materiali restano invariati:

$$d\underline{X}^* = d\underline{X}, \quad (4)$$

e gli elementi di linea spaziali si trasformano in accordo con la:

$$d\underline{x}^* = \underline{Q} d\underline{x}. \quad (5)$$

Il trasformato del gradiente $\underline{F}$ della deformazione deve essere tale che:

$$d\underline{x}^* = \underline{F}^* d\underline{X}^* \Rightarrow \underline{Q} \underline{F} d\underline{X} = \underline{F}^* d\underline{X},$$

per ogni $d\underline{X} \in \mathcal{V}_X$ e dunque:

$$\underline{F}^* = \underline{Q} \underline{F}. \quad (6)$$

Questa trasformazione è in accordo con quanto si otterrebbe facendo il gradiente rispetto ad $X^* = X$ della (3).

Poiché deve poi essere:

$$d\underline{X}^* = (\underline{F}^{-1})^* d\underline{x}^* \Rightarrow \underline{F}^{-1} d\underline{x} = (\underline{F}^{-1})^* \underline{Q} d\underline{x},$$

si ottiene anche:

$$(\underline{F}^{-1})^* = \underline{F}^{-1} \underline{Q}^T = (\underline{Q} \underline{F})^{-1} = (\underline{F}^*)^{-1}. \quad (7)$$

Analogamente per l'operazione di trasposizione per la quale deve essere:

$$\begin{aligned} (\underline{F}^T)^* d\underline{x}^* \cdot d\underline{X}^* &= d\underline{x}^* \cdot \underline{F}^* d\underline{X}^* \\ &= (\underline{F}^*)^T d\underline{x}^* \cdot d\underline{X}^*, \end{aligned}$$

per ogni $d\underline{x} \in \mathcal{V}_x$ e $d\underline{X} \in \mathcal{V}_X$, e cioè:

$$(\underline{F}^T)^* = (\underline{F}^*)^T. \quad (8)$$

Sia $\underline{v}$ un vettore spaziale oggettivo generico. Il suo pull-back quale vettore vale $\underline{F}^{-1} \underline{v}$ e si ha

$$\begin{aligned} (\underline{F}^{-1} \underline{v})^* &= (\underline{F}^{-1})^* \underline{v}^* = (\underline{F}^*)^{-1} \underline{Q} \underline{v} = \\ &= (\underline{Q} \underline{F})^{-1} \underline{Q} \underline{v} = \underline{F}^{-1} \underline{Q}^T \underline{Q} \underline{v} = \underline{F}^{-1} \underline{v}. \end{aligned}$$

Analogo risultato si ottiene per il pull-back di $\underline{v}$ quale forma lineare:

$$(\underline{F}^T \underline{v})^* = \underline{F}^T \underline{v}.$$

Questi due risultati affermano che i pull-back di vettori spaziali oggettivi sono invarianti sotto un cambio di osservatore.

Per quel che riguarda i tensori del secondo ordine, si consideri il pull-back di un $A: \mathcal{V}_x \rightarrow \mathcal{V}_x$ oggettivo tipo endomorfismo su vettori:

$$\begin{aligned} (\underline{F}^{-1} \underline{A} \underline{F})^* &= (\underline{F}^{-1})^* \underline{A}^* \underline{F}^* = (\underline{F}^*)^{-1} \underline{A}^* \underline{F}^* \\ &= \underline{F}^{-1} \underline{Q}^T \underline{Q} \underline{A} \underline{Q}^T \underline{Q} \underline{F} = \underline{F}^{-1} \underline{A} \underline{F}. \end{aligned}$$

Relazioni analoghe si ottengono per gli altri tipi di pull-back per via dell'analogo comportamento di $\underline{F}^{-1}$ e $\underline{F}^T$ da una parte e di $\underline{F}$ e $\underline{F}^{-T}$ dall'altra parte. In definitiva i pull-back di tensori spaziali oggettivi del secondo ordine sono invarianti sotto un cambio di osservatore.

Naturalmente vale anche il risultato inverso: i push-forward di vettori e tensori doppi materiali invarianti sotto un cambio di osservatore originano dei vettori e tensori doppi spaziali oggettivi.

2.7 Effetto del cambiamento di sistema di riferimento sul moto

Si consideri il moto di un punto materiale X rispetto a due osservatori in moto relativo tra loro.

Osservatore O^* fisso

Osservatore O mobile

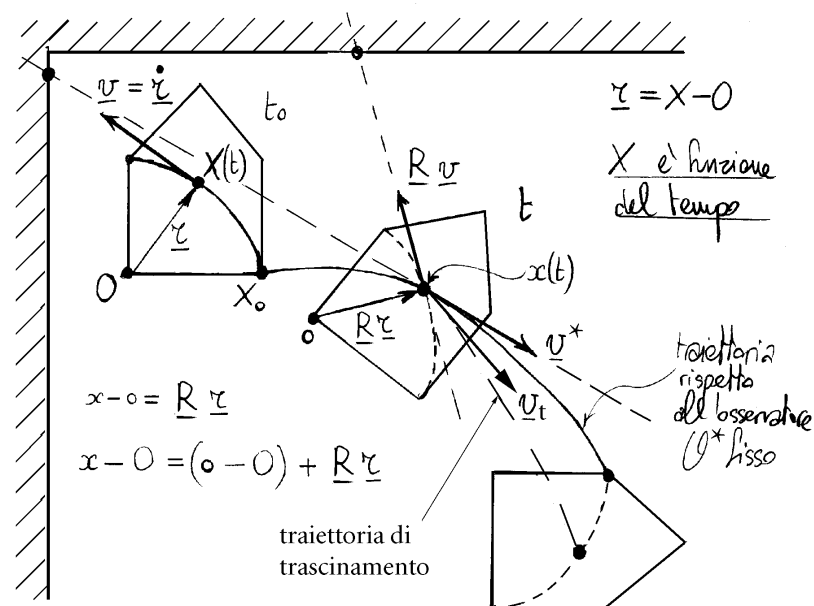
O^* fisso significa che la descrizione è fatta dal punto di vista di O^* .

Velocità angolare di O rispetto ad O^* :

$$\underline{\Omega} = \dot{\underline{R}} \underline{R}^T.$$

Velocità di trascinamento di X al tempo t (velocità che avrebbe X rispetto ad O^* se dal tempo t in poi fosse connesso rigidamente all'osservatore O nella posizione x che X occupa all'istante t):

$$\underline{v}_t = \underline{v}_0 + \underline{\Omega} (\underline{R} \underline{r}).$$



Accelerazione di trascinamento di X al tempo t :

$$\underline{a}_t = \underline{a}_0 + (\underline{\dot{\Omega}} + \underline{\Omega}^2)(\underline{R} \underline{r}).$$

Velocità di X rispetto ad O :

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}}.$$

Velocità di X rispetto ad O^* :

$$\underline{v}^* = \dot{\underline{x}} = \underline{v}_0 + \dot{\underline{R}} \underline{r} + \underline{R} \dot{\underline{r}} = \underline{v}_t + \underline{R} \underline{v}.$$

Accelerazione di X rispetto ad $\mathcal{O}$

$$\underline{a} = \underline{\dot{v}} = \underline{\ddot{r}}.$$

Accelerazione di X rispetto ad $\mathcal{O}^*$

$$\begin{aligned}\underline{a}^* &= \underline{\dot{v}}_t + \underline{R} \underline{\dot{v}} = \overbrace{\underline{a}_0 + \underline{\dot{\Omega}} \underline{R} \underline{r} + \underline{\Omega} \underline{\dot{R}} \underline{r}}^{\underline{a}_t} \\ &\quad + \underline{\Omega} \underline{R} \underline{v} + \underline{\dot{R}} \underline{v} + \underline{R} \underline{a} \\ &= \underline{a}_t + \underline{a}_c + \underline{R} \underline{a}.\end{aligned}$$

Accelerazione di Coriolis :

$$\begin{aligned}\underline{a}_c &= 2 \underline{\Omega} \underline{R} \underline{v} \\ &= 2 \underline{\Omega} (\underline{v}^* - \underline{v}_t) = 2 \underline{\omega} \times (\underline{v}^* - \underline{v}_t).\end{aligned}$$

2.8 Prima e seconda legge di Newton

La legge di inerzia afferma che un punto materiale non soggetto a forze ha accelerazione nulla rispetto alle stelle fisse.

La seconda legge di Newton afferma che la forza totale $\underline{f}^*$ che agisce su un punto materiale X è data dal prodotto della massa m della particella per l'accelerazione $\underline{a}_s$ del punto rispetto alle stelle fisse:

$$\underline{f} = m \underline{a}_s.$$

Un osservatore $\hat{\mathcal{O}}$ solidale alle stelle fisse è detto osservatore inerziale o stellare.

Siano allora $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ due osservatori in generale non inerziali. Se $\underline{R}_1$ e $\underline{R}_2$ sono le rotazioni di $\hat{\mathcal{O}}$ rispetto a $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ e $\hat{\underline{a}}$ è l'accelerazione del punto rispetto all'osservatore stellare $\hat{\mathcal{O}}$ si ha:

$$\underline{a}_{s1} = \underline{R}_1 \hat{\underline{a}}, \quad \underline{a}_{s2} = \underline{R}_2 \hat{\underline{a}}.$$

La rotazione $\underline{R}_{21}$ di $\mathcal{O}_2$ rispetto a $\mathcal{O}_1$ vale:

$$\underline{R}_{21} = \underline{R}_1 \underline{R}_2^T,$$

e quindi risulta:

$$\underline{a}_{s1} = \underline{R}_{21} \underline{a}_{s2} ,$$

in accordo col fatto che l'accelerazione di un punto rispetto alle stelle fisse è una quantità oggettiva.

Rispetto ad un osservatore generico $\mathcal{O}$ l'accelerazione della particella vale:

$$\underline{a} = \underline{a}_s + \underline{a}_t + \underline{a}_c ,$$

Quindi:

$$m \underline{a} = m \underline{a}_s + m \underline{a}_t + m \underline{a}_c = \underline{f} + \underline{f}_t + \underline{f}_c ,$$

dove:

$\underline{f} \equiv$ forze indipendenti dall'osservatore,

$\underline{f}_t \equiv$ forze di trascinamento,

$\underline{f}_c \equiv$ forze di Coriolis.

E' chiaro che in tale espressione interviene il trascinamento del punto X pensato solidale alle stelle fisse e calcolato rispetto all'osservatore $\mathcal{O}$.

Capitolo 3

Velocità di deformazione

3.1 Derivazione materiale

Per derivata materiale o lagrangiana di un campo generico si intende la sua derivata temporale lungo le traiettorie dei punti del continuo, cioè la derivata ad $X = \text{cost}$. E' consuetudine indicarla con un punto sovrapposto oppure con il simbolo di derivata totale rispetto al tempo (sottinteso, totale sulla traiettoria).

Sia dunque $\underline{M}(X, t)$ un generico campo tensoriale materiale (se il campo e' scalare o vettoriale le cose non cambiano). Risulta, per definizione:

$$\dot{\underline{M}} = \frac{\partial \underline{M}}{\partial t},$$

dato che $\underline{M}$ e' funzione di X e di t . Sia invece

$\underline{S}(x, t)$ un generico campo tensoriale spaziale.

La sua versione materiale $\underline{S}_{\text{ref}}$ risulta:

$$\underline{S}_{\text{ref}} = \underline{S} \circ \phi,$$

ovverossia:

$$\underline{S}_{\text{ref}}(X, t) = \underline{S}(\phi(X, t), t).$$

La versione lagrangiana della sua derivata materiale risulta dunque:

$$\begin{aligned} (\dot{\underline{S}})_{\text{ref}} &= \frac{\partial}{\partial t} (\underline{S} \circ \phi) = \\ &= \frac{\partial \underline{S}}{\partial t} \circ \phi + (\text{grad } \underline{S} \circ \phi) \frac{\partial \phi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Poiche':

$$\dot{\underline{S}} = (\dot{\underline{S}})_{\text{ref}} \circ \phi^{-1} \quad \text{e} \quad \underline{v} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \circ \phi^{-1},$$

si ottiene:

$$\dot{\underline{S}} = \frac{\partial \underline{S}}{\partial t} + (\text{grad } \underline{S}) \underline{v},$$

e in componenti cartesiane ortogonali:

$$\dot{S}_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_h} v_h.$$

Notare che nelle formule precedenti $\partial \underline{S} / \partial t$ indica la derivata temporale euleriana o spaziale mentre $\text{grad} \underline{S}$ indica il gradiente euleriano di $\underline{S}$.

La derivata materiale del campo degli spostamenti $\underline{u}$ coincide con il campo delle velocità:

$$\underline{v} = \dot{\underline{u}}.$$

3.2 Gradiente spaziale della velocità

Sia $\underline{v}$ il campo spaziale della velocità:

$$\underline{v}: B \rightarrow \mathcal{V}_x, \quad x \mapsto \underline{v}(x).$$

Il Gradiente (spaziale) della velocità:

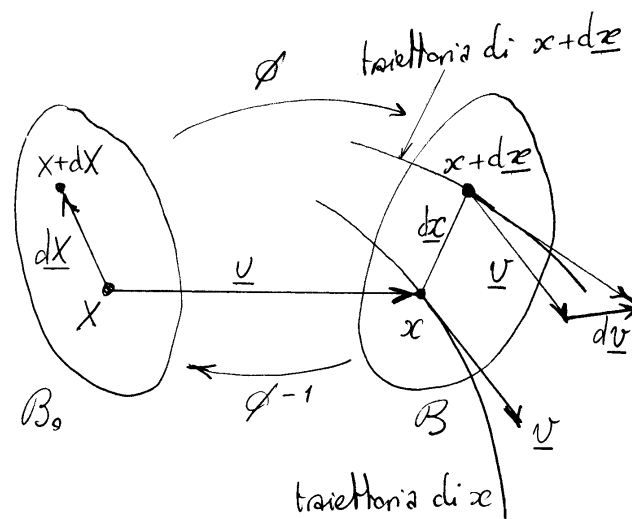
$$\underline{L} = \text{grad} \underline{v},$$

è un campo tensoriale spaziale:

$$\underline{L}: B \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_x), \quad \underline{L}(x): \mathcal{V}_x \rightarrow \mathcal{V}_x,$$

tale che:

$$d\underline{v} = \underline{L} d\underline{x},$$



dove $d\underline{v}$ è l'incremento di velocità che si ha passando dal punto x al punto $x + d\underline{x}$.

Si noti che, come già il campo delle velocità $\underline{v}$, il gradiente $\underline{L}$ è indipendente dalla configurazione B_0 di riferimento. Vediamo di ottenere $\underline{L}$ attraverso quantità legate a B_0 . Risulta:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{F}} &= \frac{\partial}{\partial t} (\text{Grad} \phi) = \text{Grad} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{Grad} \underline{v}_{\text{Ref}} \\ &= \text{Grad} (\underline{v} \circ \phi) = [(\text{grad} \underline{v}) \circ \phi] \text{Grad} \phi. \end{aligned}$$

Risulta quindi:

$$\dot{\underline{F}} = \underline{L}_{\text{ref}} \underline{F} ,$$

dove:

$$\underline{L}_{\text{ref}} = \underline{L} \circ \phi ,$$

è il gradiente (spaziale) della velocità quale campo materiale:

$$\underline{L}_{\text{ref}} : B_0 \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_x), X \rightarrow \underline{L}(\phi(X)) .$$

Normalmente scriveremo:

$$\dot{\underline{F}} = \underline{L} \underline{F} ,$$

essendo evidente dal contesto che $\underline{L}$ deve essere inteso quale campo materiale (oppure $\underline{F}$ quale campo spaziale).

Ricavando $\underline{L}$ si ottiene:

$$\underline{L} = \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} .$$

3.3 Velocità di deformazione (stretching) e di rotazione (spin)

La parte simmetrica $\underline{D}$ del gradiente spaziale della velocità:

$$\underline{D} = \frac{1}{2} (\underline{L} + \underline{L}^T) ,$$

è detta velocità di deformazione (stretching tensor).

Rispetto ad un riferimento lagrangiano totale risulta:

$$\begin{aligned} \underline{D} &= \frac{1}{2} (\dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} + \underline{F}^{-T} \dot{\underline{F}}^T) \\ &= \frac{1}{2} \underline{F}^{-T} (\underline{F}^T \dot{\underline{F}} + \dot{\underline{F}}^T \underline{F}) \underline{F}^{-1} . \end{aligned}$$

Poiché:

$$\dot{\underline{C}} = \frac{d}{dt} \underline{F}^T \underline{F} = \underline{F}^T \dot{\underline{F}} + \dot{\underline{F}}^T \underline{F} ,$$

e:

$$\underline{\dot{E}} = \frac{1}{2} \dot{\underline{C}} ,$$

risulta:

$$\underline{D} = \frac{1}{2} \underline{F}^{-T} \dot{\underline{C}} \underline{F}^{-1} = \underline{F}^{-T} \underline{\dot{E}} \underline{F}^{-1} .$$

La velocità di deformazione $\underline{D}$ risulta dunque

essere il push-forward della derivata materiale $\dot{\underline{\underline{E}}}$ del tensore di Green-Lagrange e, viceversa, $\dot{\underline{\underline{E}}}$ risulta il pull-back di $\underline{\underline{D}}$:

$$\dot{\underline{\underline{E}}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{F}}.$$

La parte emisimmetrica $\underline{\underline{\omega}}$ del gradiente $\underline{\underline{L}}$:

$$\underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^T),$$

viene detta velocità di rotazione, poiché rappresenta un atto di moto rigido locale (dell'intorno di un punto).

Se $\underline{\underline{\omega}}_a$ è il vettore assiale di $\underline{\underline{\omega}}$, risulta:

$$\underline{\underline{\omega}} d\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{\omega}}_a \times d\underline{\underline{x}}.$$

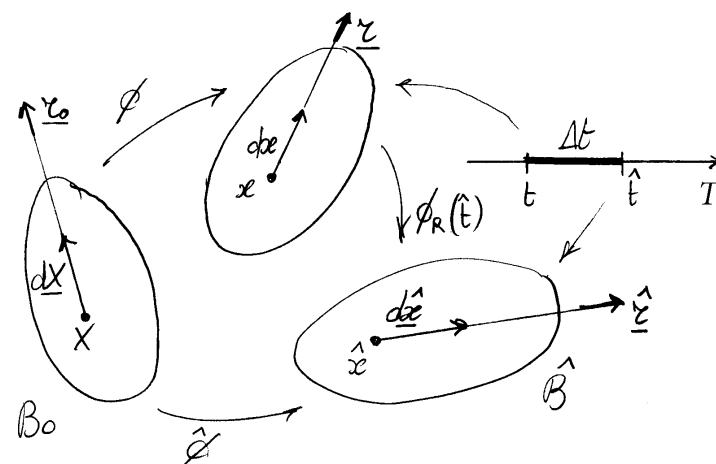
3.4 Velocità di dilatazione lineare

Adottando un riferimento lagrangiano relativo $\mathcal{B}$ dilatazione lineare $\varepsilon_r(\hat{t})$ dell'elemento $d\underline{\underline{x}} = d\underline{\underline{c}}_r$ uscente dal punto x della configurazione lagrangiana relativa $\mathcal{B}$ ha il significato fisico di dilatazione lineare associata all'intervallo di tempo $(t, \hat{t})$:

$$\varepsilon_r(\Delta t) = \varepsilon_r(\hat{t}) = \sqrt{\underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{C}}_R(\hat{t}) \underline{\underline{c}}} - 1,$$

dove:

$$\underline{\underline{C}}_R(\hat{t}) = \underline{\underline{F}}_R^T(\hat{t}) \underline{\underline{F}}_R(\hat{t}).$$



Quindi, la velocità di dilatazione lineare vale:

$$d_{\underline{\epsilon}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{\epsilon}(\Delta t)}{\hat{t} - t}$$

$$= \lim_{\hat{t} \rightarrow t} \frac{\underline{\epsilon}(\hat{t}) - \underline{\epsilon}(t)}{\hat{t} - t} = \left. \frac{d\underline{\epsilon}}{d\hat{t}} \right|_{\hat{t}=t},$$

poiché $\underline{\epsilon}(t) = 0$. Risultato:

$$d_{\underline{\epsilon}} = \left. \frac{d}{d\hat{t}} \left(\sqrt{\underline{\epsilon} \cdot \underline{C}_R \underline{\epsilon}} - 1 \right) \right|_{\hat{t}=t}$$

$$= \frac{\underline{\epsilon} \cdot \dot{\underline{C}}_R(t) \underline{\epsilon}}{2 \sqrt{\underline{\epsilon} \cdot \underline{C}_R(t) \underline{\epsilon}}}.$$

Poiché:

$$\underline{F}_R(t) = \underline{I}_x,$$

risultato:

$$\underline{C}_R(t) = \underline{I}_x,$$

$$\underline{L} = \dot{\underline{F}}_R(t) \underline{F}_R^{-1}(t) = \dot{\underline{F}}_R(t),$$

$$\dot{\underline{C}}_R(t) = \dot{\underline{F}}_R^T(t) \underline{F}_R(t) + \underline{F}_R^T(t) \dot{\underline{F}}_R(t)$$

$$= \dot{\underline{F}}_R^T(t) + \dot{\underline{F}}_R(t) = \underline{L}^T + \underline{L},$$

Risultato infine:

$$d_{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} \underline{\epsilon} \cdot (\underline{L}^T + \underline{L}) \underline{\epsilon}.$$

e cioè:

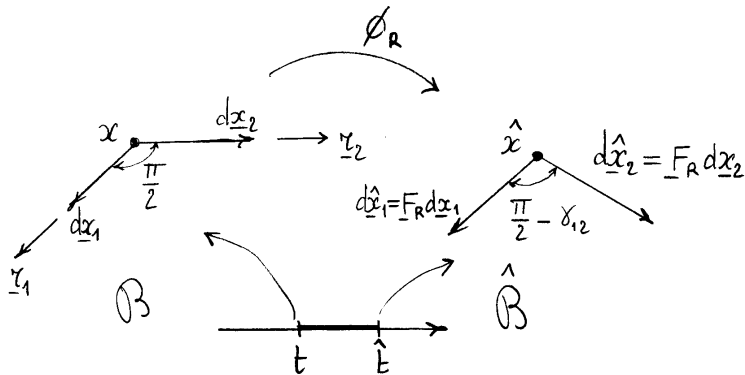
$$d_{\underline{\epsilon}} = \underline{\epsilon} \cdot \underline{D} \underline{\epsilon}.$$

3.5 Velocità di scorrimento

Derivando al tempo $\hat{t} = t$ l'espressione di $\sin \chi_{12}$, scritta rispetto al riferimento lagrangiano relativo B, si ottiene in modo analogo la derivata materiale dello scorrimento (velocità di scorrimento):

$$\left. \frac{d(\sin \chi_{12})}{d\hat{t}} \right|_{\hat{t}=t} = (\cos \chi_{12}) \left. \frac{d\chi_{12}}{d\hat{t}} \right|_{\hat{t}=t}$$

$$= \frac{(\kappa \underline{\epsilon}_1 \cdot \dot{\underline{C}}_R \underline{\epsilon}_2 - \dot{\kappa} \underline{\epsilon}_1 \cdot \underline{C}_R \underline{\epsilon}_2)}{\kappa^2},$$



dove $\underline{z}_1$ ed $\underline{z}_2$ indicano i versori di due elementi di linee ortogonali, dx_1 e dx_2 , uscenti dal punto x della configurazione lagrangiana relativa e dove:

$$\underline{K} = \sqrt{\underline{z}_1 \cdot \underline{C}_R \underline{z}_1} \sqrt{\underline{z}_2 \cdot \underline{C}_R \underline{z}_2} = 1,$$

$$\cos \delta_{12} = 1,$$

$$\dot{\underline{C}}_R = \underline{L} + \underline{L}^T,$$

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{C}_R \underline{z}_2 = \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = 0.$$

e quindi:

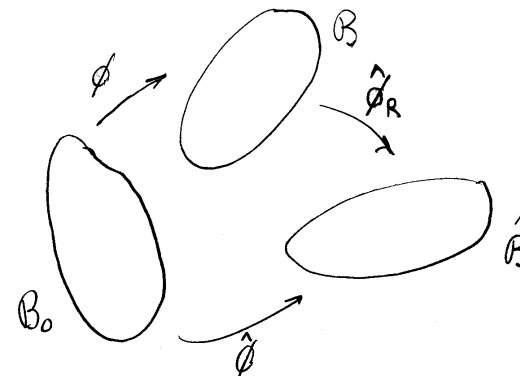
$$\dot{\delta}_{12} = \underline{z}_1 \cdot (\underline{L} + \underline{L}^T) \underline{z}_2 = 2 \underline{z}_1 \cdot \underline{D} \underline{z}_2.$$

Naturalmente le linee $\underline{z}_1$ e $\underline{z}_2$ devono essere ortogonali in B affinché $\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = 0$ nella configurazione di riferimento (in questo caso la configurazione lagrangiana relativa B). Se $\underline{z}_1$ e $\underline{z}_2$ fossero ortogonali in B_0 non lo sarebbero, in generale, nella configurazione generica B .

3.6 Derivata di Lie

La derivata di Lie di un campo tensoriale spaziale $f(t)$ funzione del tempo si ottiene facendo:

1) Il pull-back $\phi^* f$ di f dalla configurazione generica $\hat{B}$ al tempo $\hat{t}$ alla configurazione B al tempo t attuale (configurazione lagrangiana relativa);



- 2) La derivata materiale $\frac{d}{dt} \phi^* f$ di tale pull-back rispetto alla variabile tempo $\hat{t}$;
- 3) Il push-forward $\phi_* (\frac{d}{dt} \phi^* f)$ di tale derivata materiale alla configurazione $\hat{B}$;
- 4) La valutazione di tale push-forward al tempo t attuale, cioè per $\hat{t}=t$.

Indicando con $\mathcal{L}_\phi f$ la derivata di Lie si ha quindi:

$$\mathcal{L}_\phi f = \phi_* \left(\frac{d}{dt} \phi^* f \right) \Big|_{\hat{t}=t}. \quad (1)$$

Quale esempio, valutiamo la derivata di Lie di una forma bilineare (di forme lineari) $A: \mathcal{V}_x^* \times \mathcal{V}_x^* \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\phi^* A = \hat{F}_R^{-1} A \hat{F}_R^{-T},$$

$$\frac{d}{dt} \phi^* A = \hat{F}_R^{-1} \dot{A} \hat{F}_R^{-T} + \frac{d}{dt} \hat{F}_R^{-1} A \hat{F}_R^{-T} + \hat{F}_R^{-1} A \frac{d}{dt} \hat{F}_R^{-T},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi A &= \left\{ \dot{A} + \underline{F}_R \frac{d}{dt} \hat{F}_R^{-1} A + A \frac{d}{dt} \hat{F}_R^{-T} \underline{F}_R^T \right\} \Big|_{\hat{t}=t} \\ &= \dot{A} - \underline{L} A - A \underline{L}^T, \end{aligned} \quad (2)$$

dove si è tenuto conto che:

$$\dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} = \underline{L},$$

e:

$$\begin{aligned} \underline{F} \underline{F}^{-1} &= \underline{I}_x \implies \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} + \underline{F} \dot{\underline{F}}^{-1} = \underline{0} \\ &\implies \underline{F} \dot{\underline{F}}^{-1} = -\underline{L}. \end{aligned}$$

Tale derivata ha il nome di derivata di Oldroyd.

Se invece A è una forma bilineare (di vettori)

$\mathcal{V}_x \times \mathcal{V}_x \rightarrow \mathbb{R}$ si ottiene:

$$\phi^* A = \hat{F}_R^T A \hat{F}_R,$$

$$\mathcal{L}_\phi A = \dot{A} + \underline{L}^T A + A \underline{L}. \quad (3)$$

Per un endomorfismo $A: \mathcal{V}_x \rightarrow \mathcal{V}_x$ si ottiene:

$$\phi^* A = \underline{F}^{-1} A \underline{F},$$

$$\mathcal{L}_\phi A = \dot{A} - \underline{L} A + A \underline{L}, \quad (4)$$

mentre per un endomorfismo $A: \mathcal{V}_x^* \rightarrow \mathcal{V}_x^*$ si ottiene:

$$\phi^* A = \underline{F}^T A \underline{F}^{-T},$$

$$\mathcal{L}_\phi A = \dot{A} + \underline{L}^T A - A \underline{L}^T. \quad (5)$$

Se il pull-back e il push-forward vengono eseguiti con la rotazione rigida locale $\underline{R}$, si ottiene un solo tipo di derivata, detta derivata di Jaumann:

$$\phi^* \underline{A} = \hat{\underline{R}}^T \underline{A} \hat{\underline{R}}$$

$$\frac{d}{dt} \phi^* \underline{A} = \hat{\underline{R}}^T \dot{\underline{A}} \hat{\underline{R}} + \dot{\hat{\underline{R}}}^T \underline{A} \hat{\underline{R}} + \hat{\underline{R}}^T \underline{A} \dot{\hat{\underline{R}}},$$

$$\mathcal{L}_{\phi} \underline{A} = \dot{\underline{A}} - \underline{\omega} \underline{A} + \underline{A} \underline{\omega},$$

dove si è tenuto conto che in un riferimento lagrangiano relativo si ha:

$$\underline{R} = \underline{I},$$

e inoltre, derivando la decomposizione polare, si ottiene:

$$\underline{L} = \dot{\underline{R}} + \dot{\underline{U}},$$

e poiché $\dot{\underline{U}}$, quale derivata di un tensore simmetrico, è simmetrico e $\dot{\underline{R}} = \dot{\underline{R}} \underline{I} = \dot{\underline{R}} \underline{R}$ è emisimmetrico, dalla decomposizione additiva $\underline{L} = \underline{\omega} + \underline{D}$ si trae:

$$\dot{\underline{R}} = \underline{\omega}, \quad \dot{\underline{U}} = \underline{D}.$$

Capitolo 4

Dinamica

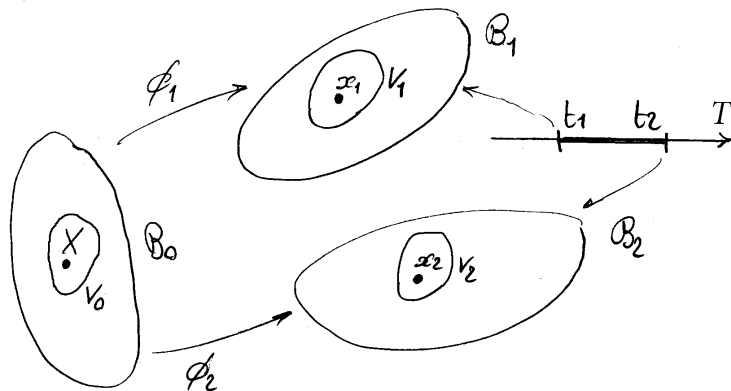
4.1 Conservazione della massa

Il principio di conservazione della massa richiede:

$$m(V_1) = m(V_2),$$

se V_1 e V_2 si corrispondono nella deformazione. Detto V_0 il corrispondente volume materiale, ad esso viene associato tale valore della massa, costante in ogni configurazione deformata. Quindi il principio può scriversi:

$$m(V) = m(V_0),$$



relativamente alla generica configurazione deformata nella quale il volume V corrisponde al volume V_0 .

Dividendo l'uguaglianza per il volume V_0 e tenendo conto che $V_0 = V/J$, dove J è lo jacobiano della deformazione, al limite per $V_0 \rightarrow X$ si ottiene la forma locale del principio:

$$Jf = \rho_0,$$

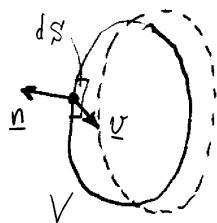
dove $\rho_0 = \lim_{V_0 \rightarrow X} m(V_0)/V_0$ rappresenta la funzione distribuzione di massa materiale.

4.1.1 Equazione di continuità

In descrizione euleriana, si consideri invece un volume V spaziale costante nel tempo e si faccia il bilancio della massa.

La variazione della massa all'interno del volume risulta:

$$\frac{\partial m(V)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$



poiché V è costante nel tempo. La derivata $\partial \rho / \partial t$ è una derivata temporale euleriana, poiché ρ , in descrizione euleriana, è un campo spaziale.

La massa entrante nel volume rappresenta invece il flusso del vettore $\rho \underline{v}$ attraverso la superficie ∂V di V :

$$\text{Flusso entrante} = - \int_{\partial V} \rho \underline{v} \cdot \underline{n} dS$$

poiché il flusso entrante attraverso dS vale $-\rho \underline{v} \cdot \underline{n} dS$.

Il bilancio della massa richiede:

$$- \int_{\partial V} \rho \underline{v} \cdot \underline{n} dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

poiché V è costante nel tempo.

Utilizzando il teorema della divergenza, si ottiene:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) \right) dV = 0.$$

Localmente si ottiene (equazione di continuità):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0.$$

Tenendo conto che:

$$\text{div}(\rho \underline{v}) = \text{grad} \rho \cdot \underline{v} + \rho \text{div} \underline{v},$$

e che:

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad} \rho \cdot \underline{v},$$

l'equazione di continuità diventa:

$$\dot{\rho} + \rho \text{div} \underline{v} = 0.$$

Derivando materialmente la legge $\rho J = \rho_0$ di conservazione della massa si ottiene invece:

$$\dot{\rho} + \rho \frac{\dot{J}}{J} = 0.$$

Dal confronto si ottiene la derivata materiale dello jacobiano espressa in funzione di $\underline{v}$:

$$\dot{J} = J \operatorname{div} \underline{v}.$$

Poiché:

$$\operatorname{div} \underline{v} = \operatorname{tr} \operatorname{grad} \underline{v} = \operatorname{tr} \underline{L} = \operatorname{tr} \underline{D},$$

si ha inoltre:

$$\dot{J} = J \operatorname{tr} \underline{L} = J \operatorname{tr} \underline{D}.$$

4.1.2 Teorema del trasporto di Reynolds

Tale teorema riguarda la derivazione materiale di un integrale di volume spaziale V , corrispondente ad un dato volume materiale V_0 e quindi variabile nel tempo:

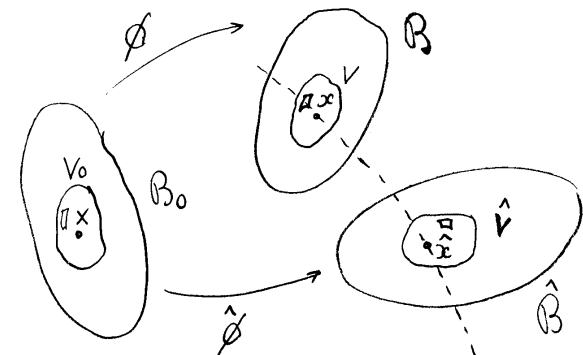
$$\frac{d}{dt} \int_V f dV = \int_V \left(\dot{f} + f \operatorname{div} \underline{v} \right) dV.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V f dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_0} f J dV_0 \\ &= \int_{V_0} \frac{d}{dt} (f J) dV_0 \\ &= \int_{V_0} \left(\dot{f} + f \frac{\dot{J}}{J} \right) J dV_0 \\ &= \int_V \left(\dot{f} + f \operatorname{div} \underline{v} \right) dV. \end{aligned}$$

In particolare si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \int_V f dV = \int_V \left(\rho \dot{f} + \dot{\rho} f + \rho f \operatorname{div} \underline{v} \right) dV,$$



che in virtù dell'equazione di continuità diventa:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{f} dV = \int_V \rho \dot{\underline{f}} dV.$$

Nel caso dell'integrazione di un campo vettoriale $\underline{f}$ si ottiene analogamente:

$$\frac{d}{dt} \int_V \underline{f} dV = \int_V \left(\dot{\underline{f}} + (\text{div } \underline{v}) \underline{f} \right) dV.$$

4.1.3 Derivate materiali della quantità di moto e del momento della quantità di moto

Utilizzando il teorema di Reynolds si ottengono la derivata materiale del momento della quantità di moto $\underline{P}$:

$$\dot{\underline{P}} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{v} dV = \int_V \rho \dot{\underline{v}} dV,$$

e la derivata del momento della quantità di moto $\underline{L}$:

$$\dot{\underline{L}} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{r} \times \underline{v} dV = \int_V \rho \dot{\underline{r}} \times \underline{v} dV =$$

$$= \int_V \rho \dot{\underline{r}} \times \underline{v} dV + \int_V \rho \underline{r} \times \dot{\underline{v}} dV,$$

e infine:

$$\dot{\underline{L}} = \int_V \rho \underline{r} \times \dot{\underline{v}} dV,$$

perché $\dot{\underline{r}} = \underline{v}$ e $\underline{v} \times \underline{v} = \underline{0}$.

$\underline{n}$ tracciato alla distanza dn da P e infine da due coppie di piani paralleli ad $\underline{n}$, ortogonali fra loro e posti ad una distanza dn .

Sulle superfici laterali dell'elemento i vettori tensione si hanno equilibrio a due a due poiché, a meno di infinitesimi di ordine superiore, hanno lo stesso vettore tensione applicato su due aree uguali e di opposta normale.

Il bilancio della quantità di moto, tenendo conto che le forze di volume e la derivata della quantità di moto sono infinitesimi di ordine superiore a dn^2 (sono proporzionali al volume), impone che sia

$$\underline{t}_g(P) = \underline{t}_\pi(P)$$

e questo per ogni $\underline{n}$ di normale $\underline{n}$ in P .

Quindi risulta provata l'esistenza della funzione $\underline{t}(P, \underline{n})$.

Con l'ipotesi di Cauchy, il principio di azione e reazione diventa:

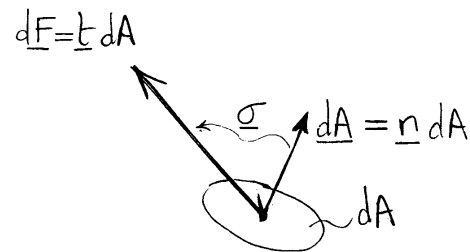
$$\underline{t}(P, \underline{n}) = -\underline{t}(P, -\underline{n}).$$

4.3 Tensore degli sforzi di Cauchy

In corrispondenza di un generico punto del solido, la tensione interna è funzione della normale $\underline{n}$ alla superficie su cui la tensione stessa si esercita. Se con $\mathcal{U}$ indichiamo l'insieme dei vettori e con $\mathcal{V}$ l'insieme dei vettori, la tensione interna rappresenta dunque, nell'intorno di un punto, una funzione del tipo:

$$\underline{t} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \underline{n} \mapsto \underline{t}(\underline{n})$$

D'altronde, se con $d\underline{F} = \underline{t} dA$ si indica la forza che globalmente si esercita su un elemento dA di superficie, di normale $\underline{n}$, viene ad istituirsi una funzione del



tipo:

$$\underline{\sigma}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^p, \quad \underline{v} \mapsto |\underline{v}| \underline{t}\left(\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}\right),$$

che, in modo evidente, è omogenea di grado 1:

$$\underline{\sigma}(\alpha \underline{v}) = \alpha \underline{\sigma}(\underline{v}).$$

Vogliamo mostrare che tale funzione è anche additiva,

ovverossia che vale la relazione:

$$\underline{\sigma}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \underline{\sigma}(\underline{v}_1) + \underline{\sigma}(\underline{v}_2),$$

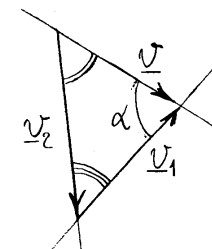
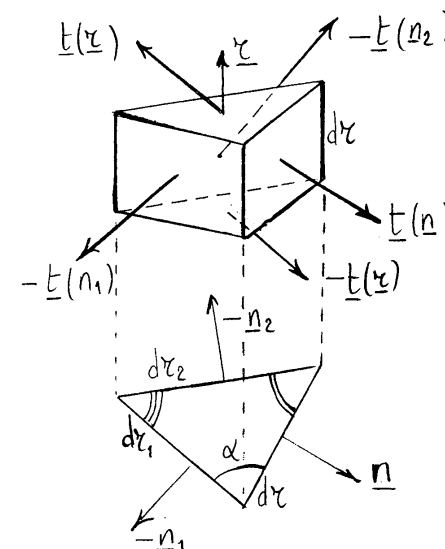
e che quindi $\underline{\sigma}$ risulta essere un tensore doppio, cioè una trasformazione lineare nell'insieme dei vettori ordinari. Tale tensore doppio è detto tensore degli sforzi, rappresentando lo sforzo interno nell'interno di un punto. Per dimostrare l'additività di $\underline{\sigma}$, si considerino due generici vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ e sia $\underline{v}$ la loro somma:

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2.$$

Si costruisca, nell'interno del punto in cui $\underline{\sigma}$ è definito, un solido prismatico di base triangolare, con i lati del triangolo perpendicolari ai tre vettori $\underline{v}$, $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ e di altezza $d\tau$ pari alla lunghezza del lato perpendicolare a $\underline{v}$.

I versori normali ai lati del triangolo valgono:

$$\begin{cases} \underline{n} = \underline{v}/|\underline{v}| \\ \underline{n}_1 = \underline{v}_1/|\underline{v}_1| \\ \underline{n}_2 = \underline{v}_2/|\underline{v}_2| \end{cases}.$$



Il triangolo di base del prisma e il triangolo di lati $\underline{v}$, $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono simili e quindi:

$$\frac{dr_1}{dr} = \frac{|\underline{v}_1|}{|\underline{v}|}, \quad \frac{dr_2}{dr} = \frac{|\underline{v}_2|}{|\underline{v}|}.$$

Il bilancio della quantità di moto del prisma, a meno di termini di ordine superiore a dr^2 , si scrive:

$$t(\underline{n}) dr^2 - t(\underline{n}_1) dr dr_1 - t(\underline{n}_2) dr dr_2 = 0,$$

poiché le forze agenti sulle due basi differiscono di termini di ordine superiore a dr^2 :

$$t(\underline{r}) \frac{1}{2} dr dr_1 \sin \alpha - t(\underline{r}) \frac{1}{2} dr dr_1 \sin \alpha$$

mentre i termini di volume sono dell'ordine di dr^3 :

$$(\underline{f} - \rho \underline{\ddot{v}}) \frac{1}{2} dr^2 dr_1 \sin \alpha.$$

Risulta quindi, dividendo per dr^2 :

$$t(\underline{n}) - t(\underline{n}_1) \frac{|\underline{v}_1|}{|\underline{v}|} - t(\underline{n}_2) \frac{|\underline{v}_2|}{|\underline{v}|} = 0$$

Moltiplicando infine per $|\underline{v}|$:

$$|\underline{v}| t\left(\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}\right) - |\underline{v}_1| t\left(\frac{\underline{v}_1}{|\underline{v}_1|}\right) - |\underline{v}_2| t\left(\frac{\underline{v}_2}{|\underline{v}_2|}\right) = 0,$$

ovvero:

$$\underline{\sigma}(\underline{v}) - \underline{\sigma}(\underline{v}_1) - \underline{\sigma}(\underline{v}_2) = 0,$$

come volevasi dimostrare.

La tensione $\underline{t}$ agente su una giacitura di normale $\underline{n}$ risulta quindi esprimibile nella forma:

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \underline{n},$$

espressione detta equazione di Cauchy.

4.4 Equazione spaziale del moto

Dato un qualunque volume V spaziale, l'equazione di bilancio della quantità di moto si scrive:

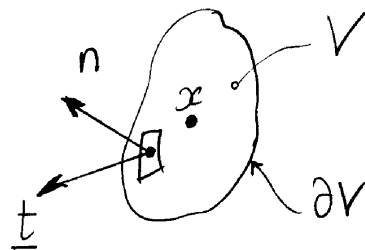
$$\int_{\partial V} \underline{t} dS + \int_V \underline{f} dV = \int_V \rho \underline{\dot{v}} dV,$$

dove:

$$\int_{\partial V} \underline{t} dS = \int_{\partial V} \underline{\sigma} \underline{n} dS.$$

Definendo la divergenza di $\underline{\sigma}$ quale forza totale agente sul contorno ∂V di V per unità di volume:

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} = \lim_{V \rightarrow x} \frac{\int_{\partial V} \underline{\sigma} \underline{n} dS}{V},$$



risulta (teorema della divergenza):

$$\int_{\partial V} \underline{\sigma} \underline{n} dS = \int_V \operatorname{div} \underline{\sigma} dV.$$

La divergenza di $\underline{\sigma}$ è un vettore e le sue dimensioni sono quelle di una forza per unità di volume. In componenti ortonormali:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \underline{\sigma} \underline{n} dS &= \int_{\partial V} \sum_{ij} (\sigma_{ij} n_j) \underline{e}_i dS \\ &= \sum_{ij} \left(\int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j dS \right) \underline{e}_i \\ &\stackrel{\text{Formula di Green}}{=} \sum_{ij} \left(\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV \right) \underline{e}_i \\ &= \int_V \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) \underline{e}_i dV. \end{aligned}$$

Dunque:

$$(\operatorname{div} \underline{\sigma})_i = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial z}.$$

Il bilancio del generico volume V , intorno del punto x , si scrive quindi:

$$\int_V (\operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} - \rho \underline{\dot{v}}) dV = \underline{0},$$

che, dovendo essere valido per ogni intorno di x , permette di estrarre l'equazione del moto in forma spaziale valida nel punto x :

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} = \rho \underline{\dot{v}}.$$

Nel caso statico risulta $\underline{\dot{v}} = \underline{0}$ e l'equazione del moto diventa:

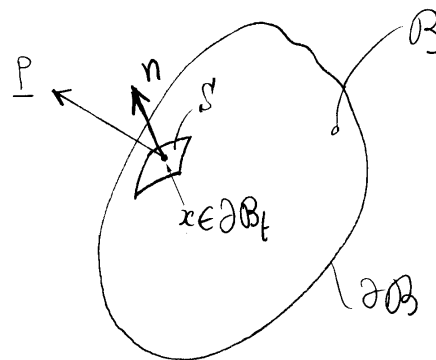
$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} = \underline{0},$$

che viene detta equazione indefinita di equilibrio.

4.5 Equazione spaziale di equilibrio al contorno

La tensione $\underline{t} = \underline{\sigma} \underline{n}$ che emerge sul contorno deve uguagliare la forza esterna $\underline{p}$ applicata sulla superficie ∂B di contorno:

$$\underline{\sigma} \underline{n} = \underline{p} \quad \text{su } \partial B \text{ (superficie esterna)}.$$



4.6 Simmetria del tensore degli sforzi

Vogliamo mostrare ora che l'imposizione del bilancio del momento della quantità di moto ad un qualunque volume V contenuto nel corpo continuo, sotto la validità dell'equazione del moto, è equivalente alla simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy. Infatti, dato il generico volume V , intorno di un punto $x \in \mathcal{B}$, il bilancio del momento della quantità di moto risulta:

$$\int_{\partial V} \underline{r} \times \underline{t} \, dS + \int_V \underline{r} \times (\underline{f} - \rho \underline{\dot{v}}) \, dV = \underline{0}.$$

L'integrale di superficie diventa:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \underline{r} \times \underline{t} \, dS &= \int_{\partial V} \underline{r} \times \underline{\sigma} \underline{n} \, dS \\ &= \int_{\partial V} e_{ijk} r_j \sigma_{kh} n_h e_i \, dS = \end{aligned}$$

formula di Green $\Rightarrow \int_V e_{ijk} \frac{\partial r_j \sigma_{kh}}{\partial x_h} e_i \, dV$

$$= \int_V e_{ijk} \left(\frac{\partial r_j}{\partial x_h} \sigma_{kh} + r_j \frac{\partial \sigma_{kh}}{\partial x_h} \right) e_i \, dV.$$

La componente r_j del vettore posizione $\underline{r}$ coincide con la coordinata x_j del punto x (nell'ipotesi non restrittiva che il polo per il calcolo dei momenti coincida con l'origine delle coordinate) e dunque $\frac{\partial r_j}{\partial x_h}$ coincide con il delta di Kronecher:

$$\frac{\partial r_j}{\partial x_h} = \delta_{jh} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = h \\ 0 & \text{se } j \neq h \end{cases}.$$

Quindi, poichè sommando sull'indice h viene conservato il solo termine corrispondente ad $h=j$:

$$\frac{\partial r_j}{\partial x_h} \sigma_{kh} = \delta_{jh} \sigma_{kh} = \sigma_{kj}.$$

Inoltre $\frac{\partial \sigma_{kh}}{\partial x_h}$ rappresenta $(\operatorname{div} \underline{\sigma})_k$. Allora:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \underline{r} \times \underline{t} \, dS &= \\ &= \int_V e_{ijk} \sigma_{kj} \underline{e}_i + \int_V e_{ijk} r_j (\operatorname{div} \underline{\sigma})_k \underline{e}_i \, dV \\ &= \int_V e_{ijk} \sigma_{kj} \underline{e}_i + \int_V \underline{r} \times \operatorname{div} \underline{\sigma} \, dV. \end{aligned}$$

Il bilancio del momento della quantità di moto diviene:

$$\int_V e_{ijk} \sigma_{kj} \underline{e}_i \, dV + \int_V \underline{r} \times (\operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} - \rho \underline{\ddot{v}}) \, dV = \underline{0}.$$

Il secondo termine è nullo per via dell'equazione del moto e infine:

$$\int_V e_{ijk} \sigma_{kj} \underline{e}_i \, dV = 0,$$

che equivale alle 3 equazioni scalari:

$$\int_V (\sigma_{zy} - \sigma_{yz}) \, dV = 0, \quad (i=1)$$

$$\int_V (\sigma_{xz} - \sigma_{zx}) \, dV = 0 \quad (i=2)$$

$$\int_V (\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) \, dV = 0 \quad (i=3)$$

Da donde queste valere per ogni volume V contenente x , nel punto x $\underline{\sigma}$ deve dunque essere simmetrico, e poiché x è generico $\underline{\sigma}$ è simmetrico ovunque.

4.7 Primo e secondo tensore di Piola-Kirchhoff

Il tensore degli sforzi di Cauchy $\underline{\sigma}$ rappresenta un campo tensoriale spaziale:

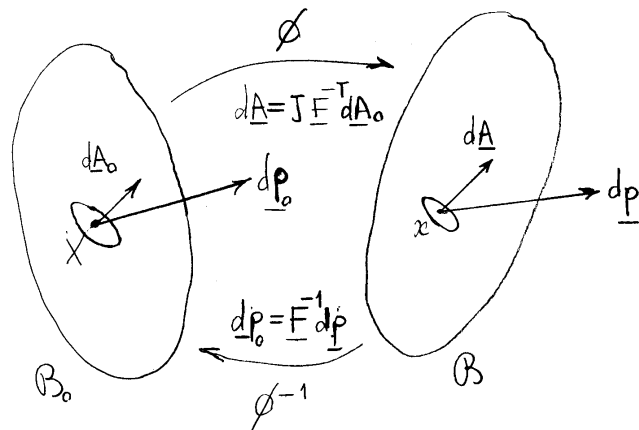
$$\underline{\sigma}: \mathcal{B} \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{A}_x, \mathcal{V}_x), \quad x \mapsto \underline{\sigma}(x),$$

il cui valore $\underline{\sigma}$ in un punto rappresenta una trasformazione lineare:

$$\underline{\sigma}(x): \mathcal{A}_x \rightarrow \mathcal{V}_x,$$

$$d\underline{A} = dA \underline{n} \mapsto d\underline{p} = \underline{\sigma} d\underline{A},$$

che ad un elemento di area orientato $d\underline{A}$ nell'intorno



del punto spaziale x associa la forza elementare $d\underline{p}$ che si trasmette attraverso l'area. Con il simbolo $\mathcal{A}_x$ si è indicata lo spazio degli elementi d'area nell'intorno del punto x , che, attraverso le normali $\underline{n}$ agli elementi d'area, può essere fatto coincidere con lo spazio tangente $\mathcal{V}_x$, ma che comunque obbedisce, tramite la deformazione, a proprie regole di trasformazione:

$$d\underline{A} = J \underline{F}^{-T} d\underline{A}_0.$$

Utilizzando tale trasformazione nella relazione

$$d\underline{p} = \underline{\sigma} d\underline{A},$$

si ottiene:

$$d\underline{p} = J \underline{\sigma} \underline{F}^{-T} d\underline{A}_0.$$

Il two point tensor:

$$\underline{P} = J \underline{\sigma} \underline{F}^{-T},$$

è detto primo tensore di Piola-Kirchhoff degli sforzi. Rappresenta una trasformazione lineare:

$$\underline{P}: \mathcal{A}_X \mapsto \mathcal{V}_x, \quad d\underline{A}_0 \mapsto d\underline{p} = \underline{P} d\underline{A}_0$$

che ad ogni elemento di area materiale $d\underline{A}_0$, appartenente all'intorno del punto X , associa la forza elementare $d\underline{p}$ agente sulla superficie spaziale $d\underline{A}$ corrispondente a $d\underline{A}_0$ nella deformazione.

È dunque possibile ottenere il flusso di $\underline{\sigma}$ attraverso una superficie S spaziale calcolando il flusso di $\underline{P}$ sulla corrispondente superficie materiale S_0 :

$$\int_S \underline{\sigma} d\underline{A} = \int_{S_0} \underline{P} d\underline{A}_0,$$

Una trasformazione del tipo di quella tra $\underline{\sigma}$ e $\underline{P}$,

trasformazione che conserva il flusso della quantità trasformata, è detta trasformazione di Piola.

Se il vettore spaziale $d\underline{p}$ è portato nella configurazione materiale tramite il pull-back degli elementi di linea, si ottiene il vettore materiale:

$$d\underline{p}_0 = \underline{F}^{-1} d\underline{p},$$

tale che:

$$d\underline{p}_0 = J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T} d\underline{A}_0.$$

Il tensore materiale simmetrico, pull-back di $\underline{\sigma}$:

$$\underline{S} = J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T},$$

è detto secondo tensore di Piola-Kirchhoff degli sforzi.

Risulta:

$$d\underline{p}_0 = \underline{S} d\underline{A}_0.$$

4.8 Equazione materiale del moto

L'uguaglianza:

$$\int_{\partial V} \underline{\sigma} \underline{n} dA = \int_{\partial V_0} \underline{P} \underline{N} dA_0,$$

dove $\underline{P}$ rappresenta il primo tensore di Piola-Kirchhoff, permette di scrivere il bilancio della quantità di moto nella forma seguente:

$$\int_{V_0} (\text{Div } \underline{P} + \underline{f}^* - \rho_0 \dot{\underline{v}}_{\text{Ref}}) dV_0 = 0,$$

dove $\text{Div } \underline{P}$ è la divergenza materiale di $\underline{P}$,

$\underline{f}^* = \int \underline{f}$ rappresenta la forza per unità di volume

indeformato e, naturalmente, tutti i campi sono

materiali. Localmente si ottiene l'equazione del moto in forma materiale:

$$\text{Div } \underline{P} + \underline{f}^* = \rho_0 \dot{\underline{v}}_{\text{Ref}}.$$

4.9 Equazione materiale di equilibrio al contorno

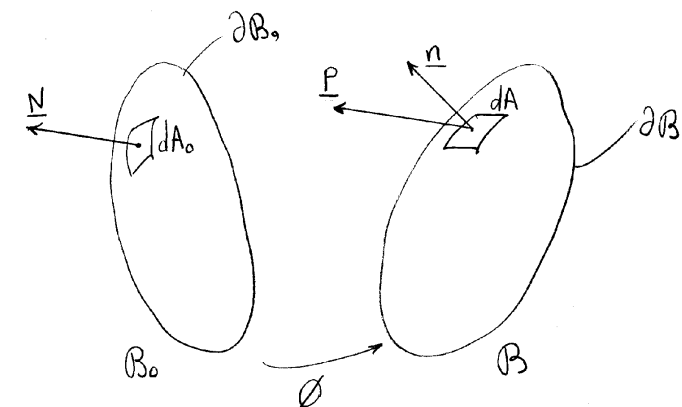
Se $\underline{p}$ rappresenta la forza per unità di superficie agente sul contorno spaziale ∂B del corpo continuo deve risultare:

$$\underline{P} \underline{N} dA_0 = \underline{\sigma} \underline{n} dA = \underline{p} dA,$$

e quindi:

$$\underline{P} \underline{N} = \underline{p}^* = \underline{p} \frac{dA}{dA_0},$$

dove $\underline{p}^*$ rappresenta la forza distribuita per unità di area indeformata.



Capitolo 5

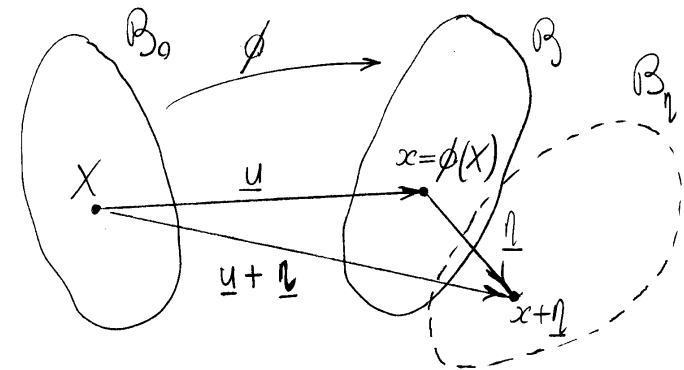
Principi generali

5.1 Principio dei lavori virtuali

Il principio dei lavori virtuali collega le variabili dinamiche (di cui fanno parte le forze) con quelle cinematiche (di cui fanno parte gli spostamenti). La sua validità dipende essenzialmente dalla presenza nell'equazione di bilancio di due termini, l'uno descrivente un flusso attraverso la superficie e l'altro descrivente una sorgente nel volume. Equivalentemente, tale validità dipende dalla presenza nell'equazione del moto di un termine di divergenza (legato al flusso) e di un termine di sorgente. La derivazione del principio può ottenersi integrando nella configurazione spaziale

del corpo l'equazione del moto moltiplicata scalarmente per un generico campo vettoriale $\underline{\eta}$ sufficientemente regolare, detto campo degli spostamenti virtuali. Si ottiene:

$$\int_B (\text{div } \underline{\sigma} + \underline{f} - \rho \underline{\dot{x}}) \cdot \underline{\eta} \, dV = 0.$$



Si ha:

$$\int_B \text{div } \underline{\sigma} \cdot \underline{\eta} \, dV = \int_B \{ \text{div}(\underline{\sigma}^T \underline{\eta}) - \underline{\sigma} \cdot \text{grad } \underline{\eta} \} \, dV.$$

Infatti:

$$\text{div}(\underline{\sigma}^T \underline{\eta}) = (\text{div } \underline{\sigma}) \cdot \underline{\eta} + \underline{\sigma} \cdot \text{grad } \underline{\eta},$$

poiché:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\underline{\sigma}^T \underline{\eta}) &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{\sigma} \underline{\eta})_i = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ji} \eta_j) \\ &= \sum_{ij} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} \eta_j + \sum_{ij} \sigma_{ji} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \\ &= \sum_j (\operatorname{div} \underline{\sigma})_j \eta_j + \sum_{ij} \sigma_{ji} (\operatorname{grad} \underline{\eta})_{ji}.\end{aligned}$$

Risulta quindi:

$$\begin{aligned}\int_B \operatorname{div} \underline{\sigma} \cdot \underline{\eta} \, dV &= \\ &= \int_{\partial B} (\underline{\sigma}^T \underline{\eta}) \cdot \underline{n} \, dA - \int_B \underline{\sigma} \cdot \operatorname{grad} \underline{\eta} \, dV \\ &= \int_{\partial B} (\underline{\sigma} \underline{n}) \cdot \underline{\eta} \, dA - \int_B \underline{\sigma} \cdot \left\{ \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{\eta} + \operatorname{grad}^T \underline{\eta}) \right\} dV \\ &= \int_{\partial B} \underline{P} \cdot \underline{\eta} \, dA - \int_B \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon}_\eta \, dV,\end{aligned}$$

dove è stata sfruttata la simmetria di $\underline{\sigma}$ e dove:

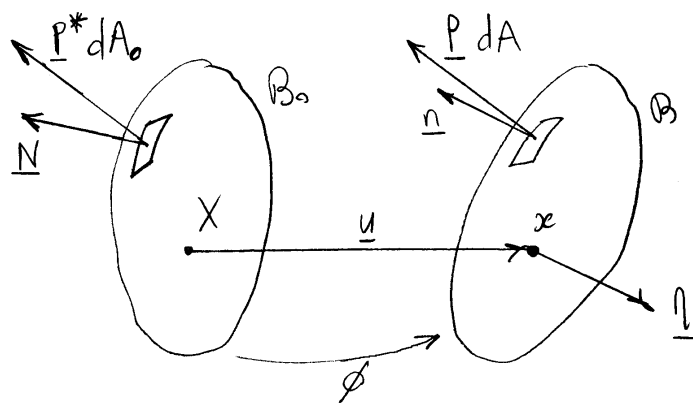
$$\underline{\varepsilon}_\eta = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{\eta} + \operatorname{grad}^T \underline{\eta}),$$

rappresenta il tensore di deformazione virtuale infinitesima, relativamente alla configurazione lagrangiana relativa B . Risulta quindi:

$$\int_{\partial B} \underline{P} \cdot \underline{\eta} \, dA + \int_B (\underline{F} - \rho \underline{\dot{v}}) \cdot \underline{\eta} \, dV = \int_B \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon}_\eta \, dV.$$

Il primo membro dell'uguaglianza rappresenta il lavoro virtuale delle forze agenti sul contorno e nel volume del corpo, comprese le "forze di inerzia" $-\rho \underline{\dot{v}}$, detta comunemente lavoro virtuale esterno, mentre il secondo membro è indicato quale lavoro virtuale interno. Notare che il tensore di Cauchy "lavora" per il tensore di deformazione virtuale infinitesima relativo alla configurazione spaziale.

La versione materiale del principio dei lavori



virtuali può poi ottenersi integrando nel volume l'equazione materiale del moto moltiplicata scalarmente per il campo $\underline{\eta}$ degli spostamenti virtuali:

$$\int_{B_0} (\text{Div } \underline{P} + \underline{f}^* - \rho \underline{\dot{v}}) \cdot \underline{\eta} dV_0 = 0,$$

I campi vettoriali che compaiono nell'equazione sono campi materiali a valori negli spazi tangenti ai punti della configurazione spaziale, cioè del

tipo $B_0 \rightarrow \mathcal{V}_x$, che a un punto materiale X associano un vettore dello spazio tangente in $x = \phi(X)$. Quindi i campi sono materiali, ma i vettori sono spaziali e perciò la metrica del prodotto scalare è l'identità. Procedendo come prima, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{B_0} \text{Div } \underline{P} \cdot \underline{\eta} dV_0 &= \\ &= \int_{B_0} \{ \text{Div}(\underline{P}^T \underline{\eta}) - \underline{P} \cdot \text{Grad } \underline{\eta} \} dV_0 \\ &= \int_{\partial B_0} (\underline{P} \underline{N}) \cdot \underline{\eta} dA_0 - \int_{\partial B_0} \underline{P} \cdot \text{Grad } \underline{\eta} dV_0, \end{aligned}$$

e il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$\int_{\partial B_0} \underline{P}^* \cdot \underline{\eta} dA_0 + \int_{B_0} (\underline{f}^* - \rho \underline{\dot{v}}) \cdot \underline{\eta} dV_0 = \int_{B_0} \underline{P} \cdot \text{Grad } \underline{\eta} dV_0.$$

Il primo membro rappresenta ancora il lavoro virtuale esterno, ottenuto ora per integrazione sugli elementi di area e di volume materiali.

Se $\underline{\eta}$ è interpretata come variazione della deformazione ϕ oppure, equivalentemente del campo degli spostamenti $\underline{u}$, si ottiene:

$$\text{Grad}(\phi + \underline{\eta}) - \text{Grad} \phi = \text{Grad} \underline{\eta}$$

e quindi:

$$\delta \underline{F} = \text{Grad} \underline{\eta},$$

dove $\delta \underline{F}$ rappresenta la variazione di $\underline{F} = \text{Grad} \phi$ al variare di ϕ tramite $\underline{\eta}$. Analogamente risulta:

$$\text{Grad}(\underline{u} + \underline{\eta}) - \text{Grad} \underline{u} = \text{Grad} \underline{\eta},$$

e quindi:

$$\text{Grad} \underline{\eta} = \delta \underline{H},$$

dove $\delta \underline{H}$ è la variazione del gradiente materiale degli spostamenti. Il lavoro virtuale interno $L_{\eta i}$ può dunque scriversi nella forma:

$$L_{\eta i} = \int_{B_0} \underline{P} \cdot \delta \underline{F} dV_0 = \int_{B_0} \underline{P} \cdot \delta \underline{H} dV_0.$$

Si noti che dalla formulazione spaziale del principio è possibile ottenerne una materiale scrivendo il lavoro virtuale interno nella forma:

$$L_{\eta i} = \int_{B_0} J \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon}_{\eta} dV_0.$$

Il tensore spaziale, ma campo materiale:

$$\underline{\mathcal{I}} = J \underline{\sigma},$$

è detto tensore di Kirchhoff, ed anche tensore

di Trefftz.

Dalla relazione $\underline{P} = \underline{E} \underline{S}$, tra primo e secondo tensore di Piola-Kirchhoff, è possibile poi ottenere le seguenti espressioni per il lavoro virtuale interno:

$$\begin{aligned} L_{\eta i} &= \int_{B_0} \underline{S} \cdot \underline{F}^T \text{Grad} \underline{\eta} \, dV_0 \\ &= \int_{B_0} \underline{S} \cdot \left\{ \frac{1}{2} (\underline{F}^T \text{Grad} \underline{\eta} + \text{Grad}^T \underline{\eta} \underline{F}) \right\} dV_0. \end{aligned}$$

In termini di variazioni:

$$L_{\eta i} = \frac{1}{2} \int_{B_0} \underline{S} \cdot \delta \underline{C} \, dV_0 = \int_{B_0} \underline{S} \cdot \delta \underline{E} \, dV_0,$$

poiché:

$$\delta \underline{C} = \delta (\underline{F}^T \underline{F}) = \underline{F}^T \delta \underline{F} + \delta \underline{F}^T \underline{F},$$

ed inoltre:

$$\delta \underline{E} = \delta \left\{ \frac{1}{2} (\underline{C} - \underline{I}) \right\} = \frac{1}{2} \delta \underline{C}.$$

Riassumendo, le diverse forme per il lavoro virtuale interno associato agli spostamenti virtuali $\underline{\eta}$ risultano:

1. tensori di sforzo e di deformazione spaziali, campi spaziali:

$$L_{\eta i} = \int_B \underline{\sigma} \cdot \left\{ \frac{1}{2} (\text{grad} \underline{\eta} + \text{grad}^T \underline{\eta}) \right\} dV;$$

2. tensori di sforzo e deformazione spaziali, campi materiali:

$$L_{\eta i} = \int_{B_0} \underline{\tau} \cdot \left\{ \frac{1}{2} (\text{grad} \underline{\eta} + \text{grad}^T \underline{\eta}) \right\} dV_0;$$

3. tensori di sforzo e deformazione two-point tensors, campi materiali),

$$\begin{aligned} L_{\eta i} &= \int_{B_0} \underline{P} \cdot \text{Grad} \underline{\eta} \, dV_0 = \\ &= \int_{B_0} \underline{P} \cdot \delta \underline{F} \, dV_0 = \int_{B_0} \underline{P} \cdot \underline{S} \underline{H} \, dV_0; \end{aligned}$$

4. Tensori di sforzo e deformazione materiali, esempi materiali:

$$L_{\eta i} = \int_{B_0} \underline{S} \cdot \left\{ \frac{1}{2} (\underline{F}^T \text{Grad} \underline{\eta} + \text{Grad}^T \underline{\eta} \underline{F}) \right\} dV_0$$

$$= \frac{1}{2} \int_{B_0} \underline{S} \cdot \delta \underline{C} dV_0 = \int_{B_0} \underline{S} \cdot \delta \underline{E} dV_0 .$$

5.2 Bilancio termodinamico

Si consideri una porzione materiale V_0 di un corpo continuo, la cui controparte spaziale $V = \phi(V_0)$ è quindi in generale funzione del tempo. Il primo principio della termodinamica associa alla porzione materiale V_0 una energia interna U il cui incremento nel tempo bilancia, assieme all'incremento dell'energia cinetica K , il flusso di energia attraverso la superficie ∂V e la produzione di energia nel volume V .

Per mezzi non polari il flusso e la produzione di energia sono dovuti al lavoro delle forze esterne (di superficie e di volume) e al calore entrante attraverso la superficie e prodotto nel volume.

L'energia entrante nel volume per unità di tempo

dovuta al lavoro delle forze esterne o potenza in entrata

risulta:

$$P_{\text{input}} = \int_{\partial V} \underline{t} \cdot \underline{v} dA + \int_V \underline{f} \cdot \underline{v} dV.$$

dove $\underline{v}$ è il campo spaziale delle velocità.

Il calore in entrata nel volume per unità di tempo risulta analogamente:

$$Q_{\text{input}} = \int_{\partial V} h dA + \int_V r dV,$$

dove h è il flusso di calore per unità di superficie ed r la produzione di calore per unità di volume. Il flusso h si assume dipendere linearmente dalla normale uscente dalla superficie:

$$h = -\underline{q} \cdot \underline{n},$$

dove $\underline{q}$ è il vettore flusso di calore, positivo se

uscente dal volume.

Il primo principio della termodinamica si scrive

dunque:

$$\dot{U} + \dot{K} = P_{\text{input}} + Q_{\text{input}}.$$

Introducendo l'energia interna u per unità di massa si ha:

$$\dot{U} = \int_{V_0} \rho_0 \dot{u} dV_0 = \int_V \rho \dot{u} dV.$$

L'energia cinetica risulta:

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \underline{v} \cdot \underline{v} dV = \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \underline{v} \cdot \underline{v} dV_0,$$

e il suo incremento vale:

$$\dot{K} = \int_V \rho \underline{\dot{v}} \cdot \underline{v} dV = \int_{V_0} \rho_0 \underline{\dot{v}} \cdot \underline{v} dV_0.$$

Si scriva, relativamente al volume V , il principio dei lavori virtuali usando $\underline{v}$ quale campo virtuale degli spostamenti.

Poiché risulta:

$$\int_{\partial V} \underline{t} \cdot \underline{v} dA + \int_V (\underline{f} - \rho \underline{\dot{v}}) \cdot \underline{v} dV = P_{\text{input}} - \dot{K},$$

$$\frac{1}{2} (\text{grad } \underline{v} + \text{grad}^T \underline{v}) = \underline{D},$$

$$\text{Grad } \underline{v} = \underline{L} \underline{F} = \underline{\dot{F}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\underline{F}^T \text{Grad } \underline{v} + \text{Grad}^T \underline{v} \underline{F}) &= \\ &= \frac{1}{2} (\underline{F}^T \underline{\dot{F}} + \underline{\dot{F}}^T \underline{F}) = \frac{1}{2} \dot{\underline{C}} = \underline{\dot{E}}, \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} P_{\text{input}} - \dot{K} &= \int_V \underline{\sigma} \cdot \underline{D} dV = \int_{V_0} \underline{\tau} \cdot \underline{D} dV_0 \\ &= \int_{V_0} \underline{P} \cdot \underline{\dot{E}} dV_0 \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_0} \underline{S} \cdot \dot{\underline{C}} dV_0 = \int_{V_0} \underline{S} \cdot \underline{\dot{E}} dV_0. \end{aligned}$$

Utilizzando il teorema della divergenza si ottiene poi:

$$\int_{\partial V} \underline{h} dA = - \int_{\partial V} \underline{q} \cdot \underline{n} dA = - \int_V \text{div } \underline{q} dV,$$

oppure, tenendo conto che $dA = J \underline{F}^{-T} dA_0$:

$$\int_{\partial V} \underline{h} dA = - \int_{V_0} \text{Div } \underline{q}_0 dV_0,$$

dove:

$$\underline{q}_0 = J \underline{F}^{-1} \underline{q},$$

e' il vettore flusso di calore materiale, pull-back del flusso di calore spaziale.

Per quanto precede, il bilancio dell'energia si scrive:

$$\int_V \rho \dot{u} dV = \int_V (\underline{\sigma} \cdot \underline{D} - \text{div } \underline{q} + r) dV,$$

oppure, in forma materiale:

$$\int_{V_0} \rho_0 \dot{u} dV = \int_{V_0} (\underline{S} \cdot \underline{\dot{E}} - \text{Div } \underline{q}_0 + r_0) dV_0,$$

dove :

$$\gamma_0 = \int \gamma ,$$

è la produzione di calore per unità di volume indeformato.

Localmente, il bilancio dell'energia si scrive infine:

$$\rho \dot{u} + \operatorname{div} \underline{q} = \underline{\sigma} \cdot \underline{D} + \gamma .$$

oppure, in forma materiale:

$$\begin{aligned} \int_0 \dot{u} + \operatorname{Div} \underline{q}_0 &= \underline{P} \cdot \dot{\underline{E}} + \gamma_0 \\ &= \frac{1}{2} \underline{S} \cdot \dot{\underline{C}} + \gamma_0 \\ &= \underline{S} \cdot \dot{\underline{E}} + \gamma_0 . \end{aligned}$$

5.3 Produzione di entropia

Ad ogni volume materiale V_0 viene associata una funzione scalare H detta entropia e ad ogni punto del corpo una seconda funzione scalare ϑ positiva, detta temperatura assoluta, soddisfacenti la seguente disuguaglianza (della produzione di entropia oppure di Clausius-Duhem) :

$$\dot{H} \geq \int_{\partial V} \frac{h}{\vartheta} dA + \int_V \frac{\gamma}{\vartheta} dV ,$$

che rappresenta il secondo principio della termodinamica.

In assenza di calore in entrata ($h=0$ e $\gamma=0$)

l'entropia non decresce :

$$\dot{H} \geq 0 .$$

Detta η l'entropia per unità di massa risulta:

$$\dot{H} = \int_V \rho \dot{\eta} dV.$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \frac{h}{\vartheta} dA &= - \int_{\partial V} \frac{1}{\vartheta} \underline{q} \cdot \underline{n} dA \\ &= - \int_V \operatorname{div} \left(\frac{1}{\vartheta} \underline{q} \right) dV, \end{aligned}$$

oppure, in forma materiale:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \frac{h}{\vartheta} dA &= - \int_{\partial V_0} \frac{1}{\vartheta} \underline{q}_0 \cdot \underline{N} dA_0 \\ &= - \int_{V_0} \operatorname{Div} \left(\frac{1}{\vartheta} \underline{q}_0 \right) dV_0. \end{aligned}$$

La disuguaglianza si scrive dunque, limitatamente alla sua versione materiale:

$$\int_{V_0} \rho_0 \dot{\eta} dV_0 \geq \int_{V_0} \left\{ \frac{\tau_0}{\vartheta} - \operatorname{Div} \left(\frac{1}{\vartheta} \underline{q}_0 \right) \right\} dV_0,$$

e, localmente:

$$\rho_0 \dot{\eta} \geq \frac{\tau_0}{\vartheta} - \operatorname{Div} \left(\frac{1}{\vartheta} \underline{q}_0 \right).$$

Moltiplicando la disuguaglianza così ottenuta per ϑ e rianneggiando, si ottiene:

$$\tau_0 - \operatorname{Div} \underline{q}_0 + \frac{1}{\vartheta} \underline{q}_0 \cdot \operatorname{grad} \vartheta - \rho_0 \vartheta \dot{\eta} \leq 0.$$

Tenendo conto del bilancio dell'energia:

$$\tau_0 - \operatorname{Div} \underline{q}_0 = \rho_0 \dot{u} - \underline{S} \cdot \dot{\underline{E}},$$

si ha poi:

$$\rho_0 (\dot{u} - \vartheta \dot{\eta}) - \underline{S} \cdot \dot{\underline{E}} + \frac{1}{\vartheta} \underline{q}_0 \cdot \operatorname{grad} \vartheta \leq 0.$$

Questa disuguaglianza si compone di tre termini, uno dovuto al lavoro delle tensioni interne, uno dovuto al flusso di calore ed infine uno dovuto

alla variazione della energia interna corretta dal termine $\vartheta \dot{\eta}$. Se la variazione di entropia è nulla, cioè se $\eta = \text{cost}$, si dice che il moto è isentropico e la variazione di energia interna interviene globalmente. In tal caso:

$$\int_0 \dot{u} = \underline{S} \cdot \dot{\underline{E}},$$

$$\frac{1}{\vartheta} \underline{q}_0 \cdot \text{grad} \vartheta \leq 0.$$

Se si introduce la funzione energia libera (di Helmholtz):

$$\Psi = u - \vartheta \eta,$$

si ottiene:

$$\dot{u} - \vartheta \dot{\eta} = \dot{\Psi} + \dot{\vartheta} \eta,$$

e la disuguaglianza di Clausius-Duhem assume

la forma:

$$\int_0 (\dot{\Psi} + \dot{\vartheta} \eta) - \underline{S} \cdot \dot{\underline{E}} + \frac{1}{\vartheta} \underline{q}_0 \cdot \text{Grad} \vartheta \leq 0.$$

Se la variazione di temperatura è nulla, cioè se $\vartheta = \text{cost}$, si dice che il moto è isotermo. In tal caso:

$$\int_0 \dot{\Psi} = \underline{S} \cdot \dot{\underline{E}},$$

$$\frac{1}{\vartheta} \underline{q}_0 \cdot \text{grad} \vartheta \leq 0.$$

Se poi $\underline{q} = \underline{0}$ si dice che il moto è adiabatico e infine se $\text{Grad} \eta = \text{cost}$, si dice che è omoentropico.