

ASSUNZIONI COSTITUTIVE

Prof. Daniele Zaccaria
Dipartimento di Ingegneria Civile
Università di Trieste
Piazzale Europa 1, Trieste

10 giugno 2005

Indice

1	Principi fondamentali	1
1.1	Principio di determinismo	1
1.2	Principio di indifferenza materiale	3
1.2.1	Indifferenza materiale rispetto alle traslazioni temporali (omogeneità dell'asse dei tempi)	3
1.2.2	Indifferenza materiale rispetto alle traslazioni spaziali (omogeneità dello spazio)	4
1.2.3	Indifferenza materiale rispetto alle isometrie (isotropia dello spazio) . . .	6
2	Legami costitutivi locali	8
2.1	Localizzazione del moto	9
2.2	Materiali semplici	9
2.3	Principio dell'azione locale e indifferenza materiale rispetto alle isometrie	11
3	Omogeneità	12

Nel seguito si ignoreranno gli effetti termici, ovvero si si limiterà al caso *puramente meccanico*. Non solo tale caso è di per sé stesso importante, ma è immediatamente generalizzabile qualora si assuma il campo delle *temperature assolute* tra le incognite e si considerino il primo e il secondo principio della termodinamica tra le relazioni che le incognite debbano soddisfare. Ricordiamo che il primo principio della termodinamica si traduce nel *bilancio dell'energia* mentre il secondo principio nella *disuguaglianza di dissipazione* (di Clausius-Duhem).

Ciò premesso, e relativamente ad una configurazione $\mathcal{B}_0$ di riferimento del corpo, le variabili incognite sono rappresentate in generale dalla *funzione del moto* $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, oppure alternativamente dal campo degli spostamenti $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$.

1 Principi fondamentali

1.1 Principio di determinismo

Il principio di determinismo afferma che *gli sforzi interni a un corpo continuo ad un dato istante dipendono dalla storia del moto fino a quell'istante*.

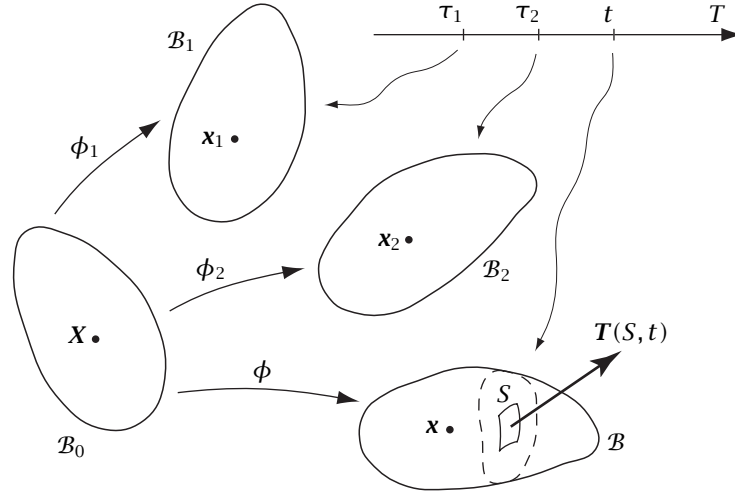


Figura 1: Storia del moto

In altri termini, una possibile storia del moto $\mathbf{x}_t$ fino ad un dato istante t , come quella illustrata in fig. 1, definisce univocamente gli sforzi $\mathbf{T}(S)$ trasmessi allo stesso istante attraverso le superfici interne al corpo.

Si indichi con $\mathcal{M}_t$ l'insieme delle possibili storie del moto $\mathbf{x}_t$ fino al tempo t attuale:

$$\mathbf{x}_t : \mathcal{B}_0 \times (-\infty, t] \rightarrow \mathcal{E}, \quad (X, \tau) \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}_t(X, \tau). \quad (1)$$

L'equazione costitutiva che fornisce gli sforzi interni al tempo attuale t è allora una mappa del tipo:

$$\hat{\mathbf{T}}_t : \mathcal{M}_t \rightarrow \mathcal{F}, \quad \mathbf{x}_t \mapsto \mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}_t(\mathbf{x}_t), \quad (2)$$

dove $\mathcal{F}$ indica l'insieme delle funzioni vettoriali $\mathbf{T}$ definite nell'insieme delle superfici S interne al corpo. È dunque possibile generare il valore $\mathbf{T}(S, t)$ della forza trasmessa attraverso la superficie interna S al tempo attuale t dalla mappa $\hat{\mathbf{T}}_t$, una volta che sia nota l'effettiva storia del moto $\mathbf{x}_t$:

$$\mathbf{T}(S, t) = \hat{\mathbf{T}}_t[\mathbf{x}_t](S). \quad (3)$$

Poiché gli sforzi interni a un corpo possono essere rappresentati dal tensore degli sforzi di Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, nel seguito si farà riferimento ad un legame costitutivo che ad una storia del moto $\mathbf{x}_t$ associa il campo del tensore degli sforzi di Cauchy:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_t : \mathcal{M}_t \rightarrow \mathcal{F}, \quad \mathbf{x}_t \mapsto \boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_t(\mathbf{x}_t), \quad (4)$$

dove ora $\mathcal{F}$ indica l'insieme dei campi tensoriali simmetrici definiti in $\mathcal{B}$. Analogamente alla (3), nota la storia del moto $\mathbf{x}_t$ è possibile generare il valore $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ dello sforzo nell'intorno di un punto spaziale $\mathbf{x}$ al tempo attuale t :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_t[\mathbf{x}_t](\mathbf{x}). \quad (5)$$

Principio di “fading memory”. Dato che un'intera storia del moto non è mai disponibile, è evidente che una teoria costitutiva basata sul solo principio di determinismo è di scarsa utilità. D'altronde, quando si interpretano i risultati di un esperimento è implicita l'assunzione che la storia precedente l'esperimento ha scarsa influenza sui risultati. Il principio di *fading memory* esplicita assunzioni del tipo: *il moto occorso in un lontano passato ha meno influenza del moto occorso in un più recente passato relativamente alla determinazione dello stato attuale di sforzo nel corpo.*

1.2 Principio di indifferenza materiale

Il principio di indifferenza materiale afferma che *gli sforzi interni ad un corpo continuo sono oggettivi*.

Questo significa che il tensore degli sforzi di Cauchy σ che rappresenta gli sforzi interni che agiscono internamente ad un corpo continuo al tempo t generico si deve trasformare in accordo alla relazione:

$$\sigma^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{Q}(t) \sigma(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}(t)^T, \quad (6)$$

sotto l'azione del gruppo delle isometrie per quel che riguarda lo spazio e delle traslazioni per quel che riguarda il tempo:

$$\mathbf{x}^* = O + \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{x} - O), \quad (7a)$$

$$t^* = t + a, \quad (7b)$$

dove a rappresenta la traslazione dell'asse del tempo, $\mathbf{c}$ la traslazione dello spazio e $\mathbf{Q}$ una trasformazione ortogonale.¹

Sia allora $\mathbf{x}_t$ una storia del moto fino al tempo attuale t , storia che allo stesso istante t genera gli sforzi interni $\sigma(\mathbf{x}, t)$. Ne consegue che la storia $\mathbf{x}_t^*$ fino al tempo attuale $t^* = t + a$ (fig. 2) che si ottiene applicando a $\mathbf{x}_t$ le trasformazioni (7):

$$\mathbf{x}_t^*(X, \tau + a) = O + \mathbf{c}(\tau) + \mathbf{Q}(\tau) \{ \mathbf{x}_t(X, \tau) - O \}, \quad \tau \leq t \quad (8)$$

deve generare la tensione (6).

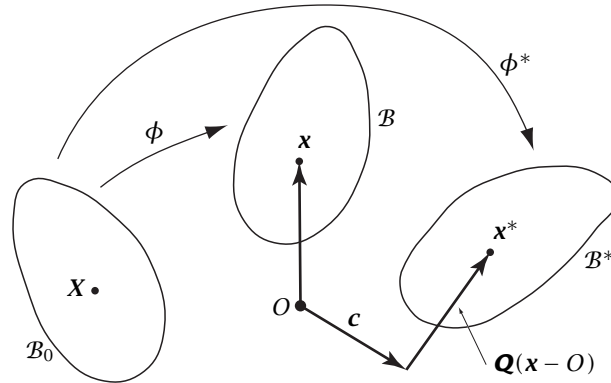


Figura 2: Trasformazione della storia del moto

1.2.1 Indifferenza materiale rispetto alle traslazioni temporali (omogeneità dell'asse dei tempi)

Traslando nel tempo una generica storia del moto si ottiene una storia traslata che genera gli stessi sforzi interni al corpo, ma agenti al tempo attuale traslato.

Infatti, data una storia del moto $\mathbf{x}_t$ di tempo attuale t generico, basta applicare il principio di indifferenza materiale effettuando la sola traslazione a dell'asse dei tempi, ponendo quindi $\mathbf{c}(\tau) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{Q}(\tau) = \mathbf{I}$. Si ottiene così il tempo attuale $t^* = t + a$, in accordo con la (7b).

¹Questa affermazione rappresenta il *principio di invarianza dei legami costitutivi sotto l'azione del gruppo delle isometrie* (da Truesdell chiamato *principio di invarianza nella forma di Zaremba-Jaumann*). Una versione meno forte richiede semplicemente l'invarianza sotto l'azione del gruppo dei moti rigidi (che Truesdell chiama *principio di invarianza nella forma di Hooke-Poisson-Cauchy*).

È allora possibile traslare una generica storia del moto di tempo attuale t in modo da riferirla ad un tempo attuale t^* traslato comune a tutti i possibili moti. Per es., eseguendo la traslazione $a = -t$ il tempo attuale traslato viene a coincidere con il riferimento dell'asse dei tempi, cioè risulta $t^* = 0$. Ne consegue che è allora possibile riferirsi ad un unico operatore costitutivo, per es. quello $\hat{\sigma}_0$ relativo al tempo di riferimento $t = 0$, in luogo degli infiniti operatori $\hat{\sigma}_t$, uno per ogni istante. Data la storia generica $\mathbf{x}_t$, allo scopo di ottenere lo sforzo interno $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ corrispondente basta quindi trasformarla nella storia $\mathbf{x}_0$ equivalente:

$$\mathbf{x}_0(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{x}_t(\mathbf{X}, \tau + t), \quad \tau \leq 0, \quad (9)$$

e applicare l'operatore costitutivo $\hat{\sigma}_0$:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \hat{\sigma}_0[\mathbf{x}_0](\mathbf{x}). \quad (10)$$

Si noti che se $\tau \leq 0$ allora risulta $\tau + t \leq t$ e quindi la (9) è ben definita. Si noti anche che è possibile rappresentare una qualunque storia $\mathbf{x}_t$ tramite una funzione $\mathbf{x}(\mathbf{X}, s)$ di una variabile non negativa s applicando la trasformazione:

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, s) = \mathbf{x}_0(\mathbf{X}, -s) = \mathbf{x}_t(\mathbf{X}, t - s), \quad (11)$$

che si ottiene per inversione temporale della (9). La risposta costitutiva può allora essere mediata da un operatore costitutivo $\hat{\sigma}$ che agisca sulle funzioni del tipo (9) oppure su quelle del tipo (11), operatore che di conseguenza non dipende dal tempo attuale:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \hat{\sigma}[\mathbf{x}_t](\mathbf{x}), \quad (12)$$

dove, qui come nel seguito, è sottinteso che prima di applicare l'operatore $\hat{\sigma}$ la storia del moto $\mathbf{x}_t$ fino al tempo attuale deve essere opportunamente trasformata.

1.2.2 Indifferenza materiale rispetto alle traslazioni spaziali (omogeneità dello spazio)

Se ad una storia $\mathbf{x}_t$ si sovrappone una traslazione $\mathbf{c}$ nello spazio si ottiene, in accordo con la (7), la storia "equivalente" $\mathbf{x}_t^*$ tale che:

$$\mathbf{x}_t^*(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{x}_t(\mathbf{X}, \tau) + \mathbf{c}(\tau), \quad (13)$$

essendo sottinteso che $a = 0$ e $\mathbf{Q}(\tau) = \mathbf{I}$ per ogni $\tau \leq t$. Ad ognuna di tali storie corrispondono gli stessi sforzi interni $\mathbf{T}(S)$, tenuto conto che la configurazione $\mathcal{B}^*$, che il corpo assume nella storia traslata al tempo attuale t , non è ruotata ma solo traslata relativamente

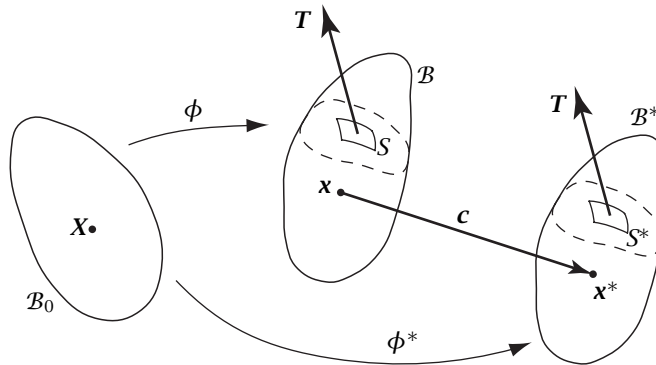


Figura 3: Traslazione spaziale

alla configurazione $\mathcal{B}$, che il corpo assume nella storia originale ancora al tempo attuale t (fig. 3). D'altronde, se $\mathbf{Q}(\tau) = \mathbf{I}$, la (6) impone $\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$, cioè impone l'invarianza dello sforzo.

Data una deformazione ϕ , oppure il corrispondente campo degli spostamenti $\mathbf{u}$, ad ogni coppia di punti (X_1, X_2) della configurazione $\mathcal{B}_0$ di riferimento si faccia allora corrispondere il vettore spaziale:

$$\Delta \mathbf{x} = \phi(X_2) - \phi(X_1), \quad (14)$$

oppure lo spostamento relativo:

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(X_2) - \mathbf{u}(X_1), \quad (15)$$

come indicato nella fig. 4. Per via della (13), tutte le storie equivalenti, via traslazioni, ad una

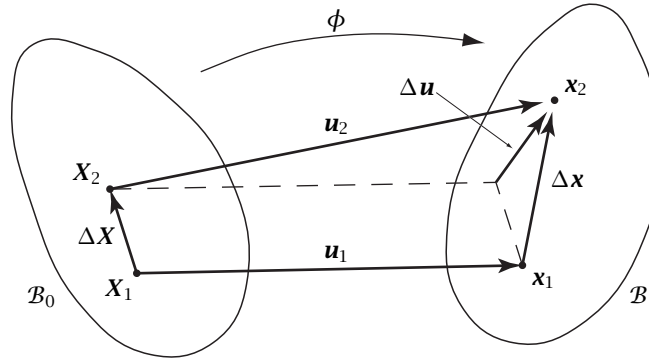


Figura 4: Caratterizzazione del moto (Indifferenza alle traslazioni spaziali)

data storia $\mathbf{x}_t$ del moto generano una stessa storia $\Delta \mathbf{x}_t$:

$$\Delta \mathbf{x}_t : \mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_0 \times (-\infty, t] \rightarrow \mathcal{V}, \quad (X_1, X_2, \tau) \mapsto \phi[\tau](X_2) - \phi[\tau](X_1), \quad (16)$$

oppure $\Delta \mathbf{u}_t$:

$$\Delta \mathbf{u}_t : \mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_0 \times (-\infty, t] \rightarrow \mathcal{V}, \quad (X_1, X_2, \tau) \mapsto \mathbf{u}(X_2, \tau) - \mathbf{u}(X_1, \tau). \quad (17)$$

Si può allora enunciare l'indifferenza materiale rispetto alle traslazioni spaziali affermando che ad una storia $\Delta \mathbf{x}_t$ oppure $\Delta \mathbf{u}_t$ restano assegnati univocamente gli sforzi interni $\boldsymbol{\sigma}$ al tempo t attuale:

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\Delta \mathbf{x}_t). \quad (18)$$

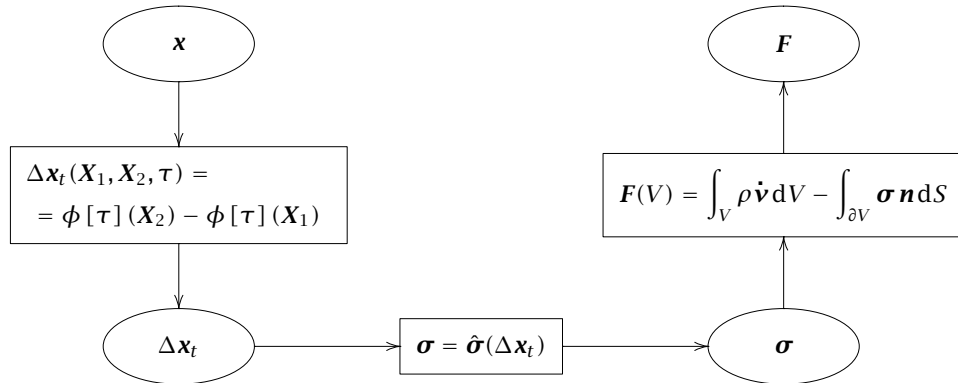


Figura 5: Meccanica del continuo: indifferenza rispetto alle traslazioni

Naturalmente tale equazione costitutiva non soddisfa in modo completo l'indifferenza materiale.

Nella fig. 5 è riportato il diagramma di Tonti illustrante il problema della meccanica del continuo in sintonia con l'indifferenza materiale rispetto alle traslazioni spaziali, avendo indicato con F la forza di volume relativa al generico volume V interno al corpo. In tale quadro la (14), oppure la (15), ha il ruolo di una *equazione di congruenza*. Inoltre le colonne di sinistra e di destra rappresentano rispettivamente la *cinematica* e la *dinamica* del continuo mentre il collegamento orizzontale rappresenta il *legame costitutivo*. Si noti che nella parte dinamica non compare il bilancio del momento della quantità di moto, essendo questi equivalente alla simmetria del tensore di Cauchy degli sforzi. Dal punto di vista geometrico le variabili poste nella parte superiore competono ai punti materiali (funzione del moto oppure campo degli spostamenti) e ai volumi (forze di volume) mentre le variabili poste nella parte inferiore competono alle coppie di punti materiali (storia $\Delta \mathbf{x}_t$ oppure $\Delta \mathbf{u}_t$) e alle superfici interne al corpo (sforzi interni). Nella fig. 6 è illustrata la situazione con riferimento agli enti geometrici materiali. Si noti inoltre che il valore ad un dato istante $\tau \leq t$ della storia $\Delta \mathbf{x}_t$, così

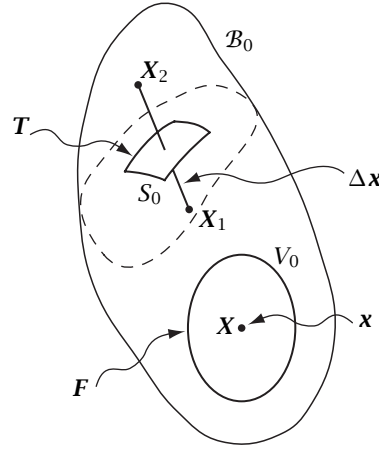


Figura 6: Enti geometrici (Indifferenza alle traslazioni spaziali)

come quello della storia $\Delta \mathbf{u}_t$, rappresenta una funzione $\mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{V}$ definita sulle coppie di punti materiali e a valori vettoriali, mentre gli sforzi interni definiti dal tensore degli sforzi rappresentano delle forze agenti sulle superfici orientate interne al corpo e a valori vettoriali.

1.2.3 Indifferenza materiale rispetto alle isometrie (isotropia dello spazio)

Un legame costitutivo del tipo $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\Delta \mathbf{x}_t)$ non assicura a priori l'indifferenza materiale rispetto alla generica isometria (7), quindi non tutti i legami di tale tipo sono accettabili. Per ottenere un legame che a priori soddisfi l'indifferenza materiale si consideri allora l'insieme delle storie $\mathbf{x}_t^*$ equivalenti ad una storia data $\mathbf{x}_t$ ottenute tramite l'isometria (7a). Una isometria lascia invariate le lunghezze ℓ delle linee spaziali, oppure equivalentemente gli allungamenti $\Delta \ell$ delle linee materiali L . Viceversa, se due storie del moto sono caratterizzate da lunghezze ℓ o allungamenti $\Delta \ell$ diversi, non possono differire per la sola sovrapposizione di una isometria. Ne consegue che un insieme di storie equivalenti è caratterizzato da una storia ℓ_t di lunghezze:

$$\ell_t(L, \tau) = \phi[\tau](L), \quad (19)$$

oppure da una storia $\Delta \ell_t$ di allungamenti:

$$\Delta \ell_t(L, \tau) = \phi[\tau](L) - L, \quad (20)$$

dove L è una generica una linea materiale, $\phi(\tau)$ la deformazione al tempo τ nella data storia del moto $\mathbf{x}_t$, e infine $\ell = \phi[\tau](L)$ è la lunghezza della linea spaziale ℓ corrispondente di L al tempo τ per il tramite della deformazione $\phi(\tau)$ allo stesso tempo.

In tale caso occorre però considerare che le configurazioni $\mathcal{B}^*$ e $\mathcal{B}$ che il corpo assume, nelle storie rispettivamente equivalente e originale, al tempo attuale t non sono semplicemente traslate ma differiscono anche per l'azione di una trasformazione ortogonale (fig. 7). Pertanto a due storie equivalenti corrispondono degli sforzi interni che si corrispondono l'un

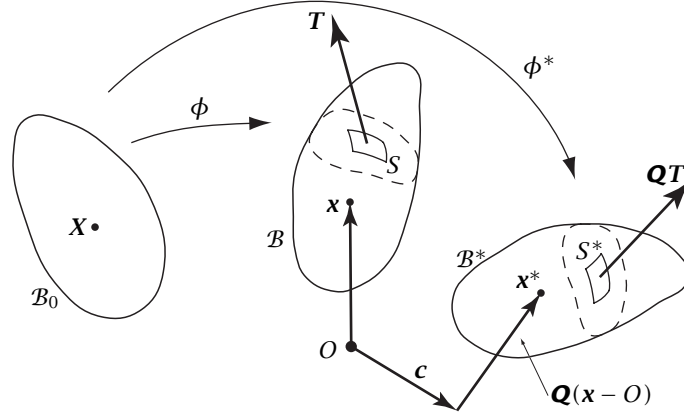


Figura 7: Isometria

l'altro tramite la relazione (6). Quindi una storia ℓ_t di lunghezze, oppure $\Delta\ell_t$ di allungamenti, definisce gli sforzi interni a meno di una trasformazione ortogonale $\mathbf{Q}$, trasformazione che è necessario conoscere se si vogliono determinare gli effettivi sforzi interni nella configurazione spaziale $\mathcal{B}^*$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\ell_t) \mathbf{Q}^T. \quad (21)$$

Nella fig. 8 è riportato il diagramma di Tonti illustrante il problema della meccanica del con-

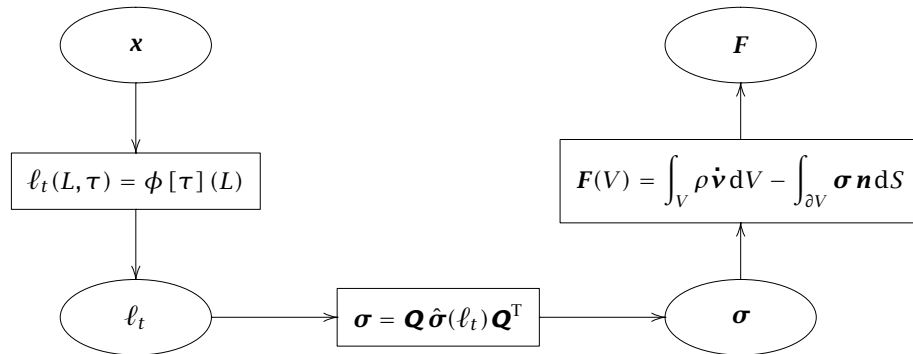


Figura 8: Meccanica del continuo: indifferenza rispetto alle isometrie

tinuo in sintonia con l'indifferenza materiale rispetto alle isometrie, avendo ancora indicato con $\mathbf{F}$ la forza di volume relativa al generico volume V interno al corpo. In tale quadro l'equazione di congruenza associa al moto $\mathbf{x}$, ad ogni istante t , la corrispondente storia ℓ_t di lunghezze di tempo attuale coincidente con t al fine di ottenere lo sforzo allo stesso tempo applicando il legame costitutivo. Naturalmente invece che alle lunghezze si può fare riferimento agli allungamenti delle linee utilizzando la (20) come equazione di congruenza. Se invece ci si vuole riferire al campo degli spostamenti $\mathbf{u}$ in luogo della funzione del moto $\mathbf{x}$,

basta utilizzare la relazione $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ per risalire alla funzione del moto e quindi alla deformazione in un generico istante. Nel diagramma di fig. 8 la colonna di destra, rappresentante la dinamica del continuo, è invariata rispetto a quella del diagramma di fig. 5. Dal punto di vista geometrico (fig. 9), le variabili poste nella parte superiore competono ancora ai

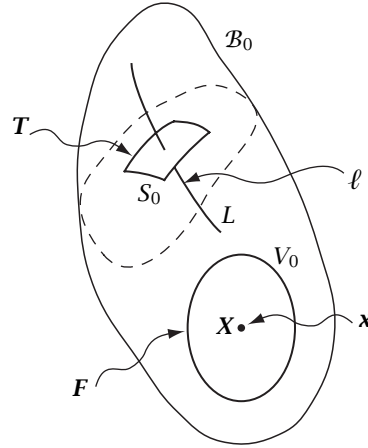


Figura 9: Enti geometrici (Indifferenza alle isometrie)

punti materiali (funzione del moto oppure campo degli spostamenti) e ai volumi (forze di volume) mentre le variabili poste nella parte inferiore competono alle linee materiali (storia ℓ_t oppure $\Delta\ell_t$) e ancora alle superfici interne al corpo (sforzi interni). Si noti inoltre che il valore ad un dato istante $\tau \leq t$ della storia ℓ_t , così come quello della storia $\Delta\ell_t$, rappresenta una funzione definita sulle linee materiali e a valori scalari, mentre gli sforzi interni rappresentano ancora una funzione definita sulle superfici orientate interne al corpo e a valori vettoriali. Si conclude osservando che il legame costitutivo $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\Delta\mathbf{x}_t)$ relativo al diagramma di fig. 5, come già detto, non assicura in modo completo l'indifferenza materiale, che resta quindi da imporre. Tuttavia i vettori $\Delta\mathbf{x}$ non sono invarianti sotto l'azione di una isometria, e la conseguenza è che gli sforzi interni sono dati in modo univoco. Nel caso del legame costitutivo $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\ell_t)\mathbf{Q}^T$ relativo al diagramma di fig. 8 l'indifferenza materiale è automaticamente soddisfatta ma gli sforzi interni non sono dati univocamente, o comunque occorre risalire ad una opportuna trasformazione ortogonale $\mathbf{Q}$ per ottenere gli sforzi effettivi da quelli $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\ell_t)$ dati univocamente.

2 Legami costitutivi locali

I legami costitutivi in un corpo continuo possono essere modellati in accordo con la seguente assunzione:

Principio dell'azione locale *Gli sforzi interni che agiscono, ad un dato istante, in un intorno comunque piccolo di un dato punto del corpo non dipendono dalla storia del moto dei punti materiali al di fuori del dato intorno.*

Questa assunzione è in accordo con la nozione di sforzo interno quale forza di contatto, nozione che esclude azioni a distanza, che sono invece modellate tramite le forze di volume. Senza entrare in dettaglio, esistono però circostanze la cui modellizzazione richiede la presenza di sforzi interni non locali. Per es., quando le interazioni a livello microscopico, che nel

modello continuo diventano gli sforzi interni, si trasmettono ad una distanza comparabile con la lunghezza tipica del problema che si sta trattando.

2.1 Localizzazione del moto

Si ricordi che l'indifferenza materiale rispetto alle traslazioni spaziali, al fine di dedurre il legame costitutivo, permette di ridurre la storia del moto alla storia $\Delta \mathbf{x}_t$ dei vettori spaziali corrispondenti ad una qualunque coppia di punti materiali (X_1, X_2) , come espresso dalla (18). Per via del principio dell'azione locale, se due storie $\Delta \mathbf{x}'_t$ e $\Delta \mathbf{x}''_t$ coincidono in un intorno $\mathcal{I}(X)$ del punto X per ogni tempo $\tau \leq t$, allora:

$$\hat{\sigma}(\Delta \mathbf{x}'_t) = \hat{\sigma}(\Delta \mathbf{x}''_t). \quad (22)$$

Poichè l'intorno $\mathcal{I}(X)$ del punto X può essere sempre ristretto in modo tale da escludere due punti qualsiasi non coincidenti con X stesso, lo sforzo nel punto X può allora essere dedotto da un operatore costitutivo $\hat{\sigma}$, dipendente sia dal punto che dall'intorno, agente sulle localizzazioni $\Delta \mathbf{x}_t^X$ delle storie del moto al dato intorno (fig. 10):

$$\Delta \mathbf{x}_t^X(\Delta X, \tau) = \phi[\tau](X + \Delta X) - \phi[\tau](X), \quad (X + \Delta X) \in \mathcal{I}(X). \quad (23)$$

In definitiva si può scrivere:

$$\sigma(X, t) = \hat{\sigma}[X, \mathcal{I}(X)](\Delta \mathbf{x}_t^X). \quad (24)$$

Naturalmente la stessa storia del moto localizzata a intorni diversi dello stesso punto forni-

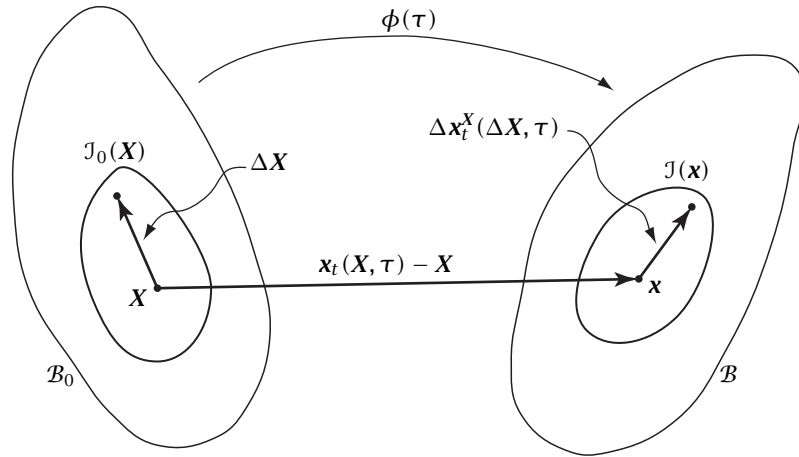


Figura 10: Localizzazione del moto

sce tramite l'opportuno operatore la stessa tensione nel punto, così come le localizzazioni di due storie del moto a due diversi intorni dello stesso punto se tali localizzazioni coincidono in un terzo intorno contenuto negli altri due.

Si noti che la localizzazione di una storia del moto è una funzione definita per tutti i tempi $\tau \leq t$ e per tutti i vettori ΔX "contenuti" nell'intorno, nel senso che il punto $X + \Delta X$ è contenuto nell'intorno. In tal modo, scegliendo opportunamente la forma degli intorni (per es. la forma sferica con centro sul punto e di uguale raggio), è possibile far coincidere il dominio delle localizzazioni in due punti diversi e quindi confrontare le stesse localizzazioni.

2.2 Materiali semplici

Nell'intorno di un punto materiale X il vettore $\Delta \mathbf{x}$ e lo spostamento $\Delta \mathbf{u}$ corrispondenti al punto $X + \Delta X$ possono essere approssimati tramite il gradiente della deformazione $\mathbf{F} =$

Grad ϕ e il gradiente degli spostamenti $\mathbf{H} = \text{Grad } \mathbf{u}$ rispettivamente:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{F} \Delta \mathbf{X} + o(|\Delta \mathbf{X}|), \quad (25a)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{X} + o(|\Delta \mathbf{X}|). \quad (25b)$$

Si può allora imporre il principio dell'azione locale rendendo gli sforzi interni nell'intorno di un punto funzione dei valori locali di $\mathbf{F}$ oppure di $\mathbf{H}$. Si ottiene un legame costitutivo tra le storie locali $\mathbf{F}_t(\mathbf{X})$ del gradiente della deformazione, oppure le storie locali $\mathbf{H}_t(\mathbf{X})$ del gradiente degli spostamenti, e il valore locale $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X})$ del tensore di Cauchy al tempo attuale t :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_t[\mathbf{X}, \mathbf{F}_t(\mathbf{X})]. \quad (26)$$

Un materiale che soddisfa una legge costitutiva locale del tipo della (26) viene detto *materiale semplice*.

Poichè gli sforzi nell'intorno di un punto sono individuati oltre che dal tensore degli sforzi di Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, relativamente alle superfici spaziali, anche dal primo tensore di Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}$, relativamente alle superfici materiali, il legame costitutivo può anche esprimersi in forma materiale. In tal caso si ottiene un legame costitutivo tra le storie locali $\mathbf{F}_t(\mathbf{X})$ del gradiente della deformazione e il valore locale $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ del primo tensore di Piola-Kirchhoff:

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}) = \hat{\mathbf{P}}_t[\mathbf{X}, \mathbf{F}_t(\mathbf{X})]. \quad (27)$$

Il diagramma di fig. 11. illustra la situazione nel caso si utilizzi il primo tensore di Piola-

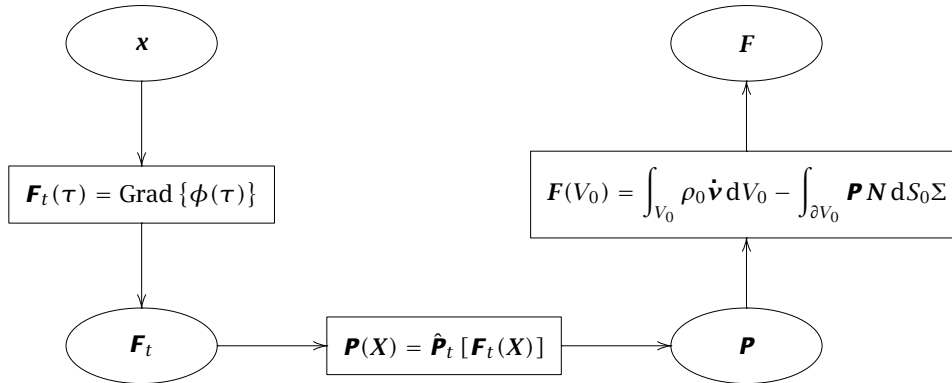


Figura 11: Meccanica del continuo: legame costitutivo locale con indifferenza rispetto alle traslazioni

Kirchhoff. Si ricordi che il bilancio del momento della quantità di moto equivale allora a richiedere che sia:

$$\mathbf{P}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{P}^T. \quad (28)$$

Inoltre il bilancio della quantità di moto equivale, al prezzo però di condizioni di regolarità aggiuntive prive di significato fisico, all'equazione del moto:

$$\text{Div } \mathbf{P} + \mathbf{f}_0 = \rho_0 \dot{\mathbf{v}}, \quad (29)$$

dove $\mathbf{f}_0$ è la forza per unità di volume indeformato e ρ_0 la distribuzione di massa nella configurazione indeformata. Nel diagramma di fig. 11 al posto del gradiente della deformazione $\mathbf{F}$ si sarebbe potuto utilizzare, come detto, il gradiente materiale degli spostamenti $\mathbf{H}$ e, in sintonia con tale scelta, gli spostamenti $\mathbf{u}$ in luogo della posizione spaziale $\mathbf{x}$ dei punti.

Invece dell'approssimazione lineare (25a) di $\Delta \mathbf{x}$ si sarebbe potuta considerare un'approssimazione di ordine superiore. È evidente che si ottiene un legame di tipo locale anche facendo dipendere lo sforzo interno al corpo dai primi n operatori dello sviluppo in serie di $\Delta \mathbf{x}$. Un tale materiale viene detto *materiale di grado n*. Un materiale semplice è quindi un materiale di grado 1.

2.3 Principio dell'azione locale e indifferenza materiale rispetto alle isometrie

Si consideri ora l'applicazione del principio dell'azione locale relativamente al diagramma di fig. 8, esprimente l'indifferenza materiale rispetto alle isometrie. In tal caso l'operatore costitutivo locale viene ad agire sulle storie delle lunghezze, oppure degli allungamenti, delle linee appartenenti ad un intorno del punto considerato e passanti per lo stesso punto. Volendo implementare il legame costitutivo riguardante un materiale semplice, basta considerare che le linee in un intorno di un punto materiale X si riducono agli elementi di linea materiali dX uscenti dal punto. Il quadrato della lunghezza del corrispondente elemento di linea deformato $d\mathbf{x}$, approssimazione lineare del quadrato della lunghezza della linea, è fornito dal tensore destro di Cauchy-Green $\mathbf{C}$:

$$|d\mathbf{x}|^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}. \quad (30)$$

La differenza dei quadrati delle lunghezze delle linee deformata e indeformata è fornita invece, sempre nell'approssimazione lineare, dal tensore di deformazione di Green-Lagrange $\mathbf{E}$:

$$|d\mathbf{x}|^2 - |d\mathbf{X}|^2 = 2 d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X}. \quad (31)$$

Per quel che riguarda la tensione interna, si consideri che se la deformazione ϕ^* si ottiene dalla deformazione ϕ tramite la sovrapposizione di una isometria di trasformazione ortogonale $\mathbf{Q}$, allora risulta:

$$\mathbf{F}^* = \text{Grad } \phi^* = \mathbf{Q} \text{Grad } \phi = \mathbf{Q}\mathbf{F}. \quad (32)$$

Se $\mathbf{t}$ è la tensione per unità di superficie materiale, la *tensione materiale* $\mathbf{t}_0$:

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{t}, \quad (33)$$

si mantiene allora costante nell'insieme delle deformazioni ϕ^* che differiscono da una deformazione data ϕ per la sovrapposizione di una isometria (fig. 12). Infatti risulta:

$$\mathbf{t}_0^* = \mathbf{F}^{*-1} \mathbf{t}^* = (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q}^T) (\mathbf{Q} \mathbf{t}) = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{t} = \mathbf{t}_0. \quad (34)$$

Si ricordi che la tensione materiale $\mathbf{t}_0$ nell'intorno di un punto è individuata dal secondo tensore di Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$. In definitiva, si ottiene un legame costitutivo tra le storie locali $\mathbf{C}_t(\mathbf{X})$ del tensore destro di Cauchy-Green, oppure quelle $\mathbf{E}_t(\mathbf{X})$ del tensore di deformazione di Green-Lagrange, e il valore locale $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ del secondo tensore di Piola-Kirchhoff:

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \hat{\mathbf{S}}_t[\mathbf{X}, \mathbf{C}_t(\mathbf{X})]. \quad (35)$$

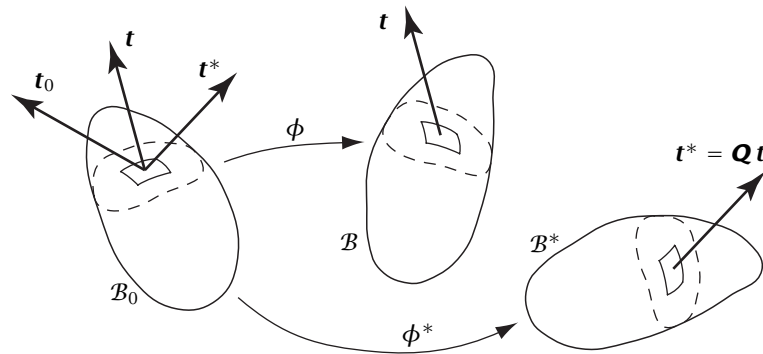


Figura 12: Invarianza della tensione materiale

Tale legame costitutivo soddisfa automaticamente l'indifferenza materiale e, tramite $\mathbf{S}$, genera univocamente la tensione materiale. Il diagramma relativo a tale caso è riportato in fig. 13. La simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy equivale in tal caso alla simmetria del secondo

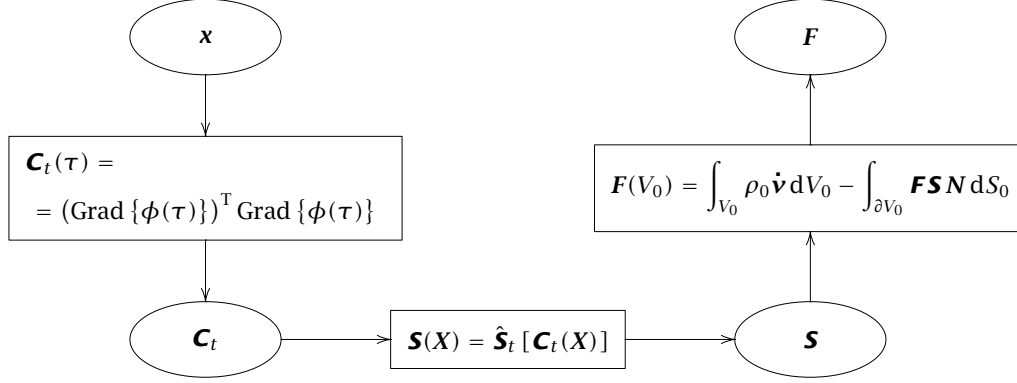


Figura 13: Meccanica del continuo: legame costitutivo locale con indifferenza rispetto alle isometrie

tensore di Piola-Kirchhoff, mentre l'equazione del moto risulta:

$$\text{Div}(\mathbf{FS}) + \mathbf{f}_0 = \rho_0 \dot{\mathbf{v}}. \quad (36)$$

Naturalmente il legame (35) rappresenta il comportamento di un materiale semplice. Questo legame, che automaticamente assicura l'indifferenza materiale, suggerisce anche la condizione che deve soddisfare, per lo stesso scopo, il legame (27):

$$\hat{\mathbf{P}}_t[\mathbf{Q}_t \mathbf{F}_t(X)] = \mathbf{Q} \hat{\mathbf{P}}_t[\mathbf{F}_t(X)], \quad (37)$$

per ogni storia $\mathbf{F}_t$ di deformazione e $\mathbf{Q}_t$ di trasformazioni ortogonali, avendo indicato con $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_t(t)$ il valore al tempo attuale t della storia $\mathbf{Q}_t$. Per interpretare correttamente la condizione (37), tenere conto del fatto che esiste una trasformazione ortogonale $\mathbf{Q}$ tale che $\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}$ se e solo se $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}$, ovvero se e solo se $\mathbf{F}^{*\text{T}}\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^{\text{T}}\mathbf{F}$. Infatti se $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ allora $\mathbf{F} = \mathbf{Q}'\mathbf{U}$ e $\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}''\mathbf{U}$. Quindi, posto $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}''\mathbf{Q}'^{\text{T}}$, si ha $\mathbf{Q}\mathbf{F} = \mathbf{Q}''\mathbf{Q}'^{\text{T}}\mathbf{Q}'\mathbf{U} = \mathbf{Q}''\mathbf{U} = \mathbf{F}^*$, come volevasi dimostrare. Inoltre, per quel che riguarda la tensione, se $\mathbf{t} = \mathbf{P}\mathbf{N}$ allora $\mathbf{P}^*$ si applica a $\mathbf{N}$ per ottenere $\mathbf{Q}\mathbf{t}$ e quindi:

$$\mathbf{Q}\mathbf{t} = \mathbf{Q}(\mathbf{P}\mathbf{N}) = (\mathbf{Q}\mathbf{P})\mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{P}^* = \mathbf{Q}\mathbf{P}. \quad (38)$$

Naturalmente la condizione (37) si sarebbe potuta ottenere in modo più veloce ricordando che il gradiente della deformazione $\mathbf{F}$ e il primo tensore di Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}$ sotto l'azione di una isometria di trasformazione ortogonale $\mathbf{Q}$ diventano $\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}$ e $\mathbf{P}^* = \mathbf{Q}\mathbf{P}$.

3 Omogeneità

La tensione in un punto $\mathbf{x}$ spaziale non dipende dal sistema di riferimento, a differenza della localizzazione del moto $\Delta \mathbf{x}_t^{\mathbf{X}}$ al punto $\mathbf{X}$ materiale corrispondente di quello spaziale $\mathbf{x}$. Ne consegue che la funzione costitutiva locale $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_t$ dipende dalla configurazione di riferimento.

Si consideri allora una configurazione spaziale $\mathcal{B}$ del corpo, due punti $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ in essa, due intorni $\mathcal{J}'$ e $\mathcal{J}''$ di tali punti e, per tali intorni spaziali, due generiche configurazioni di riferimento $\mathcal{J}'_0$ e $\mathcal{J}''_0$ non obbligatoriamente parti di un'unica configurazione di riferimento globale per tutto il corpo (fig. 14). Si supponga che, dati i due punti spaziali $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$, esista una scelta delle configurazioni di riferimento $\mathcal{J}'_0$ e $\mathcal{J}''_0$ tali che:

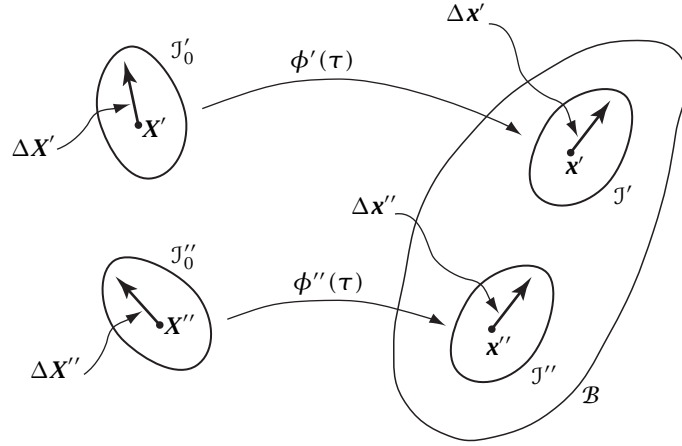


Figura 14: Uniformità

1. La densità di massa ρ'_0 in J'_0 e quella ρ''_0 in J''_0 sono costanti in J'_0 e J''_0 rispettivamente e coincidono:

$$\rho'_0 = \rho''_0 = \text{cost}; \quad (39)$$

2. Il funzionale costitutivo $\hat{\sigma}'_t$ in X' e quello $\hat{\sigma}''_t$ in X'' coincidono:

$$\hat{\sigma}'_t = \hat{\sigma}''_t, \quad (40)$$

avendo indicato con $X' \in J'_0$ e $X'' \in J''_0$ i punti materiali corrispondenti dei due punti spaziali x' e x'' rispettivamente. L'uguaglianza (40) significa che se sono date due localizzazioni di storie del moto, una in X' e l'altra in X'' , e queste due localizzazioni coincidono allora coincidono anche gli sforzi dedotti dalle due localizzazioni per mezzo dei rispettivi operatori costitutivi.

Se questo è il caso si dice che i due punti sono *isomorfici*. Se poi tutti i punti di un corpo sono isomorfici tra loro si dice che il corpo è *uniforme*.

Si noti che non è necessario, affinché un corpo sia uniforme, né che esista una configurazione globale $\mathcal{B}_0$ da cui siano ottenute tutte le configurazioni di riferimento locali e né che un punto sia isomorfico con tutti gli altri per il tramite della stessa configurazione di riferimento locale. Se invece la configurazione di riferimento globale che rende uniforme il corpo esiste si dice che il corpo è *omogeneo*. Quindi un corpo è omogeneo se esiste una configurazione di riferimento globale $\mathcal{B}_0$ nella quale il comportamento del materiale non varia da punto a punto, ovvero sia tale che:

$$\begin{cases} \rho_0 = \text{cost} \\ \hat{\sigma}_t = \text{cost} \end{cases}, \quad \text{in } \mathcal{B}_0. \quad (41)$$