

LEGAMI COSTITUTIVI

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile

Università di Trieste

Piazzale Europa 1, Trieste

Trieste, 19 giugno 2005

Indice

1	Materiali semplici	3
1.1	Localizzazione della deformazione	3
1.2	Configurazioni locali	4
1.3	Isotropia	6
1.4	Solidi, fluidi, cristalli liquidi e materiali isotropi	11
2	Materiali incrementali	15
2.1	Materiali semplici di tipo incrementale	15
2.2	Ipoelasticità	18
2.3	Tensori di ipoelasticità	22
2.4	Relazioni incrementali iperelastiche	24
2.5	Relazioni incrementali nella configurazione ruotata	25

Capitolo 1

Materiali semplici

1.1 Localizzazione della deformazione

La storia della deformazione nell'intorno di un punto X , nella sua forma localizzata, si può esprimere nel modo seguente:

$$\Delta x_t^X(\Delta \underline{X}) = \underline{F}_t^X(X) + o(|\Delta \underline{X}|), \quad (1)$$

dove $\underline{F}_t^X(X)$ è la storia del gradiente della deformazione in X . Ne consegue che le storie $\underline{F}_t$ del gradiente della deformazione valutato in X approssimano le storie del moto nell'intorno del punto X .

Si definisce materiale semplice un materiale per il quale la tensione in un punto dipende dalla storia $\underline{F}_t$ del gradiente della deformazione:

$$\underline{\sigma} = \hat{\underline{\sigma}}(\underline{F}_t). \quad (2)$$

La proprietà (1) del gradiente della deformazione garantisce che un materiale semplice soddisfi il principio dell'azione locale. Naturalmente esistono altri tipi di materiale che soddisfano tale principio. In fatti basta considerare un'espansione del moto Δx_t^X fino all'ordine n . Si ha allora un materiale di grado n se la tensione si fa dipendere dagli n gradienti $\underline{F}_t^{(i)}$ ($i=1, \dots, n$) implicati in tale espansione:

$$\underline{\sigma} = \hat{\underline{\sigma}}(\underline{F}_t^{(1)}, \dots, \underline{F}_t^{(n)}), \quad (3)$$

materiale che soddisfa senz'altro il principio dell'azione locale.

Potendo costruire per ogni $\underline{F}_t$ in X uno stato omogeneo di deformazione nell'intorno di X :

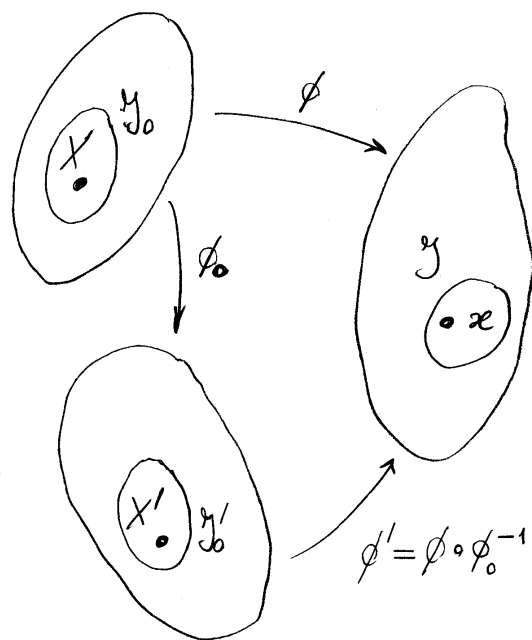
$$\Delta x_t^X(\Delta \underline{X}) = \underline{F}_t \Delta \underline{X}, \quad (4)$$

avente $\underline{F}_t$ quale gradiente in ogni punto dell'intorno, compreso X , è evidente che per un corpo semplice la

risposta (2) è nota se è nota la risposta alla classe delle deformazioni omogenee nell'intorno del punto.

1.2 Configurazioni locali

Si considerino ora due configurazioni di riferimento $\mathcal{Y}_0$ e $\mathcal{Y}'_0$ e siano $\phi: \mathcal{Y}_0 \rightarrow \mathcal{Y}$ e $\phi': \mathcal{Y}'_0 \rightarrow \mathcal{Y}$ le rispettive funzioni di deformazione. Se $\phi_0: \mathcal{Y}_0 \rightarrow \mathcal{Y}'_0$



e la deformazione che porta $\mathcal{Y}_0$ in $\mathcal{Y}'_0$, risulta:

$$\underline{F}'_t = \underline{F}_t \underline{F}_0^{-1} \quad (5)$$

dove:

$$\underline{F}' = \text{Grad } \phi'|_{X'}, \quad \underline{F} = \text{Grad } \phi|_X, \quad \underline{F}_0 = \text{Grad } \phi_0|_{X}.$$

Se $\underline{F}_0 = \underline{I}$ allora dalla (5) si ha $\underline{F}'_t = \underline{F}_t$, cioè le storie del gradiente della deformazione in X coincidano con quelle in X' . Poiché l'equazione costitutiva (2) è la stessa per tutte le configurazioni di riferimento che originano le stesse storie del gradiente della deformazione in X , ne consegue che è la stessa per tutte le configurazioni di riferimento tali che:

$$\underline{F}_0 = \underline{I}. \quad (6)$$

L'equivalenza:

$$\mathcal{Y}_0 \sim \mathcal{Y}'_0 \iff \underline{F}_0 = \underline{I} \quad (7)$$

partiziona l'insieme delle configurazioni di riferimento

in classi di equivalenza, dette configurazioni locali in X . L'equazione (2) dipende da queste classi di equivalenza. Indicando con $\underline{K}$ una generica configurazione locale, individuata dalla configurazione $\underline{Y}_0$, risulta:

$$\underline{K} = \{ \underline{Y}'_0 \mid \underline{Y}'_0 \sim \underline{Y}_0 \}. \quad (8)$$

Se $\underline{K}$ e $\underline{K}'$ sono due configurazioni locali, risulta:

$$\underline{F}'_t = \underline{F}_t \underline{F}_0^{-1}, \quad (9)$$

dove $\underline{F}_t$ è una storia descritta rispetto alla configurazione $\underline{K}$, $\underline{F}'_t$ è la stessa storia descritta rispetto a $\underline{K}'$ e $\underline{F}_0$ è il gradiente della deformazione che porta una qualunque configurazione di $\underline{K}$ in una qualunque configurazione di $\underline{K}'$.

Per via della (9) deve risultare:

$$\hat{\underline{\sigma}}(\underline{F}_t) = \hat{\underline{\sigma}}'(\underline{F}_t \underline{F}_0^{-1}), \quad (10)$$

dove $\hat{\underline{\sigma}}$ è il funzionale costitutivo relativo alla configurazione $\underline{K}$ e $\hat{\underline{\sigma}}'$ quello relativo a $\underline{K}'$.

L'indifferenza materiale impone poi alla (2) la condizione:

$$\underline{Q}_0 \hat{\underline{\sigma}}(\underline{F}_t) \underline{Q}_0^T = \hat{\underline{\sigma}}(\underline{Q}_t \underline{F}_t). \quad (11)$$

dove $\underline{Q}_0 = \underline{Q}_t(t)$.

Posto $\underline{Q}_t = \underline{R}_t^T$, dove $\underline{R}_t$ è la rotazione che consegue dalla decomposizione polare $\underline{F}_t = \underline{R}_t \underline{U}_t$, dalla (11) consegue:

$$\underline{R}_0^T \hat{\underline{\sigma}} \underline{R}_0 = \hat{\underline{\sigma}}(\underline{R}_t^T \underline{R}_t \underline{U}_t), \quad (12)$$

da cui:

$$\underline{\sigma} = \underline{R}_0 \hat{\underline{\sigma}}(\underline{U}_t) \underline{R}_0^T. \quad (13)$$

Poiché $\underline{R}_0 = \underline{F}_0 \underline{U}_0^{-1}$ risulta anche:

$$\underline{\sigma} = \underline{F}_0 \hat{\underline{\sigma}}(\underline{U}_t) \underline{F}_0^T. \quad (14)$$

Naturalmente il funzionale che compare nella (14) è ottenuto da quello che compare nella (13), indicisandoli rispettivamente con $\underline{\hat{\sigma}}'$ e $\underline{\hat{\sigma}}''$, nel modo seguente:

$$\underline{\hat{\sigma}}'(\underline{U}_t) = \underline{U}_0^{-1} \underline{\hat{\sigma}}''(\underline{U}_t) \underline{U}_0^{-1}. \quad (15)$$

Poiché $\underline{C} = \underline{U}^2$ è in relazione biunivoca con $\underline{U}$ le (13) e (14) possono scriversi:

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \underline{R}_0 \underline{\hat{\sigma}}(\underline{C}_t) \underline{R}_0^T, \\ \underline{\sigma} = \underline{F}_0 \underline{\hat{\sigma}}(\underline{C}_t) \underline{F}_0^T. \end{cases} \quad (16)$$

Inoltre, poiché $\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F} \Rightarrow \underline{F} = \underline{F}^{-T} \underline{C}$ e $\underline{F}^T = \underline{C} \underline{F}^{-1}$, la seconda delle (16) può scriversi:

$$\underline{\sigma} = \underline{F}_0^{-T} \underline{\hat{\sigma}}(\underline{C}_t) \underline{F}_0^{-1}. \quad (17)$$

Si ribadisce che i diversi funzionali che compaiono nelle relazioni precedenti sono diversi fra loro, anche se per semplicità si sono tutti indicati con lo stesso simbolo.

1.3 Isotropia

Il concetto di isotropia è legato all'invarianza del comportamento di una particella materiale sotto l'azione di una deformazione della stessa particella.

Vediamo di precisare il concetto. Relativamente ad una certa configurazione $\mathcal{Y}_0$ di riferimento di un intorno di X è dato il funzionale costitutivo $\underline{\hat{\sigma}}$. Se una deformazione ϕ_0 trasforma $\mathcal{Y}_0$ in $\mathcal{Y}_0'$, e relativamente a questa seconda configurazione il funzionale costitutivo coincide con il precedente allora si ha invarianza della risposta costitutiva sotto la deformazione ϕ_0 . Tenendo conto che l'invarianza deve anche riguardare la densità di massa ρ_0 in $\mathcal{Y}_0$ e ρ_0' in $\mathcal{Y}_0'$ si ottiene allora la condizione che la particella X deve essere isotropica con se stessa.

Si consideri ora un materiale semplice e si supponga che relativamente a due configurazioni di riferimento locali $\underline{K}$ e $\underline{K}'$ in X il funzionale costitutivo $\underline{\hat{\sigma}}$

sia invariante. Affinché le distribuzioni di massa ρ_0 e ρ'_0 in X , relative alle due configurazioni, coincidano in un intorno di X devono infatti coincidere in X . Questo equivale a dire che deve essere:

$$\det \underline{F}_0 = \pm 1, \quad (1)$$

dove $\underline{F}_0$ è il gradiente della deformazione che porta la prima configurazione $\mathcal{Y}_0$ nella seconda configurazione $\mathcal{Y}'_0$. Un tensore soddisfacente la condizione (1) viene detto unimodulare. Inoltre, se $\mathcal{Y}_0$ è una configurazione in $\underline{K}$ e $\rho_0(\Delta X)$ è la densità di massa in $\mathcal{Y}_0$, può essere sempre individuata una configurazione $\bar{\mathcal{Y}}_0$ in $\underline{K}$ tale che la densità di massa $\bar{\rho}_0$ in $\bar{\mathcal{Y}}_0$ sia costante. Basta a tal scopo definire la funzione di deformazione ϕ_0 che porta $\mathcal{Y}_0$ in $\bar{\mathcal{Y}}_0$ imponendo la condizione:

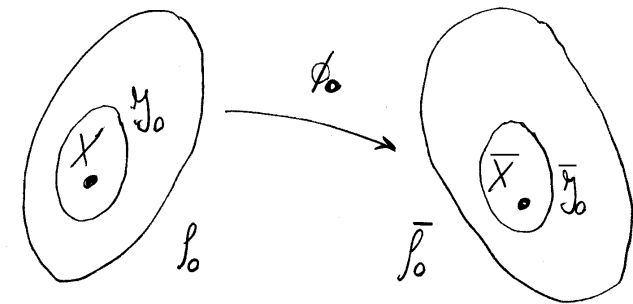
$$\det \text{Grad } \phi_0(\Delta X) = \frac{\rho_0(\Delta X)}{\rho_0(X)}, \quad (2)$$

poiché per la legge di conservazione della massa si ha:

$$\bar{J} \bar{\rho}_0 = \rho_0, \quad (3)$$

dove:

$$\bar{J} = \det \text{Grad } \phi_0. \quad (4)$$



Come in $\underline{K}$, anche in $\underline{K}'$ è possibile individuare una configurazione $\bar{\mathcal{Y}}'_0$ in cui la densità di massa sia costante. Ne consegue che affinché un punto X di un corpo composto di materiale semplice sia isomorfo a se stesso basta che sia:

$$\hat{\underline{\sigma}}(\underline{F}_t) = \hat{\underline{\sigma}}(\underline{F}_t \underline{M}), \quad (5)$$

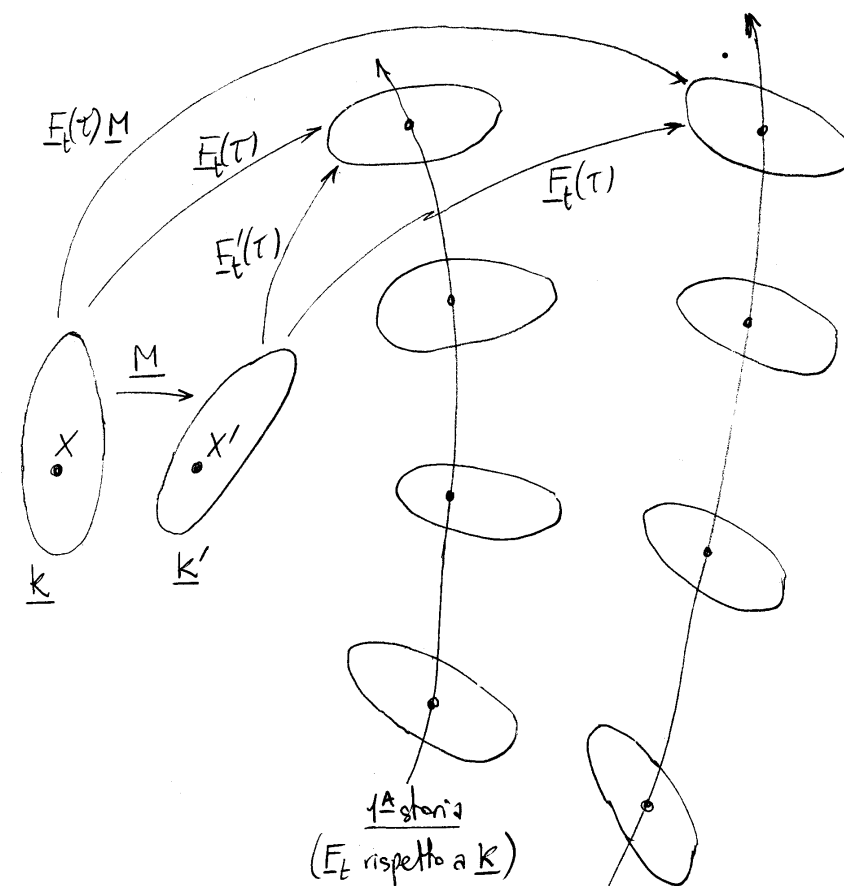
per ogni storia $\underline{F}_t$ di deformazione, dove $\hat{\underline{\sigma}}$ è il funzionale costitutivo rispetto ad una configurazione base $\underline{K}$, la storia $\underline{F}_t$ è relativa a $\underline{K}$ e $\underline{M}$ è un tensore

unimodulare, cioè tale che $\det \underline{M} = \pm 1$. Poiché due differenti configurazioni locali $\underline{K}$ e $\underline{K}'$ individuano un unico gradiente della deformazione $\underline{F}_0$ che le collega, e questo deve essere unimodulare per avere costanza della densità di massa da una configurazione all'altra, ne consegue che, dati $\underline{K}$ ed $\underline{M}$, ne risulta una configurazione locale $\underline{K}'$ tale che $\underline{M} = \underline{F}_0$ e che rende X isomorfo a se stesso.

L'insieme dei tensori unimodulari $\underline{M}$ che soddisfanno la (5) formano un gruppo moltiplicativo $\mathcal{G}_X$ noto come gruppo di isotropia del materiale (materiale semplice e in corrispondenza del punto X di cui $\hat{\sigma}$ rappresenta la risposta costitutiva), oppure come gruppo di simmetria del materiale.

Vediamo di mostrare che $\mathcal{G}_X$ forma un gruppo moltiplicativo. Se $\underline{M}_1$ e $\underline{M}_2$ sono due tensori unimodulari soddisfacenti la (5) allora $\underline{M}_1 \underline{M}_2$ soddisfa la (5):

$$\hat{\sigma}(\underline{F}_t) = \hat{\sigma}(\underline{F}_t \underline{M}_1) = \hat{\sigma}(\underline{F}_t \underline{M}_1 \underline{M}_2), \quad (6)$$



Se $\underline{M} \in \mathcal{G}_X$
le due storie
inducano lo stesso
stress in X al
tempo t

1^a storia
($\underline{F}_t$ rispetto a $\underline{K}$)
2^a storia
($\underline{F}_t$ rispetto a $\underline{K}'$)
($\underline{F}_t \underline{M}$ rispetto a $\underline{K}$)

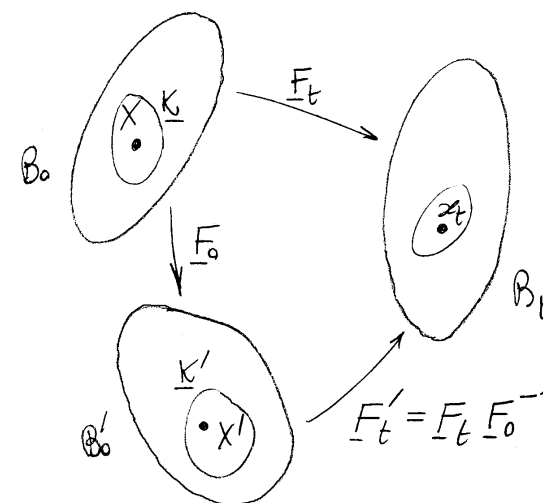
poiché anche $\underline{F}_t \underline{M}_1$ è una storia del moto in corrispondenza della quale deve valere la (5) per il tensore unimodulare $\underline{M}_2$. Inoltre se $\underline{M}$ è un tensore unimodulare soddisfacente la (5) allora la (5) è soddisfatta anche dal suo inverso $\underline{M}^{-1}$:

$$\hat{\sigma}(\underline{F}_t \underline{M}^{-1}) = \hat{\sigma}(\underline{F}_t \underline{M}^{-1} \underline{M}) = \hat{\sigma}(\underline{F}_t), \quad (7)$$

poiché $\underline{F}_t \underline{M}^{-1}$ è una storia e quindi soddisfacente la (5) per ipotesi. Di conseguenza $\mathcal{G}_X$ risulta un sottogruppo del gruppo moltiplicativo Unim dei tensori unimodulari:

$$\mathcal{G}_X \subset \text{Unim}. \quad (8)$$

Il gruppo di simmetria $\mathcal{G}_X$ nel punto X dipende dal riferimento locale $\underline{K}$. Vediamo la relazione di tale gruppo con il gruppo $\mathcal{G}'_X$ di simmetria nel punto X relativo a un diverso riferimento locale $\underline{K}'$. Se $\underline{F}_0$ è il gradiente della deformazione in X di



$\underline{K}'$ relativamente a $\underline{K}$ deve essere:

$$\hat{\sigma}(\underline{F}_t) = \hat{\sigma}'(\underline{F}_t \underline{F}_0^{-1}), \quad (9)$$

Il tensore $\underline{M}$ appartiene a $\mathcal{G}_X$ se e solo se vale la (5) e quindi se e solo se; per via della (9):

$$\hat{\sigma}'(\underline{F}_t \underline{F}_0^{-1}) = \hat{\sigma}'(\underline{F}_t \underline{M} \underline{F}_0^{-1}), \quad (10)$$

per ogni storia $\underline{F}_t$, e quindi, scrivendo la (10) per la storia $\underline{F}_t \underline{F}_0$, se e solo se:

$$\hat{\sigma}'(\underline{F}_t) = \hat{\sigma}'(\underline{F}_t \underline{F}_0 \underline{M} \underline{F}_0^{-1}). \quad (11)$$

Ne consegue che

$$\underline{M} \in \mathcal{G}_X \iff \underline{F}_0 \underline{M} \underline{F}_0^{-1} \in \mathcal{G}'_X \quad (12)$$

La (12) definisce $\mathcal{G}'_X$ quale gruppo coniugato di $\mathcal{G}_X$ e ne consegue che i gruppi di isotropia in un punto relativi a differenti configurazioni sono gli uni i coniugati degli altri.

Se $\underline{F}_0$ rappresenta una dilatazione uniforme:

$$\underline{F}_0 = a \underline{I}, \quad a \neq 0 \quad (13)$$

allora $\mathcal{G}_X = \mathcal{G}'_X$. Quindi una dilatazione uniforme non modifica il gruppo di simmetria del materiale.

Notiamo che per via del principio di indifferenza materiale deve essere:

$$\underline{Q}_0 \hat{\underline{\sigma}}(\underline{F}_t) \underline{Q}_0 = \hat{\underline{\sigma}}(\underline{Q}_t \underline{F}_t) \quad (14)$$

Se si pone $\underline{Q}_t = -\underline{I}$ risulta:

$$\hat{\underline{\sigma}}(\underline{F}_t) = \hat{\underline{\sigma}}(-\underline{F}_t) = \hat{\underline{\sigma}}[\underline{F}_t(-\underline{I})]. \quad (15)$$

Questa relazione, assieme all'identità $\hat{\underline{\sigma}}(\underline{F}_t) = \hat{\underline{\sigma}}(\underline{F}_t \underline{I})$,

mostra che:

$$\{\underline{I}, -\underline{I}\} \subset \mathcal{G}. \quad (16)$$

Naturalmente questo risultato dipende dalla scelta della forma di Zarembka-Jaumann del principio (invariante sotto l'azione del gruppo delle isometrie).

Dalla (16) consegue che se un tensore unimodulare $\underline{M}$ è in $\mathcal{G}$, anche il suo opposto $-\underline{M}$ è in $\mathcal{G}$.

Posto:

$$\underline{F}_0^s = (\underline{J} \underline{I}) \left(\frac{1}{\underline{J}} \underline{F}_0 \right),$$

dove:

$$\underline{F}_0^s = \underline{J} \underline{I},$$

è la parte sferica e:

$$\underline{F}_0^i = \frac{1}{\underline{J}} \underline{F}_0, \quad \underline{F}_0^i \in \text{Unim},$$

è la parte isocorica, si ha:

$$\underline{M} \in \mathcal{G}_X \iff \underline{F}_0^i \underline{M} \underline{F}_0^{i-1} \in \mathcal{G}'_X,$$

e $\mathcal{G}_X$ è coniugato di $\mathcal{G}'_X$ all'interno di Unim.

1.4 Solidi, fluidi, cristalli liquidi e materiali isotropi

Si consideri una deformazione pura unimodulare dell'intorno di un punto:

$$\underline{F}_0 = \underline{U}_0, \quad \underline{R}_0 = \underline{I}, \quad \det \underline{U}_0 = 1, \quad (1)$$

quindi senza variazione di volume e senza rotazione. Per mantenere tale deformazione nel corso del tempo un solido ha bisogno di forze aggiuntive rispetto allo stato preesistente la deformazione, anche per lunghi intervalli di tempo. Ne consegue che il funzionale costitutivo $\hat{\sigma}$ deve essere modificato da $\underline{U}_0$ e $\underline{U}_0 \notin \mathcal{G}_X$. Differente è il caso del fluido, dal quale ci si aspetta che dopo una deformazione senza variazione di volume questa possa mantenersi senza forze aggiuntive.

Per tali motivi si definisce quale fluido semplice un materiale avente quale gruppo di simmetria l'intero gruppo dei tensori unimodulari, e quale solido semplice un materiale semplice avente quale gruppo

di simmetria un sottogruppo del gruppo dei tensori ortonormali, rispetto ad almeno una configurazione locale di riferimento:

$$\text{Fluido semplice} : \mathcal{G} = \text{Unim}, \quad (2)$$

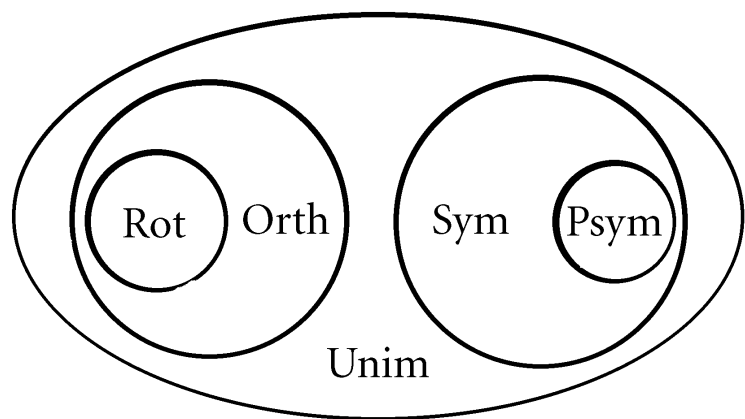
$$\text{Solido semplice} : \mathcal{G} \subseteq \text{Orth}. \quad (3)$$

Nel caso intermedio in cui il materiale fluisce per certe deformazioni pure, senza quindi modificare la relazione costitutiva, ma non per altre rispetto alle quali si comporta quindi come solido, si parla di cristallo liquido semplice:

$$\text{cristallo liquido semplice} : \mathcal{G} \neq \text{Unim} \quad \mathcal{G} \cap \text{Psym} \neq \emptyset \quad (4)$$

per ogni configurazione di riferimento locale. Nella (4) Psym è il gruppo dei tensori doppi simmetrici definiti positivi, quindi contenente il gruppo delle deformazioni pure unimodulari.

Si noti che quando si è introdotto il concetto di solido si è usata l'ambigua dizione "lunghi intervalli".



di tempo". Il concetto di lungo intervallo di tempo dipende dal problema. Nella scala geologica dei tempi le rocce possono avere un comportamento tipo fluido poiché il periodo in cui le forze, nate dalle deformazioni, decadono è un "breve periodo di tempo".

Infine, un qualunque materiale semplice è detto isotropo in un punto se il suo comportamento è indipendente dalla direzione uscente dal punto. Questo implica che il suo comportamento resti invariato a seguito di una rotazione. Poiché il gruppo $\mathcal{G}$ di simmetria contiene sempre l'opposto della identità, deve quindi essere, per

almeno una configurazione di riferimento locale :

$$\text{Materiale isotropo : } \text{Orth} \subset \mathcal{G}. \quad (5)$$

Ricordiamo che al cambiare della configurazione locale di riferimento il gruppo di simmetria $\mathcal{G}$ si trasforma nel suo coniugato $\mathcal{G}'$:

$$\mathcal{G}' = \{ \underline{M}' \in \text{Unim} / \exists \underline{M} \in \mathcal{G} : \underline{M}' = \underline{F}_0^i \underline{M} \underline{F}_0^{i-1} \}, \quad (6)$$

dove $\underline{F}_0^i$ indica la parte isocorica della deformazione relativa tra le due configurazioni.

In generale se $\mathcal{G} \subseteq \text{Orth}$ relativamente a $\underline{K}$, e quindi il materiale è un solido semplice, così non è per $\mathcal{G}'$, gruppo di simmetria relativo a $\underline{K}'$. Le configurazioni locali per le quali vale la (3) sono dette undistorted.

Stessa considerazione se $\mathcal{G} \supseteq \text{Orth}$, cioè se il materiale semplice è isotropo. Anche in questo caso le configurazioni per le quali vale la (5) sono dette undistorted.

Siano $\underline{K}$ e $\underline{K}'$ due configurazioni undistorted di

un solido semplice. Risulta:

$$\underline{Q}' = \underline{F}_0 \underline{Q} \underline{F}_0^{-1} \in \text{Orth}, \quad (7)$$

se $\underline{Q} \in \mathcal{G}$, e quindi, tenendo conto della decomposizione polare $\underline{F}_0 = \underline{R} \underline{U}$, si ottiene:

$$\underline{Q}' \underline{R} \underline{U} = \underline{R} \underline{U} \underline{Q} = \underline{R} \underline{Q} (\underline{Q}^T \underline{U} \underline{Q}). \quad (8)$$

Per l'unicità della decomposizione polare la (8) è equivalente alla:

$$\underline{Q}' \underline{R} = \underline{R} \underline{Q} \quad \text{e} \quad \underline{U} = \underline{Q}^T \underline{U} \underline{Q}. \quad (9)$$

Dalla prima delle (9) si ha:

$$\underline{Q}' = \underline{R} \underline{Q} \underline{R}^T, \quad (10)$$

e quindi $\mathcal{G}'$ risulta coniugato di $\mathcal{G}$, nell'ambito di Orth, tramite la rotazione $\underline{R}$. La seconda delle (9) richiede che $\underline{U}$ sia invariante sotto l'azione di $\mathcal{G}$. Dunque, se $\underline{K}'$ si ottiene da $\underline{K}$, configurazione undistorted, tramite $\underline{F}_0 = \underline{R} \underline{U}$ allora $\underline{K}'$ è

undistorted se e solo se $\underline{U}$ è invariante sotto l'azione di $\mathcal{G}$ e in tal caso il gruppo $\mathcal{G}' \subseteq \text{Orth}$ si ottiene dalla (10).

Si consideri ora un materiale semplice isotropo. Esiste allora $\underline{K}$ tale che $\mathcal{G} \supseteq \text{Orth}$. In algebra lineare si dimostra che Orth è un sottogruppo massimale di Unim, cioè che:

$$\text{Orth} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \text{Unim} \Rightarrow \mathcal{G} = \text{Orth} \text{ oppure } \mathcal{G} = \text{Unim}. \quad (11)$$

Dunque un materiale semplice isotropo o è un solido semplice isotropo oppure un fluido semplice. Naturalmente un fluido semplice è sempre isotropo. Se in $\underline{K}$ è $\mathcal{G} = \text{Orth}$, avverrà sia se il corpo è un solido isotropo, risulta $\mathcal{G} = \text{Orth}$ in ogni configurazione undistorted (nel senso di corpo solido), poiché la (10) trasforma Orth in Orth. È inoltre escluso che esista una configurazione che renda il materiale un fluido semplice perché il coniugato di un sottogruppo proprio

di un gruppo dato (nel nostro caso $Unim$) non può mai coincidere con tutto il gruppo (cioè con $Unim$). Poiché in ogni configurazione undistorted nel senso di corpo solido è $\mathcal{G} = Orth$, risulta che queste configurazioni sono undistorted anche nel senso di materiale isotropo, e quindi i due concetti, quando si applicano contemporaneamente, sono equivalenti, il che giustifica il chiamarli con lo stesso nome.

Si consideri infine un fluido semplice. Poiché i coniugati di $Unim$ coincidono con $Unim$ risulta che la condizione (2) di fluido semplice è soddisfatta per ogni configurazione locale e quindi non vi è nessuna configurazione particolare che possa non essere undistorted. Questo è in accordo anche con il fatto che il fluido semplice è isotropo, perché ogni configurazione, nel senso di materiale isotropo, è undistorted.

Un corpo solido non isotropo è detto anisotropo ed

è caratterizzato da un gruppo di simmetria sottinsieme proprio di $Orth$:

$$\text{solido semplice anisotropo: } \mathcal{G} \subset Orth, \quad (12)$$

in almeno una configurazione locale di riferimento. Il tipo di gruppo $\mathcal{G}$ caratterizza il tipo di anisotropia. Esistono infiniti sottogruppi di $Orth$, ma questi possono essere ridotti a 12 gruppi fondamentali. Osserviamo infine che la caratterizzazione del gruppo $\mathcal{G}$ di anisotropia di un solido semplice può essere espressa dalla relazione:

$$\underline{Q} \hat{\underline{\sigma}}(\underline{F}_t) \underline{Q}^T = \hat{\underline{\sigma}}(\underline{Q} \underline{F}_t \underline{Q}^T), \quad (13)$$

per ogni storia $\underline{F}_t$. La (13) si ottiene dalla relazione più generale:

$$\hat{\underline{\sigma}}(\underline{F}_t) = \hat{\underline{\sigma}}(\underline{F}_t \underline{H}) \quad (14)$$

scrivendola per la storia $\underline{Q} \underline{F}_t$, ponendo $\underline{H} = \underline{Q}^T$ e applicando a $\hat{\underline{\sigma}}(\underline{Q} \underline{F}_t)$ la condizione legata al principio di indifferenza materiale.

Capitolo 2

Materiali incrementali

Un'equazione costitutiva di tipo incrementale permette di superare la difficoltà insita in un'equazione costitutiva che richiede la conoscenza di tutta la storia passata del moto, senza dovere fare ricorso al principio di fading memory. Infatti un'equazione di tipo incrementale non è altro che un'equazione differenziale che può essere integrata se sono dati dei valori iniziali. In tal caso i valori iniziali rappresentano tutto ciò che è necessario conoscere della storia passata del moto al fine di ricostruire lo storia futura. Attraverso equazioni di tipo incrementale si possono dunque descrivere anche materiali che non soddisfano il principio di fading memory.

2.1 Materiali semplici di tipo incrementale

Ricordiamo l'equazione costitutiva di un materiale semplice:

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{\hat{\sigma}}(\underline{F}_t). \quad (1)$$

Siano $\underline{\sigma}(t)$ e $\underline{F}(t)$ due funzioni compatibili con la (1) e soddisfacenti le equazioni di bilancio (due funzioni $\underline{\sigma}(t)$ e $\underline{F}(t)$ soddisfacenti le equazioni di bilancio individuano un cosiddetto processo dinamico). Se per ogni coppia di funzioni cosiffatte risulti:

$$\underline{\sigma}^{(n)} = \underline{f}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\sigma}}, \dots, \underline{\sigma}^{(n-1)}; \underline{F}, \underline{\dot{F}}, \dots, \underline{F}^{(r)}), \quad (2)$$

si dice che il materiale è di tipo incrementale. Un'equazione differenziale del tipo (2) permette di ricostruire la tensione $\underline{\sigma}(t)$ se è dato $\underline{F}(t)$ e se sono date delle condizioni iniziali $\underline{\sigma}(t_0)$, $\underline{\dot{\sigma}}(t_0)$, ...

In generale la (2) non soddisfa il principio di in-

differenza materiale, essendo associata ad un'equazione costitutiva di tipo (1), che a priori non soddisfa tale principio.

Allo scopo di ottenere un'equazione incrementale soddisfacente il principio di indifferenza materiale, consideriamo la configurazione di riferimento al tempo t attuale quale configurazione di riferimento lagrangiana relativa. Rispetto a tale configurazione si descriverà la generica storia di deformazione $\underline{F}_t$ fino ad un dato tempo t' e si imporrà la condizione espresso dal principio di indifferenza materiale ottenendo quindi un'equazione ridotta che soddisfa automaticamente tale principio. La forma incrementale di tale equazione ridotta sarà poi scritta nel caso particolare $t'=t$ ottenendo infine la forma incrementale cercata.

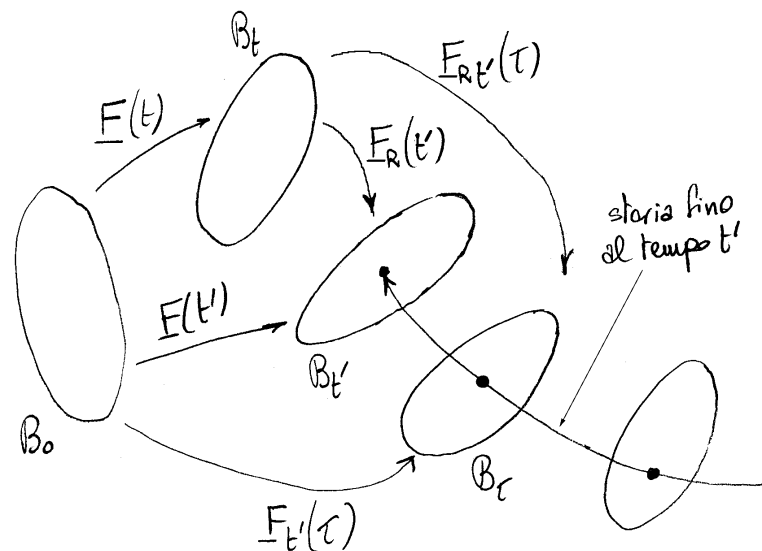
Cio' premesso, la storia di deformazione $\underline{E}_{t'}$ espressa
relativamente alla configurazione di riferimento Ω_{ref} =

già da B_0 risulta:

$$\underline{F}_{t'} = \underline{F}_{Rt'} \underline{F}(t), \quad (3)$$

dove con $\underline{E}_R$ si è indicata la deformazione riferita alla configurazione del tempo t e $\underline{E}_R t'$ indica di conseguenza una storia fino al tempo t' espresso rispetto a tale riferimento. Utilizzando le decomposizioni polari:

$$\begin{aligned} \underline{F}_{Rt'} &= \underline{R}_{Rt'} \underline{U}_{Rt'}, \\ \underline{F}(t) &= \underline{R}(t) \underline{U}(t), \end{aligned} \quad (4)$$



si ottiene:

$$\underline{F}_{t'} = \underline{Q}_{Rt'}^T \underline{U}_{Rt'}^* \underline{U}(t), \quad (5)$$

dove $\underline{U}_{Rt'}^*$ e $\underline{Q}_{Rt'}$ sono storie delle funzioni:

$$\underline{U}_R^*(t') = \underline{R}(t)^T \underline{U}_R(t) \underline{R}(t), \quad (6)$$

$$\underline{Q}_R(t') = [\underline{R}_R(t') \underline{R}(t)]^T. \quad (7)$$

La (5) si può mettere nella forma:

$$\underline{Q}_{Rt'} \underline{F}_{t'} = \underline{U}_{Rt'}^* \underline{U}(t), \quad (8)$$

che, assieme alla condizione di indifferenza materiale:

$$\underline{Q}_{Rt'}(t') \underline{\sigma}(t') \underline{Q}_{Rt'}(t')^T = \hat{\underline{\sigma}}(\underline{Q}_{Rt'} \underline{F}_{t'}) \quad (9)$$

conduce infine a scrivere:

$$\underline{\sigma}_R^*(t') = \hat{\underline{\sigma}}(\underline{U}_{Rt'}^* \underline{U}(t)) \quad (10)$$

dove:

$$\underline{\sigma}_R^*(t') = \underline{R}(t)^T \underline{R}_{Rt'}(t')^T \underline{\sigma}(t') \underline{R}_{Rt'}(t') \underline{R}(t). \quad (11)$$

La forma (10) del funzionale costitutivo soddisfa quindi l'indifferenza materiale.

Se ora si vuole che una relazione incrementale sia tale da associare ad una funzione $\underline{U}_R^*(t')$ una funzione $\underline{\sigma}_R^*(t')$, in modo da poter essere compatibile con la (10), deve essere:

$$\underline{\sigma}_R^{(n)*}(t') = \underline{f}(\underline{\sigma}_R^*(t'), \dot{\underline{\sigma}}_R^*(t'), \dots, \underline{\sigma}_R^{(n-1)*}(t'));$$

$$\underline{U}_R^*(t'), \dot{\underline{U}}_R^*(t'), \dots, \underline{U}_R^{(n)*}(t'); \underline{U}(t)). \quad (12)$$

Infatti un'equazione differenziale del tipo (12) permette di ricostruire la tensione $\underline{\sigma}_R^*(t')$ se è data $\underline{U}_R^*(t')$, insieme a $\underline{U}(t)$ e alle condizioni iniziali sulle tensioni.

Ci si limita nel seguito ad un'equazione differenziale del primo ordine con $n=1$:

$$\dot{\underline{\sigma}}_R^*(t') = \underline{f}(\underline{\sigma}_R^*(t'); \underline{U}_R^*(t'), \dot{\underline{U}}_R^*(t'); \underline{U}(t)). \quad (13)$$

Si consideri ora un moto passante per la configurazione attuale del tempo t e si scriva la (13) per $t'=t$. Si tenga conto che t è un tempo fisso, che:

$$\underline{\dot{\sigma}} = \frac{d}{dt'} \left(\underline{R}_R(t')^T \underline{\sigma}(t') \underline{R}_R(t') \right) \Big|_{t'=t}, \quad (14)$$

rappresenta la derivata di Jaumann al tempo t attuale:

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\dot{\sigma}} - \underline{\omega} \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \underline{\omega}, \quad (15)$$

e che inoltre risulta:

$$\frac{d}{dt'} \left(\underline{U}_R(t') \right) \Big|_{t'=t} = \underline{D}, \quad (16)$$

$$\underline{U}_R(t) = \underline{I}, \quad \underline{R}_R(t) = \underline{I}, \quad (17)$$

per cui in definitiva la (13) si riduce alla forma:

$$\underline{R}^T \underline{\dot{\sigma}} \underline{R} = \underline{f}(\underline{R}^T \underline{\sigma} \underline{R}, \underline{R}^T \underline{D} \underline{R}, \underline{U}), \quad (18)$$

dove la variabile t non è stata indicata esplicitamente. La (18) è l'equazione incrementale ridotta cercata.

2.2 Ipoelasticità

Ad un materiale ipoelastico si richiede di soddisfare un'equazione del tipo:

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{f}(\underline{\sigma}, \underline{L}), \quad (1)$$

dove $\underline{L}$ è il gradiente della velocità, per ogni coppia di funzioni $\underline{\sigma}(t)$, $\underline{F}(t)$ ammissibili. Non solo, ma si richiede anche che lo stato di sforzo $\underline{\sigma}(t)$ al tempo t dipenda solo dall'ordine e non dalla velocità con cui le configurazioni del moto siano state attraversate. Quest'ultima richiesta impone l'invarianza dell'equazione costitutiva sotto un cambiamento $s(\tau)$ della scala dei tempi:

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{\hat{\sigma}}(\underline{F}_t(\tau)) = \underline{\hat{\sigma}}(\underline{F}_t[s(\tau)]), \quad (2)$$

dove $s(\tau)$ è una funzione crescente di t tale che

$$s(t) = t, \quad \lim_{\tau \rightarrow -\infty} s(\tau) = -\infty. \quad (3)$$

Poiché con un cambiamento della scala dei tempi il lontano passato si può portare nel recente passato, ne risulta che un materiale ipoplastico non ha una fading memory, ma piuttosto una memoria permanente di tutte le configurazioni che ha attraversato. Questa memoria permanente è ciò che accomuna un materiale ipoplastico ad un materiale elastico, tenendo conto che quest'ultimo ha una memoria permanente di tutte le possibili configurazioni, comprese quelle che non ha mai occupato.

Proprio perché la (2) esclude una fading memory, ha bisogno di essere accompagnata da un'ulteriore condizione, che nel caso presente è la (1). Poiché nella (1) interverranno solo delle quantità spaziali, un corpo ipoplastico non ha nessuna configurazione di riferimento preferenziale.

Poiché $\underline{L} = \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1}$ l'equazione (1) è un caso particolare di una equazione di tipo incrementale, che si può quindi scrivere in forma ridotta come segue:

$$\underline{R}^T \underline{\dot{\sigma}} \underline{R} = \underline{f}(\underline{R}^T \underline{\sigma} \underline{R}, \underline{R}^T \underline{D} \underline{R}, \underline{U}). \quad (4)$$

Come detto, l'equazione (1) mostra che $\underline{\dot{\sigma}}$, e quindi $\underline{\sigma}$, deve essere determinato indipendentemente dalla scelta di una configurazione di riferimento. Poiché dati arbitrariamente $\underline{R}$ ed $\underline{U}$ è sempre possibile scegliere una configurazione locale tale che $\underline{F} = \underline{R} \underline{U}$, ne consegue che la (4) deve essere costruita in $\underline{U}$:

$$\underline{R}^T \underline{\dot{\sigma}} \underline{R} = \underline{f}(\underline{R}^T \underline{\sigma} \underline{R}, \underline{R}^T \underline{D} \underline{R}). \quad (5)$$

Poiché $\underline{R} = \underline{I}$ si ottiene allora:

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\dot{\sigma}} - \underline{\omega} \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \underline{\omega} = \underline{f}(\underline{\sigma}, \underline{D}). \quad (6)$$

Se ora si sostituisce la (6) nella (5) si ottiene:

$$\underline{R}^T \underline{f}(\underline{\sigma}, \underline{D}) \underline{R} = \underline{f}(\underline{R}^T \underline{\sigma} \underline{R}, \underline{R}^T \underline{D} \underline{R}), \quad (7)$$

che impone ad $\underline{f}$ di essere una funzione tensoriale isotropa rispetto a tutte e due le sue variabili.

Si richieda ora alla (6) di essere differenziabile

per $\underline{D} = \underline{0}$, in modo che si possa scrivere:

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{a}(\underline{\sigma})[\underline{D}] + o(\|\underline{D}\|), \quad (8)$$

dove $\underline{a}(\underline{\sigma})$ è un tensore del quarto ordine che soddisfa le simmetrie minori, per via della simmetria di $\underline{\dot{\sigma}}$ e di $\underline{D}$.

Si fa ora intervenire un cambiamento di scala $s(\tau)$. Se $\underline{F}(\tau)$ è la deformazione prima del cambiamento e $\underline{\tilde{F}}(\tau)$ quella dopo risulta:

$$\underline{\tilde{F}}(\tau) = \underline{F}(s(\tau)) \Rightarrow \begin{cases} \underline{\dot{\tilde{F}}}(t) = \dot{s}(t) \underline{\dot{F}}(t) \\ \underline{\tilde{F}}(t) = \underline{F}(t) \end{cases}, \quad (9)$$

e quindi anche:

$$\underline{\tilde{L}}(t) = \underline{\dot{\tilde{F}}}(t) \underline{\tilde{F}}^{-1}(t) = \dot{s}(t) \underline{L}(t) \quad (10)$$

e cioè:

$$\underline{\tilde{D}}(t) = \dot{s}(t) \underline{D}(t), \quad \underline{\tilde{\omega}}(t) = \dot{s}(t) \underline{\omega}(t). \quad (11)$$

Analogamente, se $\underline{\sigma}(t)$ e $\underline{\tilde{\sigma}}(t)$ sono gli sforzi prima e dopo il cambiamento di scala, poiché questo

non modifica gli sforzi si ha:

$$\underline{\tilde{\sigma}}(\tau) = \underline{\sigma}(s(\tau)) \Rightarrow \begin{cases} \underline{\dot{\tilde{\sigma}}}(t) = \dot{s}(t) \underline{\dot{\sigma}}(t) \\ \underline{\tilde{\sigma}}(t) = \underline{\sigma}(t) \end{cases}, \quad (12)$$

Scrivendo la (6) per la storia di deformazione $\underline{\tilde{F}}(\tau)$ e ponendo $\alpha = \dot{s}(t)$ si ottiene:

$$\underline{\dot{\tilde{\sigma}}} = \underline{f}(\underline{\tilde{\sigma}}, \underline{\tilde{D}}) = \underline{f}(\underline{\sigma}, \alpha \underline{D}). \quad (13)$$

Poiché $\underline{\dot{\tilde{\sigma}}} = \alpha \underline{\dot{\sigma}}$, utilizzando la (6) si ha infine:

$$\underline{f}(\underline{\sigma}, \alpha \underline{D}) = \alpha \underline{f}(\underline{\sigma}, \underline{D}). \quad (14)$$

La (14) vale per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Infatti dato β basta scegliere il cambiamento di scala $s(\tau) = \beta \tau$ per avere $\dot{s}(\tau) = \beta$ e cioè $\alpha = \beta$. La (14) dice che $\underline{f}$ è omogenea in $\underline{D}$ e che quindi il termine $o(\|\underline{D}\|)$ nella (8) è nullo e $\underline{f}$ è lineare in $\underline{D}$:

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{a}(\underline{\sigma})[\underline{D}]. \quad (15)$$

Per quel che riguarda le relazioni tra i materiali

elastici e quelli ipoplastici, si consideri che l'equazione incrementale associata ad un materiale elastico è del tipo :

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{a}(\underline{\sigma}, \underline{R}, \underline{C})[\underline{D}], \quad (16)$$

e che quindi si riduce a quella ipoplastica solo se la dipendenza di $\underline{a}$ da $\underline{R}$ e $\underline{C}$ non è effettiva. Quindi non tutti i materiali elastici sono ipoplastici.

Inoltre nell'approssimazione lineare un materiale ipoplastico si comporta come un materiale elastico. Ma poiché $\underline{a}(\underline{0})[\underline{D}]$ è una funzione isotropa di $\underline{D}$ ne consegue che il tensore di elasticità infinitesimo è isotropo e quindi che l'elasticità infinitesima anisotropa non è inclusa nel modello ipoplastico come caso particolare.

Infine si può mostrare che un corpo ipoplastico si comporta come un corpo elastico limitatamente ad una famiglia di deformazioni $\underline{F}(\alpha)$ dipendenti da un parametro, nel senso che comunque sia data una storia

all'interno di tale famiglia la tensione dipende solo dalla configurazione finale. Se però si cambia famiglia si ottiene ancora un comportamento elastico ma differente dal precedente. Ovverossia, se una deformazione $\underline{F}$ appartiene ad entrambe le famiglie, due storie che conducano a tale deformazione originano differenti tensioni se prese nelle due differenti famiglie. Questo naturalmente è il comportamento generale, comportamento che dice che in generale un corpo ipoplastico non è elastico, dipende la tensione dalla storia di deformazione.

2.3 Tensori di ipoelasticità

La relazione ipoelastica:

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{a} [\underline{D}], \quad (1)$$

può essere messa in altre forme utilizzando altre derivate oggettive in luogo della derivata di Jaumann del tensore degli sforzi di Cauchy. Ricordiamo che la derivata di Jaumann risulta:

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\dot{\sigma}} - \underline{\omega} \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \underline{\omega}. \quad (2)$$

Si consideri innanzitutto la derivata di Jaumann del tensore di Kirchhoff $\underline{\tau} = \underline{J} \underline{\sigma}$:

$$\underline{\dot{\tau}} = \underline{\dot{\tau}} - \underline{\omega} \underline{\tau} + \underline{\tau} \underline{\omega}. \quad (3)$$

Poiché:

$$\underline{\dot{\tau}} = \underline{\dot{J}} \underline{\sigma} = \underline{\dot{J}} \underline{\sigma} + \underline{J} \underline{\dot{\sigma}} = \underline{J} (\text{tr } \underline{D}) \underline{\sigma} + \underline{J} \underline{\dot{\sigma}}, \quad (4)$$

risulta:

$$\underline{\dot{\tau}} = \underline{J} (\underline{\dot{\sigma}} + (\text{tr } \underline{D}) \underline{\sigma}). \quad (5)$$

Dato che:

$$\underline{\sigma} \otimes \underline{I} [\underline{D}] = (\underline{I} \cdot \underline{D}) \underline{\sigma} = (\text{tr } \underline{D}) \underline{\sigma}, \quad (6)$$

Utilizzando la (1) la (5) diventa:

$$\underline{\dot{\tau}} = \underline{b} [\underline{D}], \quad (7)$$

avendo posto:

$$\underline{b} = \underline{J} (\underline{a} + \underline{\sigma} \otimes \underline{I}). \quad (8)$$

Inversamente si ha:

$$\underline{a} = \frac{1}{\underline{J}} \underline{b} - \underline{\sigma} \otimes \underline{I}. \quad (9)$$

In componenti risulta:

$$b^{ijk} = \underline{J} (a^{ijk} + \sigma^{ij} g^{hk}). \quad (10)$$

Si consideri poi la derivata di Lie del tensore di Kirchhoff, nota anche sia come derivata di Oldroyd del tensore di Kirchhoff che come derivata di Truesdell del tensore

di Cauchy :

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \underline{\underline{L}} \underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{L}}^T. \quad (11)$$

Poichè $\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\omega}}$ e $\underline{\underline{L}}^T = \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{\omega}}$ dalla (11) si ottiene:

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{D}}. \quad (12)$$

Poichè:

$$(\underline{\underline{D}} \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{D}})^{ij} = g^{ih} \tau^{jk} D_{hk} + \tau^{ih} g^{jk} D_{hk}, \quad (13)$$

risulta:

$$\underline{\underline{D}} \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{D}} = (\underline{\underline{I}} \boxtimes \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\epsilon}} \boxtimes \underline{\underline{I}}) [\underline{\underline{D}}] = \underline{\underline{C}}' [\underline{\underline{D}}]. \quad (14)$$

Il tensore del quarto ordine :

$$\underline{\underline{C}}' = \underline{\underline{I}} \boxtimes \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\epsilon}} \boxtimes \underline{\underline{I}}, \quad (15)$$

$$\underline{\underline{C}}'^{ijkl} = g^{ih} \tau^{jk} + \tau^{ih} g^{jk}, \quad (16)$$

è evidentemente simmetrico.

La relazione (12), assieme alla (7) e alla (14)

conduce alla seguente forma della equazione costitutiva ipoplastica:

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{C}} [\underline{\underline{D}}]. \quad (17)$$

Le relazioni tra i tensori $\underline{\underline{b}}$ e $\underline{\underline{C}}$ di ipoplasticità sono:

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{b}} - \underline{\underline{C}}', \quad \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{C}}'. \quad (18)$$

La domanda che ora sorge è la seguente. Se si vuole che l'equazione costitutiva ipoplastica sia compatibile con la iperelasticità, quali o quali dei tensori di ipoplasticità $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$ e $\underline{\underline{C}}$ devono essere simmetrici? È immediato rispondere che non possono esserlo tutti e tre, per via della relazione (9) tra $\underline{\underline{a}}$ e $\underline{\underline{b}}$. Infatti in generale $\underline{\underline{C}} \boxtimes \underline{\underline{I}}$ non è simmetrico e quindi se $\underline{\underline{a}}$ è simmetrico non può esserlo $\underline{\underline{b}}$ e viceversa. La relazione (18) afferma invece che $\underline{\underline{b}}$ e $\underline{\underline{C}}$ sono entrambi simmetrici oppure non lo sono entrambi, essendo $\underline{\underline{C}}'$ simmetrico.

2.4 Relazioni incrementali iperelastiche

Si consideri la relazione incrementale iperelastica:

$$\underline{\dot{S}} = \mathcal{C} [\underline{\dot{E}}], \quad (19)$$

dove il tensore elastico $\mathcal{C}$ possiede sia le simmetrie minori che quelle maggiori. Ricordiamo che:

$$\underline{S} = \underline{F}^{-1} \underline{\mathcal{C}} \underline{F}^{-T}, \quad (20)$$

e che quindi:

$$\begin{aligned} \underline{F} \underline{\dot{S}} \underline{F}^T &= \underline{F} \underline{\dot{F}^{-1} \mathcal{C} F^{-T}} \underline{F}^T = \\ &= \underline{\dot{\mathcal{C}}} + \underline{\mathcal{C}} \underline{\dot{F}^{-T}} \underline{F}^T + \underline{F} \underline{\dot{F}^{-1}} \underline{\mathcal{C}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Poiché:

$$\underline{F} \underline{F}^{-1} = \underline{I} \Rightarrow \underline{\dot{F}} \underline{F}^{-1} = -\underline{F} \underline{\dot{F}^{-1}}$$

e quindi:

$$\underline{F} \underline{\dot{F}^{-1}} = -\underline{L}, \quad (22)$$

la (21) diventa:

$$\underline{F} \underline{\dot{S}} \underline{F}^T = \underline{\dot{\mathcal{C}}}. \quad (23)$$

Tenendo poi conto che:

$$\underline{\dot{E}} = \underline{F}^T \underline{D} \underline{F}, \quad (24)$$

dalla (19) si ottiene:

$$\underline{\dot{\mathcal{C}}} = \underline{F} \left(\mathcal{C} [\underline{F}^T \underline{D} \underline{F}] \right) \underline{F}^T. \quad (25)$$

In componenti risulta:

$$\dot{\mathcal{C}}^{ij} = F_{\mathbf{I}}^i F_{\mathbf{J}}^j F_{\mathbf{H}}^h F_{\mathbf{K}}^k \mathcal{C}^{\mathbf{IJKH}} D_{hk}. \quad (26)$$

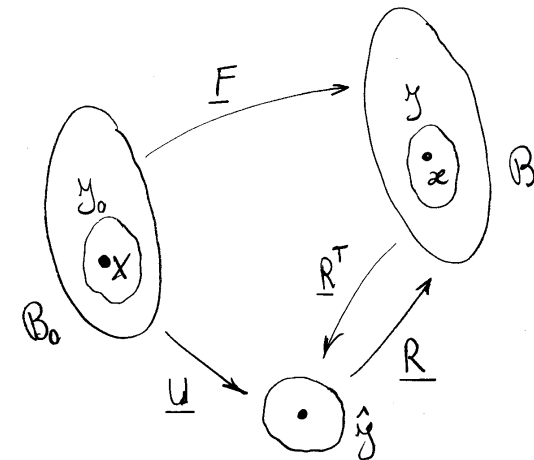
La relazione (25) è nella forma (17). Quindi se il tensore iperelastico $\mathcal{C}$ che compare nella (17) proviene da un legame costitutivo iperelastico, deve essere fornito dalla relazione:

$$\mathcal{C}^{ijkl} = F_{\mathbf{I}}^i F_{\mathbf{J}}^j F_{\mathbf{H}}^h F_{\mathbf{K}}^k \mathcal{C}^{\mathbf{IJKH}}. \quad (27)$$

Poiché $\mathcal{C}$ ha la simmetria maggiore anche il tensore elastico spaziale $\mathcal{C}$ deve possedere tale simmetria. Ne consegue che anche la matrice $\mathbb{H}$ possiede la simmetria maggiore mentre tale non è il caso della matrice $\mathbb{A}$, relativa alla derivata di Jaumann del tensore di Cauchy. In ultimo si osserva che la (27) definisce il pull-back del tensore covariante $\mathcal{C}$ di elasticità.

2.5 Relazioni incrementali nella configurazione ruotata

La decomposizione polare $\underline{F} = \underline{R} \underline{U}$ permette di definire una configurazione locale ruotata $\hat{\mathcal{Y}}$ dell'intorno di un punto X . Tale configurazione è individuata, a partire dalla configurazione di riferimento $\mathcal{B}_0$, tramite il tensore destro di stretch $\underline{U}$. Poiché $\underline{R}^T = \underline{R}^{-1}$ esiste un solo possibile pull-back sulla configurazione ruotata.



Il pull-back del tensore di Kirchhoff $\underline{\mathbb{I}}$ è e del tensore di stretching (velocità di deformazione) $\underline{\mathbb{D}}$

risultano:

$$\hat{\underline{\epsilon}} = \underline{R}^T \underline{\epsilon} \underline{R}, \quad \hat{\underline{D}} = \underline{R}^T \underline{D} \underline{R}. \quad (1)$$

Nel riferimento ruotato si istruisce una relazione incrementale del tipo:

$$\dot{\hat{\underline{\epsilon}}} = \mathbb{D}[\hat{\underline{D}}]. \quad (2)$$

Poiché $\underline{\epsilon}$ è oggettivo ne deriva che $\hat{\underline{\epsilon}}$ è invariante e che quindi il push-forward di $\dot{\hat{\underline{\epsilon}}}$ è un tensore oggettivo, detto derivata di Green-McInnis-Naghdi:

$$\begin{aligned} \underline{\overset{\square}{\epsilon}} &= \underline{R} \overline{\dot{\underline{R}^T \underline{\epsilon} \underline{R}}} \underline{R}^T \\ &= \dot{\underline{\epsilon}} + \underline{R} \underline{\dot{\underline{R}^T}} \underline{\epsilon} + \underline{\epsilon} \underline{\dot{\underline{R}}} \underline{R}^T. \end{aligned} \quad (3)$$

Introducendo nella (3) la velocità angolare $\underline{\Omega}$:

$$\underline{\Omega} = \underline{\dot{\underline{R}}} \underline{R}^T, \quad (4)$$

tenendo conto che $\underline{\Omega}$ è emisimmetrica, si ottiene:

$$\underline{\overset{\square}{\epsilon}} = \dot{\underline{\epsilon}} - \underline{\Omega} \underline{\epsilon} + \underline{\epsilon} \underline{\Omega}. \quad (5)$$

La struttura della (5) è simile alla relazione che definisce la derivata di Jaumann, a parte la sostituzione della velocità angolare $\underline{\Omega}$ (legata alla rotazione $\underline{R}$ che deriva dalla decomposizione polare) con la velocità di rotazione (lo spin) $\underline{\omega}$ che è la parte emisimmetrica del gradiente spaziale delle velocità. La differenza fondamentale tra tali due derivate è che la derivata di Jaumann $\underline{\overset{\square}{\epsilon}}$ definisce un tensore spaziale indipendente dalla deformazione mentre così non è per la derivata $\underline{\overset{\square}{\epsilon}}$ di Green-McInnis-Naghdi. Infatti $\underline{\overset{\square}{\epsilon}}$ è sì spaziale, ma per via della (3) è legata alla deformazione attraverso il tensore di rotazione $\underline{R}$.

La relazione (2), portata nello spazio, diventa:

$$\underline{\overset{\square}{\epsilon}} = d[\underline{D}], \quad (6)$$

dove:

$$d^{ijkh} = R^i_I R^j_J R^h_H R^k_K \mathbb{D}^{IJKH}, \quad (7)$$

e' il push-forward di $\underline{D}$ dalla configurazione *referred*.

Cerchiamo ora la relazione tra la matrice $\underline{d}$ e quella $\underline{b}$ della relazione incrementale del tipo:

$$\underline{\dot{\tau}} = \underline{b}[\underline{D}]. \quad (8)$$

Poichè:

$$\underline{\dot{\tau}} = \underline{\dot{\tau}} - \underline{\omega} \underline{\tau} + \underline{\tau} \underline{\omega}, \quad (9)$$

si ha:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\tau}} &= \underline{\dot{\tau}} - (\underline{\omega} - \underline{\Omega}) \underline{\tau} + \underline{\tau} (\underline{\omega} - \underline{\Omega}) = \\ &= \underline{d}[\underline{D}] - (\underline{\omega} - \underline{\Omega}) \underline{\tau} + \underline{\tau} (\underline{\omega} - \underline{\Omega}). \end{aligned} \quad (10)$$

Vediamo di ottenere la relazione tra $\underline{\Omega}$ e $\underline{\omega}$.

Poichè:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{F}} &= \underline{\dot{R}} \underline{U} + \underline{R} \underline{\dot{U}} = (\underline{\dot{R}} \underline{R}^T) \underline{R} \underline{U} + \underline{R} \underline{\dot{U}} = \\ &= (\underline{\Omega} + \underline{R} \underline{\dot{U}} \underline{F}^{-1}) \underline{F} = \\ &= (\underline{\Omega} + \underline{R} (\underline{\dot{U}} \underline{U}^{-1}) \underline{R}^T) \underline{F}, \end{aligned} \quad (11)$$

risulta:

$$\underline{L} = \underline{\dot{F}} \underline{F}^{-1} = \underline{\Omega} + \underline{R} (\underline{\dot{U}} \underline{U}^{-1}) \underline{R}^T, \quad (12)$$

e quindi, estraendo le parti emisimmetrica e simmetrica:

$$\underline{\omega} - \underline{\Omega} = \frac{1}{2} \underline{R} (\underline{\dot{U}} \underline{U}^{-1} - \underline{U}^{-1} \underline{\dot{U}}) \underline{R}^T. \quad (13)$$

$$\underline{D} = \frac{1}{2} \underline{R} (\underline{\dot{U}} \underline{U}^{-1} + \underline{U}^{-1} \underline{\dot{U}}) \underline{R}^T \quad (14)$$

Se si moltiplicano queste due relazioni per $\underline{V} = \underline{R} \underline{U} \underline{R}^T$ e si sommano si ottiene:

$$\underline{\dot{V}} = \underline{R} \underline{\dot{U}} \underline{R}^T = \underline{D} \underline{V} + (\underline{\omega} - \underline{\Omega}) \underline{V}. \quad (15)$$

La soluzione di tale problema, senza entrare in dettagli,

risulta:

$$\begin{aligned} \underline{\omega} - \underline{\Omega} &= \frac{1}{V_I V_{II} - V_{III}} \left\{ V_I^2 (\underline{V} \underline{D} - \underline{D} \underline{V}) + \right. \\ &\quad \left. - V_I (\underline{B} \underline{D} - \underline{D} \underline{B}) + \underline{B} \underline{D} \underline{V} - \underline{V} \underline{D} \underline{B} \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

dove V_I , V_{II} e V_{III} sono gli invarianti principali di $\underline{V}$.

mentre $\underline{B}$ è il tensore sinistro di stiramento. Ponendo la (16) nella (10) si ottiene una relazione del tipo:

$$\underline{\dot{\tau}} = d[\underline{D}] + d'[\underline{D}], \quad (17)$$

dove il tensore d' dipende dalla deformazione tramite $\underline{V}$ e $\underline{B}$. Se la (16) la si mette nella forma $\underline{\dot{w}} - \underline{\dot{\Omega}} = d''[\underline{D}]$ risulta:

$$\dot{\tau}_{ij} = \left\{ d^{ijk} - d^{ijk} \tau^{lj} + \tau^{il} g_{lm} g^{jn} d^{mnk} \right\} D_{hk}, \quad (18)$$

e quindi:

$$d^{ijk} = -d^{ijk} \tau^{lj} + \tau^{il} g_{lm} g^{jn} d^{mnk}. \quad (19)$$

La matrice d'' non soddisfa in generale la simmetria maggiore e quindi anche d' . Questo significa che se $\underline{B}$ è simmetrico, come deve essere per avere compatibilità con la iperelasticità, allora d non è simmetrico.