

LEGAME COSTITUTIVO ELASTICO

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile
Università di Trieste
Piazzale Europa 1, Trieste

Trieste, 18 giugno 2005

4.4.8	Trasformata di Legendre	47
4.5	Problema termoelastico	48

Indice

1	Elasticità finita	3
1.1	Lavoro di deformazione	4
1.2	Iperelasticità	5
1.3	Tensori di elasticità	8
1.4	Problema a valori iniziali per la iperelasticità	11
2	Elasticità finita isotropa	15
2.1	Simmetrie del materiale	15
2.2	Iperelasticità isotropa	17
2.3	Teorema di rappresentazione	19
2.4	Rappresentazione del tensore di elasticità	22
2.5	Esempi di relazioni costitutive iperelastiche	24
2.6	Appendice: Invarianti di un tensore doppio	25
3	Principi variazionali in elasticità	29
3.1	Caso statico	29
3.2	Principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale . . .	31
3.3	Caso dinamico	32
3.4	Principio di Hamilton	33
4	Termoelasticità	37
4.1	Assunzioni costitutive termomeccaniche	37
4.2	Assunzioni costitutive termoelastiche	40
4.3	Energia libera di Helmholtz	41
4.4	Osservazioni	44
4.4.1	Derivata dell'energia libera	44
4.4.2	Caso puramente elastico	44
4.4.3	Bilancio dell'energia	44
4.4.4	Materiale semplice elastico	45
4.4.5	Principio di indifferenza materiale	45
4.4.6	Flusso di calore	46
4.4.7	Dipendenze costitutive dell'energia libera	46

Capitolo 1

Elasticità finita

"Un materiale è elastico se le storie del moto che conducono alla stessa configurazione finale sono equivalenti. In altre parole, lo sforzo interno dipende solo dalla configurazione finale e non dal modo in cui tale configurazione è raggiunta".

Un'equazione costitutiva elastica sarà allora una mappa del tipo:

$$\hat{S} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sym}(B_0), \quad \phi \mapsto S = \hat{S}(\phi) \quad (1)$$

dove $\mathcal{C}$ rappresenta l'insieme delle possibili configurazioni:

$$\mathcal{C} = \{ \phi \mid \phi : B_0 \rightarrow \mathcal{E} \},$$

$\underline{S}$ è il secondo tensore di Piola-Kirchhoff e $\text{Sym}(B_0)$ indica l'insieme dei campi tensoriali simmetrici

definiti nella configurazione di riferimento.

Nel caso di un materiale semplice elastico la tensione $\underline{S}$ dipende dalla configurazione ϕ tramite il tensore destro di Cauchy-Green $\underline{C}$ oppure tramite il tensore di deformazione di Green-Lagrange $\underline{E}$:

$$\underline{S}(X) = \hat{\underline{S}}(X, \underline{C}(X)) \quad \text{oppure} \quad \underline{S}(X) = \hat{\underline{S}}(X, \underline{E}(X)). \quad (2)$$

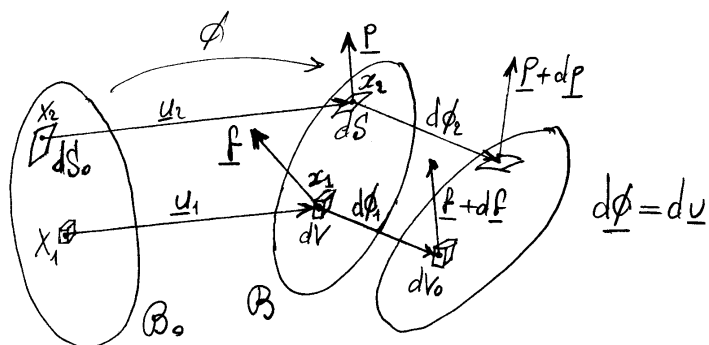
Poiché un materiale elastico non è necessariamente semplice, per il momento si farà riferimento al legame più generale $\underline{S} = \hat{\underline{S}}(\phi)$, al quale va naturalmente imposta la localizzazione spaziale. Si ricordi che in tale notazione $\underline{S}$ è il campo tensoriale del secondo tensore di Piola-Kirchhoff che corrisponde tramite la mappa $\hat{S}$ alla deformazione ϕ , e come campo tensoriale può essere calcolato in un generico punto materiale X per fornire il secondo tensore di Piola-Kirchhoff che definisce la tensione

nell'intorno del punto X :

$$\underline{S}(X) = \hat{S}[\phi](X). \quad (3)$$

1.1 Lavoro di deformazione

"Il lavoro di deformazione rappresenta il lavoro che le forze applicate al corpo compiono per effetto degli spostamenti provocati dalle stesse forze, quando queste siano applicate in modo quasi statico".



L'incremento del lavoro di deformazione dL_d , provocato dagli incrementi $d\underline{p}$ e $d\underline{f}$ delle forze di superficie e

di volume rispettivamente, vale:

$$dL_d = \int_{\partial B_0} \underline{p} \cdot d\underline{u} dS_0 + \int_{B_0} \underline{f} \cdot d\underline{u} dV_0, \quad (4)$$

dove $d\underline{u}$ è l'incremento dello spostamento dovuto all'incremento delle forze, e dove è sottinteso che $\underline{p}$ e $\underline{f}$ sono per unità, rispettivamente, di superficie e di volume indeformati. Per il principio dei lavori virtuali (caso statico) risulta:

$$dL_d = \int_{B_0} \underline{S} \cdot d\underline{E} dV_0 = \frac{1}{2} \int_{B_0} \underline{S} \cdot d\underline{C} dV_0, \quad (5)$$

dove $\underline{S}$ è il secondo tensore di Piola-Kirchhoff in equilibrio con le forze $\underline{p}$ e $\underline{f}$, mentre $d\underline{E}$ è l'incremento del tensore di deformazione di Green-Lagrange e $d\underline{C}$ quello del tensore destro di Cauchy-Green dovuti all'incremento $d\phi$ del moto.

1.2 Iperelasticità

La relazione (4) può essere integrata per un qualunque storia di carico che porta il corpo da una configurazione B_1 a una configurazione B_2 . In generale il lavoro di deformazione così calcolato dipenderà dalla storia che collega B_1 a B_2 .

"Un materiale è iperelastico se il lavoro di deformazione dipende solo dalle configurazioni iniziale e finale."

Se il lavoro di deformazione non dipende dal percorso esiste una funzione $W(\phi)$ tale che:

$$L_d(B_1, B_2) = W(\phi_2) - W(\phi_1), \quad (6)$$

detta energia elastica di deformazione.

Ad ogni singolo volume V_0 del corpo compete una quota $W(\phi, V_0)$ dell'energia globale che dipende dalla

restrizione di ϕ al volume V_0 . L'energia elastica di deformazione per unità di volume resta allora definita dalla relazione:

$$w = \lim_{V_0 \rightarrow X} \frac{W(\phi, V_0)}{V_0}, \quad (7)$$

nell'ipotesi che il limite a secondo membro esista.

Per ogni deformazione ϕ risulta così definito un campo scalare $w = \hat{w}(\phi)$ il cui valore puntuale è fornito dalla (7). La relazione (5) afferma l'esistenza dell'incremento dw di tale campo scalare in corrispondenza di un incremento $d\phi$ della deformazione:

$$dw = \underline{S} \cdot d\underline{E} = \frac{1}{2} \underline{S} \cdot d\underline{C}. \quad (8)$$

dove $d\underline{E}$ e $d\underline{C}$ sono gli incrementi, corrispondenti a $d\phi$, dei tensori di deformazione di Green-Lagrange e destro di Cauchy-Green, mentre $\underline{S}$ è il campo tensoriale

dal secondo tensore di Piola-Kirchhoff corrispondente alla deformazione ϕ .

La (8) impone al valore locale di w di dipendere da ϕ tramite il valore locale di $\underline{E}$, oppure $\underline{C}$:

$$w(X) = \hat{w}(X, \underline{E}(X)) \quad \text{oppure} \quad w = \hat{w}(X, \underline{C}(X)), \quad (9)$$

mentre $\underline{S}'$ risulta dato dalla relazione differenziale:

$$\underline{S}' = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \underline{E}}, \quad \text{oppure} \quad \underline{S}' = 2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial \underline{C}}. \quad (10)$$

Poiché w è funzione di ϕ tramite i valori locali di $\underline{E}$, oppure di $\underline{C}$, così risulta per $\underline{S}'$:

$$\underline{S}'(X) = \hat{\underline{S}}'(X, \underline{E}(X)) \quad \text{oppure} \quad \underline{S}'(X) = \hat{\underline{S}}'(X, \underline{C}(X)). \quad (11)$$

Un materiale iperelastico risulta dunque essere necessariamente un materiale semplice elastico.

La funzione scalare w , energia elastica di deformazione per unità di volume, quale funzione di $\underline{E}$ soddisfa automaticamente l'indifferenza materiale. In luogo della relazione (5), sempre per il principio dei lavori virtuali ma relativo al primo tensore di Piola-Kirchhoff $\underline{P}$ oppure al tensore degli sforzi di Cauchy $\underline{\sigma}$, si può scrivere:

$$dL_d = \int_{V_0} \underline{P} \cdot d\underline{E} dV_0 = \int_{V_0} \underline{P} \cdot d\underline{H} dV_0, \quad (12)$$

oppure:

$$dL_d = \int_V \underline{\sigma} \cdot \underline{E}(d\phi) dV, \quad (13)$$

dove $d\underline{E}$ e $d\underline{H}$ sono gli incrementi dei gradienti della deformazione e degli spostamenti corrispondenti all'incremento $d\phi$ della deformazione, mentre $\underline{E}(d\phi)$ rappresenta il tensore lineare della deformazione associato a $d\phi$:

$$\underline{E}(d\phi) = \frac{1}{2} \left\{ \text{grad } d\phi + (\text{grad } d\phi)^T \right\}. \quad (14)$$

Un tensore $\underline{L}$ il cui incremento $d\underline{L}$ corrispondente a $d\phi$ ugualia $\underline{E}(d\phi)$ viene detto tensore logaritmico della deformazione. Poiché in generale un tale tensore non esiste, la forma (13) del lavoro di deformazione conduce alla seguente relazione per l'incremento dell'energia elastica di deformazione per unità di volume:

$$d\underline{w} = \underline{\sigma} \cdot \underline{E}(d\phi), \quad (15)$$

ma da tale relazione non è possibile dedurre una forma spaziale dell'energia w . Invece la forma (12) del lavoro di deformazione conduce alla relazione:

$$d\underline{w} = \underline{P} \cdot d\underline{F} = \underline{P} \cdot d\underline{H}. \quad (16)$$

Ne risulta che w può essere considerata funzione di $\underline{F}$, oppure di $\underline{H}$, e in tale forma genera per differenziazione il primo tensore di Piola-Kirchhoff:

$$\underline{P} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \underline{F}}, \quad \text{oppure} \quad \underline{P} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \underline{H}}. \quad (17)$$

La forma $w = \hat{w}(\underline{F})$ oppure $w = \hat{w}(\underline{H})$ non soddisfa automaticamente l'indifferenza materiale. A tale fine occorre che il valore di w in un dato punto X sia costante su tutti i valori di $\underline{F}$, in tale punto, che originano lo stesso tensore $\underline{C}$:

$$\hat{w}(X, \underline{F}_1(X)) = \hat{w}(X, \underline{F}_2(X)), \quad (18)$$

$$\text{se } \underline{F}_1^T(X) \underline{F}_1(X) = \underline{F}_2^T(X) \underline{F}_2(X).$$

Diagramma di Tonti nel caso $w = \hat{w}(\underline{F})$:

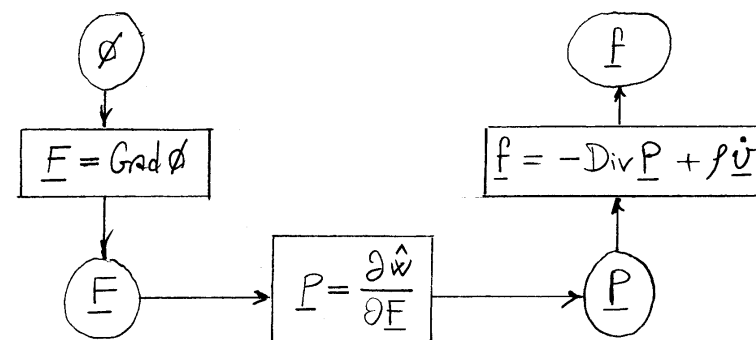
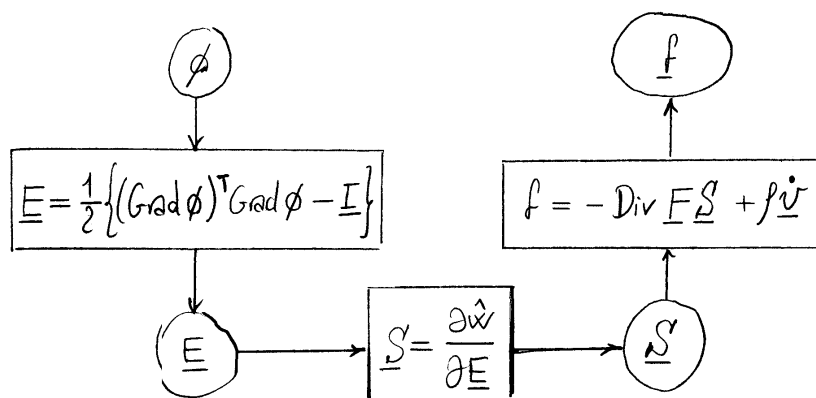


Diagramma di Tonti nel caso $w = \hat{w}(\underline{E})$:



1.3 Tensori di elasticità

I tensori di elasticità sono gli operatori lineari che legano l'incremento di deformazione all'incremento di tensione. Relativamente al legame $\underline{S} = \hat{\underline{S}}(\underline{E})$, tra secondo tensore di Piola-Kirchhoff $\underline{S}$ e tensore della deformazione di Green-Lagrange $\underline{E}$, si può scrivere:

$$d\underline{S} = \frac{\partial \hat{\underline{S}}}{\partial \underline{E}} [d\underline{E}] , \quad (19)$$

dove $\partial \hat{\underline{S}} / \partial \underline{E}$ rappresenta il gradiente di $\hat{\underline{S}}$ rispetto ad $\underline{E}$ e quindi risulta una trasformazione lineare che agli incrementi $d\underline{E}$, che sono dei tensori doppi simmetrici, associa la parte lineare $d\underline{S}$ dell'incremento di $\underline{S}$ (ancora un tensore doppio simmetrico). Dunque:

$$\frac{\partial \hat{\underline{S}}}{\partial \underline{E}} : \text{Sym} \rightarrow \text{Sym} . \quad (20)$$

Si usa fare riferimento allo estensione $\mathbb{E}$ di $\partial \hat{\underline{S}} / \partial \underline{E}$ a tutto Lin tale che :

$$\mathbb{E}[\underline{W}] = \underline{0} \quad \text{per ogni } \underline{W} \in \text{Skw} . \quad (21)$$

Dunque $\mathbb{E}$ risulta il seguente tensore del quarto ordine:

$$\mathbb{E} : \text{Lin} \rightarrow \text{Lin}, \quad \underline{A} \mapsto \frac{\partial \hat{\underline{S}}}{\partial \underline{E}} \left[\frac{1}{2}(\underline{A} + \underline{A}^T) \right]. \quad (22)$$

L'equazione incrementale (19) diventa:

$$d\underline{S} = \mathbb{E}[d\underline{E}], \quad dS_{IJ} = \mathbb{E}_{IJKK} dE_{KK} . \quad (23)$$

Poiché $\underline{S}$ è simmetrico è immediato che deve risultare:

$$\mathbb{E}_{IJKH} = \mathbb{E}_{JIHK}. \quad (24)$$

Risulta inoltre:

$$\mathbb{E}_{IJKH} = \mathbb{E}_{IJKH}, \quad (25)$$

come si ottiene dalla (21) assumendo per $\underline{W}$ un tensore del tipo

$$W = \begin{matrix} & & k & \\ H & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Le (24) e (25) sono note come simmetrie minori del tensore di elasticità $\mathbb{E}$.

Analogamente all'estensione $\mathbb{E}$ di $\partial \hat{\underline{S}} / \partial \underline{E}$, è possibile estendere a tutto Lin il legame costitutivo $\underline{S}' = \hat{\underline{S}}(\underline{E})$, in generale non lineare, ponendo:

$$\hat{\underline{S}}(\underline{A}) = \hat{\underline{S}}\left[\frac{1}{2}(\underline{A} + \underline{A}^T)\right], \quad (26)$$

cioè valutando $\hat{\underline{S}}$ sulla parte simmetrica del generico tensore $\underline{A}$. Relativamente a tale estensione, le componenti di $\mathbb{E}$ possono valutarsi come segue:

$$\mathbb{E}_{IJKH} = \frac{\partial \hat{S}_{IJ}}{\partial A_{HK}}. \quad (27)$$

Dalla relazione costitutiva $\underline{S} = \partial \hat{W} / \partial \underline{E}$ si ottiene:

$$\frac{\partial \hat{\underline{S}}}{\partial \underline{E}} = \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \underline{E} \partial \underline{E}}. \quad (28)$$

Se la dipendenza di W da $\underline{E}$ è estesa a tutto Lin, analogamente alla (26):

$$\hat{W}(\underline{A}) = \hat{W}\left(\frac{1}{2}(\underline{A} + \underline{A}^T)\right), \quad (29)$$

Le componenti di $\mathbb{E}$ risultano:

$$\mathbb{E}_{IJKH} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial A_{IJ} \partial A_{HK}}, \quad (30)$$

e ne deriva la simmetria maggiore :

$$\mathbb{E}_{IJKH} = \mathbb{E}_{HKIJ} . \quad (31)$$

La relazione costitutiva $\underline{P} = \hat{\underline{P}}(\underline{E})$, tra primo tensore di Piola-Kirchhoff e gradiente della deformazione, definisce un secondo tensore di elasticità $\mathbb{A}$:

$$d\underline{P} = \mathbb{A} [d\underline{E}] , \quad (32)$$

che risulta essere una trasformazione lineare tra spazi di tensori a due punti. In componenti cartesiane ortogonali si ha:

$$A_{iIjJ} = \frac{\partial \hat{P}_{iI}}{\partial F_{jJ}} . \quad (33)$$

L'esistenza dell'energia elastica di deformazione $\hat{W}$ tale che $\underline{P} = \partial \hat{W} / \partial \underline{E}$ conduce all'espressione:

$$\mathbb{A} = \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \underline{E} \partial \underline{E}} , \quad A_{iIjJ} = \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial F_{iI} \partial F_{jJ}} , \quad (34)$$

e alla simmetria maggiore di $\mathbb{A}$:

$$A_{iIjJ} = A_{jJiI} . \quad (35)$$

Elaborando la relazione:

$$A_{iIjJ} = \frac{\partial \hat{P}_{iI}}{\partial F_{jJ}} = \frac{\partial}{\partial F_{jJ}} \left(\sum_H F_{iH} \hat{S}_{HI} \right), \quad (36)$$

si perviene alla relazione tra $\mathbb{A}$ e $\mathbb{E}$:

$$A_{iIjJ} = \sum_{LM} \hat{S}_{LM} \frac{\partial^2 E_{LM}}{\partial F_{iI} \partial F_{jJ}} + \sum_{RHL M} E_{RHL M} \frac{\partial E_{RH}}{\partial F_{iI}} \frac{\partial E_{LM}}{\partial F_{jJ}} . \quad (37)$$

Infatti risulta:

$$\begin{aligned} A_{iIjJ} &= \sum_H \left(\delta_{ij} \delta_{HI} \hat{S}_{HI} + F_{iH} \frac{\partial \hat{S}_{HI}}{\partial F_{jJ}} \right) \\ &= \delta_{ij} \hat{S}_{IJ} + \sum_{HLM} F_{iH} \frac{\partial \hat{S}_{HI}}{\partial E_{LM}} \frac{\partial E_{LM}}{\partial F_{jJ}} . \end{aligned}$$

Poiché :

$$E_{LM} = \frac{1}{2} \left(\sum_m F_{mL} F_{mM} - \delta_{LM} \right),$$

risulta :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{LM}}{\partial F_{jJ}} &= \frac{1}{2} \sum_m \left(\delta_{jm} \delta_{JL} F_{mM} + \delta_{jm} \delta_{JM} F_{mL} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta_{JL} F_{jM} + \delta_{JM} F_{jL} \right), \end{aligned}$$

ed anche :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_{LM}}{\partial F_{jJ} \partial F_{iI}} &= \frac{1}{2} \left(\delta_{JL} \delta_{ij} \delta_{IM} + \delta_{JM} \delta_{ij} \delta_{IL} \right) \\ &= \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(\delta_{JL} \delta_{IM} + \delta_{JM} \delta_{IL} \right). \end{aligned}$$

Si ottiene allora, sfruttando le simmetrie minori di $\mathbb{E}$:

$$A_{iIjJ} = \delta_{ij} \hat{S}_{IJ} + \sum_{HM} F_{iH} F_{jM} \mathbb{E}_{IHJM},$$

ed infine, per le simmetrie minori di $\mathbb{E}$ e quella di $\hat{S}$, si ottiene la (37).

1.4 Problema a valori iniziali per la iperelasticità

Ricordiamo l'equazione del moto in forma materiale:

$$\text{Div } \underline{P} + \underline{f} = \rho \dot{\underline{v}}. \quad (1)$$

Si consideri il legame costitutivo $\underline{P} = \hat{\underline{P}}(\underline{F})$. Tenendo conto che localmente tale relazione significa che $\underline{P}(X) = \hat{\underline{P}}(X, \underline{F}(X))$, la divergenza di $\underline{P}$, in componenti cartesiane ortogonali, diventa:

$$\begin{aligned} (\text{Div } \underline{P})_i &= \sum_I \frac{\partial \hat{P}_{iI}}{\partial X_I} + \sum_{IJ} \frac{\partial \hat{P}_{iI}}{\partial F_{jJ}} \frac{\partial F_{jJ}}{\partial X_I} \\ &= (\text{Div}_X \hat{\underline{P}})_i + \sum_{IJ} A_{iIjJ} (\text{Grad } \underline{F})_{jJI}, \quad (2) \end{aligned}$$

dove l'indice X in $\text{Div}_X \hat{\underline{P}}$ ricorda che tale divergenza deve essere fatta a $\underline{F}$ costante.

Posto :

$$(\partial \underline{F})_{iJj} = (\text{Grad } \underline{F})_{jJI}, \quad (3)$$

cioè mettendo al primo posto l'indice di derivazione, si può scrivere:

$$\text{Div } \hat{\underline{P}} = \text{Div}_x \hat{\underline{P}} + \mathbb{A}[\partial \underline{F}]. \quad (4)$$

Se il materiale è omogeneo, la funzione $\hat{\underline{P}}$ dipende da $\underline{X}$ solo attraverso $\underline{F}$:

$$\underline{P}(\underline{X}) = \hat{\underline{P}}(\underline{F}(\underline{X})). \quad (5)$$

Per tale motivo la quantità:

$$\underline{f}_i = \text{Div}_x \hat{\underline{P}}, \quad (6)$$

è detta forza dovuta alla non omogeneità del materiale.

Veniamo al problema a valori iniziali per la iperelasticità. Si tratta di trovare la deformazione $\phi(t)$

tale che soddisfi le condizioni:

1) bilancio:

$$\mathbb{A}[\partial \underline{F}] + \underline{f} + \underline{f}_i = \rho \underline{\dot{v}};$$

2) valori iniziali:

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \underline{v}(0) = \underline{v}_0,$$

dove ϕ_0 e $\underline{v}_0$ sono rispettivamente la configurazione e la velocità iniziale (per $t=0$);

3) valori al contorno:

$$\phi[t](\underline{X}) = x_c(\underline{X}, t) \quad \text{per } \underline{X} \in \partial B_0$$

oppure:

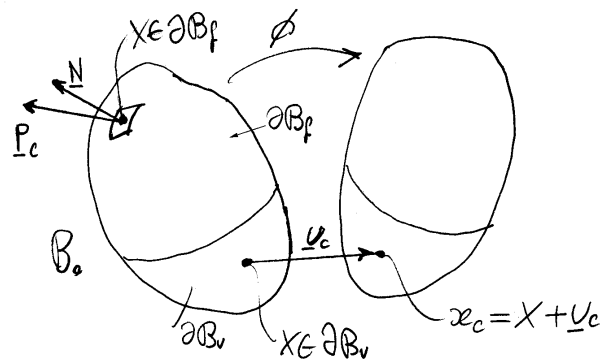
$$\underline{P}(\underline{X}, t) \underline{N} = \underline{p}_c(\underline{X}, t) \quad \text{per } \underline{X} \in \partial B_0$$

oppure:

$$\begin{cases} \phi[t](\underline{X}) = x_c(\underline{X}, t) & \text{per } \underline{X} \in \partial B_v, \\ \underline{P}(\underline{X}, t) \underline{N} = \underline{p}_c(\underline{X}, t) & \text{per } \underline{X} \in \partial B_f, \end{cases}$$

dove $x_c(\underline{X}, t)$ e $\underline{p}_c(\underline{X}, t)$ sono i valori al contorno per la deformazione ϕ e per le forze di superficie $\underline{p}$, e dove:

$$\partial B_v \cap \partial B_f = \emptyset \quad \text{e} \quad \overline{\partial B_v \cup \partial B_f} = \partial B_0.$$



Si suppone nota la funzione costitutiva dell'energia di deformazione w da cui deriva la funzione costitutiva per la tensione interna e quindi il tensore di elasticità A relativo al primo tensore di Piola-Kirchhoff. Ancora, le forze di volume $\underline{f}$ e la massa ρ sono supposte note.

Se si omette la dipendenza dal tempo si ottiene il problema al contorno per la elastostatica:

- 1) $A[\partial F] + \underline{f}_0 + \underline{f}_i = 0$
- 2) Condizioni al contorno per ϕ e $\underline{p}$ (indipendenti dal tempo).

Capitolo 2

Elasticità finita isotropa

2.1 Simmetrie del materiale

Se il materiale presenta delle "simmetrie" si hanno ulteriori semplificazioni della forma del funzionale dell'energia di deformazione $\hat{w}$ e delle quantità che da esso derivano.

Un materiale presenta una simmetria se ad una deformazione simmetrica corrisponde una risposta simmetrica. Poiché nell'idea di simmetria è contenuta l'idea della conservazione delle lunghezze e degli angoli, una simmetria sarà individuata da una trasformazione ortogonale e poiché la simmetria riguarda il materiale tale trasformazione ortogonale riguarda la configurazione B_0 di riferimento, e come tale sarà legata a tale

configurazione.

Dunque, la trasformazione ortogonale $\underline{Q}$ mette in relazione tra loro gli elementi materiali $d\underline{X}$ uscenti da un punto materiale X (spazio tangente in X a B_0). La deformazione in X simmetrica di un'altra tramite $\underline{Q}$ farà corrispondere agli elementi materiali "simmetrici" $\underline{Q}d\underline{X}$ le stesse dilatazioni e gli stessi scorrimenti che la deformazione originaria associa agli elementi $d\underline{X}$. Se $\underline{x}$ e $\underline{t}$ sono due direzioni ortogonali generiche uscenti da X deve dunque risultare:

$$\sqrt{\underline{Q}\underline{x} \cdot \underline{C}^* \underline{Q}\underline{x}} - 1 = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{C} \underline{x}} - 1,$$
$$\frac{\sqrt{\underline{Q}\underline{x} \cdot \underline{C}^* \underline{Q}\underline{t}}}{\sqrt{\underline{Q}\underline{x} \cdot \underline{C}^* \underline{Q}\underline{x}}} = \frac{\sqrt{\underline{x} \cdot \underline{C} \underline{t}}}{\sqrt{\underline{x} \cdot \underline{C} \underline{x}} \sqrt{\underline{t} \cdot \underline{C} \underline{t}}},$$

dove $\underline{C}^*$ è il tensore destro di Cauchy-Green simmetrico di $\underline{C}$. Dalla prima uguaglianza si deduce la relazione:

$$\underline{Q} \underline{v} \cdot \underline{C}^* \underline{Q} \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{C} \underline{v} \quad \text{per ogni } \underline{v} \in \mathcal{V}_X,$$

e quindi dalla seconda si deduce:

$$\underline{Q} \underline{v} \cdot \underline{C}^* \underline{Q} \underline{t} = \underline{v} \cdot \underline{C} \underline{t}$$

per ogni $\underline{v}, \underline{t} \in \mathcal{V}_X$ tali che $\underline{v} \cdot \underline{t} = 0$. In definitiva si ha:

$$\underline{Q}^T \underline{C}^* \underline{Q} = \underline{C},$$

oppure:

$$\underline{C}^* = \underline{Q} \underline{C} \underline{Q}^T.$$

È poi evidente che dalla relazione:

$$\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{C} - \underline{I}),$$

si deduce la seguente espressione del simmetrico $\underline{E}^*$ di $\underline{E}$:

$$\underline{E}^* = \underline{Q} \underline{E} \underline{Q}^T.$$

Per quel che riguarda il secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff, la simmetria richiede che all'elemento d'area simmetrico $\underline{Q} d\underline{A}_0$ corrisponda la forza simmetrica $\underline{Q} d\underline{p}_0$ per cui deve risultare:

$$\underline{Q} d\underline{p}_0 = \underline{S}^* \underline{Q} d\underline{A}_0,$$

e poiché $d\underline{p}_0 = \underline{S} d\underline{A}_0$ se ne ottiene ancora:

$$\underline{S}^* = \underline{Q} \underline{S} \underline{Q}^T.$$

Il funzionale energia di deformazione $\hat{w}$ è simmetrico se si mantiene invariato sotto l'azione di $\underline{Q}$, cioè se:

$$\hat{w}(\underline{x}, \underline{E}^*) = \hat{w}(\underline{x}, \underline{E}),$$

ovverossia se:

$$\hat{w}(\underline{x}, \underline{Q} \underline{E} \underline{Q}^T) = \hat{w}(\underline{x}, \underline{E}).$$

L'insieme $\mathcal{I}_X(\hat{w})$ delle trasformazioni ortogonali che preservano la simmetria di $\hat{w}$ nel punto X costituisce un gruppo (rispetto alla

moltiplicazione tensoriale) ed è detto gruppo delle simmetrie materiali di $\hat{w}$ per il dato materiale elastico.

Infatti se $\underline{Q}_1$ e $\underline{Q}_2$ sono in $\mathcal{I}_X(\hat{w})$ allora risulta:

$$\hat{w}(X, \underline{Q}_1 \underline{Q}_2 \underline{E} \underline{Q}_2^T \underline{Q}_1^T) = \hat{w}(X, \underline{Q}_2 \underline{E} \underline{Q}_2^T) = \hat{w}(X, \underline{E}).$$

e quindi anche $\underline{Q}_1 \underline{Q}_2$ è in $\mathcal{I}_X(\hat{w})$.

Il materiale è poi detto isotropo nel punto X se il relativo gruppo di simmetrie $\mathcal{I}_X$ coincide con l'insieme delle trasformazioni ortogonali:

$$\mathcal{I}_X = \text{Orth}.$$

Infine il materiale è detto isotropo se è isotropo in ogni punto X di B_0 .

2.2 Iperelasticità isotropa

Per un materiale isotropo, $\hat{w}$ è invariante sotto l'azione di una trasformazione ortogonale $\underline{Q} \underline{E} \underline{Q}^T$ di $\underline{E}$. Tali trasformazioni definiscono una relazione di

equivalenza R in Sym :

$$\underline{A}_1 R \underline{A}_2 \iff \underline{A}_1 = \underline{Q} \underline{A}_2 \underline{Q}^T.$$

Lo spazio quoziente Sym/R contiene quasi elementi le classi di equivalenza di Sym :

$$E_q(\underline{A}) = \{ \underline{Q} \underline{A} \underline{Q}^T / \underline{Q} \in \text{Orth} \}.$$

Risulta:

$$\underline{A}_1 = \underline{Q} \underline{A}_2 \underline{Q}^T \iff \text{Spettro}(\underline{A}_1) = \text{Spettro}(\underline{A}_2)$$

dove si è indicato con $\text{Spettro}(\underline{A})$ l'insieme dei valori principali di $\underline{A}$ (reali perché $\underline{A}$ è simmetrico):

$$\text{Spettro}(\underline{A}) = \{ a \in \mathbb{R} / \underline{A} \underline{u} = a \underline{u}, \underline{u} \neq \underline{0} \}.$$

Per un materiale isotropo, $\hat{w}$ è costante nelle classi di equivalenza $E_q(\underline{E})$ e quindi dipende solo dallo spettro di $\underline{E}$. Poiché il legame tra un generico tensore doppio simmetrico $\underline{A}$ e il suo spettro è complesso,

conviene usare gli invarianti principali di $\underline{A}$:

$$I_1(\underline{A}) = \text{tr } \underline{A}$$

$$I_2(\underline{A}) = \frac{1}{2} \{ (\text{tr } \underline{A})^2 - \text{tr}(\underline{A}^2) \}$$

$$I_3(\underline{A}) = \det \underline{A}$$

L'insieme:

$$\mathcal{I}(\underline{A}) = \{ I_1(\underline{A}), I_2(\underline{A}), I_3(\underline{A}) \}$$

è detto lista degli invarianti principali di $\underline{A}$.

Gli invarianti principali sono univocamente determinati dagli autovalori :

$$\begin{cases} I_1(\underline{A}) = a_1 + a_2 + a_3 \\ I_2(\underline{A}) = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 \\ I_3(\underline{A}) = a_1 a_2 a_3 \end{cases} ,$$

e gli autovalori sono univocamente determinati dagli invarianti principali tramite l'equazione caratteristica:

$$\lambda^3 - I_1(\underline{A})\lambda^2 + I_2(\underline{A})\lambda - I_3(\underline{A}) = 0 .$$

Questo significa che se il materiale è isotropo $\hat{\sigma}$ è funzione degli invarianti principali di $\underline{E}$, cioè è funzione di $\mathcal{I}(\underline{E})$.

Occorre notare (teorema di Cayley-Hamilton) che un tensore doppio $\underline{A}$ soddisfa la sua equazione caratteristica, nel senso che :

$$\underline{A}^3 - I_1(\underline{A})\underline{A}^2 + I_2(\underline{A})\underline{A} - I_3(\underline{A})\underline{I} = \underline{0}$$

Si noti inoltre che la funzione costitutiva $\hat{\sigma}(X, \underline{E})$ può essere sostituita da quella equivalente $\hat{\sigma}(X, \underline{\mathcal{I}})$. In tal caso, se la $\hat{\sigma}$ è isotropa sarà funzione degli autovalori di $\underline{\mathcal{I}}$ oppure dei suoi invarianti principali. Il vantaggio che si ha considerando la relazione costitutiva $\hat{\sigma}(X, \underline{\mathcal{I}})$ è che essendo $\underline{\mathcal{I}}$ definito

positivo esiste senz'altro il suo inverso $\underline{C}^{-1}$. In tal caso il secondo invariante di $\underline{C}$ può porsi nella forma:

$$\underline{I}_2 = \det \underline{C} \operatorname{tr} \underline{C}^{-1}.$$

Infatti, in componenti principali, risulta:

$$\begin{aligned} \det \underline{C} \operatorname{tr} \underline{C}^{-1} &= c_1 c_2 c_3 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) \\ &= c_2 c_3 + c_1 c_3 + c_1 c_2. \end{aligned}$$

2.3 Teorema di rappresentazione

Vogliamo ora mostrare che la funzione costitutiva

$\hat{\underline{S}}(X, \underline{C})$ ammette, nel caso di un materiale isotropo,

le seguenti rappresentazioni:

$$\begin{cases} \hat{\underline{S}} = \alpha_0 \underline{I} + \alpha_1 \underline{C}^{-1} + \alpha_2 \underline{C}^{-2} \\ \hat{\underline{S}} = \beta_0 \underline{I} + \beta_1 \underline{C} + \beta_2 \underline{C}^{-1} \\ \hat{\underline{S}} = \gamma_0 \underline{I} + \gamma_2 \underline{C} + \gamma_2 \underline{C}^2 \end{cases},$$

dove i coefficienti $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i=0,1,2$) sono delle funzioni scalari di X e degli invarianti principali di $\underline{C}$.

Infatti, ricordiamo che vale la relazione:

$$\hat{\underline{S}} = 2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial \underline{C}}.$$

e dunque:

$$\hat{\underline{S}} = 2 \left\{ \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{C}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \underline{C}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \underline{C}} \right\}.$$

Risulta:

$$\frac{\partial I_3}{\partial \underline{C}} = \frac{\partial}{\partial \underline{C}} (\det \underline{C})$$

In componenti:

$$\left(\frac{\partial I_3}{\partial \underline{C}} \right)_{ij} = \frac{\partial I_3}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial}{\partial C_{ij}} (e_{hkl} C_{h1} C_{k2} C_{l3}) =$$

$$\begin{aligned}
&= e_{hkl} (\delta_{ih} \delta_{jl} C_{k2} C_{l3} + \delta_{ik} \delta_{jl} C_{h1} C_{l3} + \delta_{il} \delta_{jk} C_{h1} C_{k2}) \\
&= e_{ihk} (\delta_{j1} C_{h2} C_{k3} + \delta_{j2} C_{h3} C_{k1} + \delta_{j3} C_{h1} C_{k2})
\end{aligned}$$

Il termine $e_{ihk} C_{h2} C_{k3}$ rappresenta il cofattore di C_{i1} , che è dato da $(\det \underline{C}) C_{i1}^{-1}$, e analogamente per gli altri due termini:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial I_3}{\partial \underline{C}} \right)_{ij} &= (\det \underline{C}) (\delta_{j1} C_{i1}^{-1} + \delta_{j2} C_{i2}^{-1} + \delta_{j3} C_{i3}^{-1}) \\
&= (\det \underline{C}) \delta_{jh} C_{ih}^{-1} = (\det \underline{C}) C_{ij}^{-1}
\end{aligned}$$

e dunque:

$$\frac{\partial I_3}{\partial \underline{C}} = (\det \underline{C}) \underline{C}^{-1} = I_3 \underline{C}^{-1}$$

Risulta poi:

$$\begin{aligned}
I_2(\underline{C}) &= \frac{1}{2} \{ (\text{tr } \underline{C})^2 - \text{tr}(\underline{C}^2) \} \\
&= \frac{1}{2} (C_{hh} C_{kk} - C_{hk} C_{hk}),
\end{aligned}$$

e dunque:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_2}{\partial C_{ij}} &= \frac{1}{2} (\delta_{ih} \delta_{jh} C_{kk} + \delta_{ik} \delta_{jk} C_{hh}) \\
&\quad - \frac{1}{2} (\delta_{ih} \delta_{jk} C_{hk} + \delta_{ih} \delta_{jk} C_{hk}) \\
&= \delta_{ij} \text{tr } \underline{C} - C_{ij}.
\end{aligned}$$

In definitiva si ha:

$$\frac{\partial I_2}{\partial \underline{C}} = (\text{tr } \underline{C}) \underline{I} - \underline{C} = I_1 \underline{I} - \underline{C}.$$

Infine si ottiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_1}{\partial C_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial C_{ij}} (\text{tr } \underline{C}) \\
&= \frac{\partial}{\partial C_{ij}} (C_{hh}) = \delta_{ih} \delta_{jh} = \delta_{ij},
\end{aligned}$$

e cioè:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \underline{C}} = \underline{I}.$$

La rappresentazione di $\hat{\underline{S}}$ risulta quindi:

$$\hat{\underline{S}} = 2 \left\{ \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial I_1} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_2} I_1 \right) \underline{I} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_2} \underline{C} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_3} I_3 \underline{C}^{-1} \right\},$$

per cui:

$$\begin{cases} \beta_0 = 2 \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial I_1} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_2} I_1 \right) \\ \beta_1 = -2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_2} \\ \beta_3 = 2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_3} I_3 \end{cases}.$$

Inoltre, per il teorema di Cayley-Hamilton:

$$\underline{C}^3 - I_1 \underline{C}^2 + I_2 \underline{C} - I_3 \underline{I} = \underline{0},$$

risulta, moltiplicando per $\underline{C}^{-1}$:

$$I_3 \underline{C}^{-1} = \underline{C}^2 - I_1 \underline{C} + I_2 \underline{I},$$

ed anche, moltiplicando per $\underline{C}^{-2}$:

$$\underline{C} = I_1 \underline{I} - I_2 \underline{C}^{-1} + I_3 \underline{C}^{-2}.$$

Sostituendo nella rappresentazione precedente si ottengono le due ulteriori rappresentazioni:

$$\hat{\underline{S}} = 2 \left\{ \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial I_1} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_2} I_1 + \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_3} I_2 \right) \underline{I} - \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial I_2} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_3} I_1 \right) \underline{C} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_3} \underline{C}^2 \right\}$$

$$\hat{\underline{S}} = 2 \left\{ \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_1} \underline{I} + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial I_2} I_2 + \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_3} I_3 \right) \underline{C}^{-1} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_2} I_3 \underline{C}^{-2} \right\}$$

che forniscono i seguenti valori dei coefficienti γ_i e α_i :

$$\begin{cases} \gamma_0 = 2 \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial I_1} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_2} I_1 + \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_3} I_2 \right) \\ \gamma_1 = -2 \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial I_2} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_3} I_1 \right) \\ \gamma_2 = 2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_3} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = 2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_1} \\ \alpha_1 = 2 \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial I_2} I_2 + \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_3} I_3 \right) \\ \alpha_2 = -2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial I_2} I_3 \end{cases} .$$

2.4 Rappresentazione del tensore di elasticità

Il tensore di elasticità relativo a $\underline{C}$ risulta:

$$\mathbb{D} = \frac{\partial \hat{S}}{\partial \underline{C}} = 2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \underline{C} \partial \underline{C}} ,$$

ed è tale che:

$$\mathbb{D}_{IJKH} = 2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial E_{LM} \partial E_{RS}} \frac{\partial E_{LM}}{\partial C_{IJ}} \frac{\partial E_{RS}}{\partial C_{HK}} ,$$

cioè:

$$\mathbb{D}_{IJKH} = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{IJKH} ,$$

poiché:

$$\frac{\partial E_{LM}}{\partial C_{IJ}} = \frac{1}{2} \delta_{IL} \delta_{JM} \quad e \quad \frac{\partial E_{RS}}{\partial C_{HK}} = \frac{1}{2} \delta_{HR} \delta_{KS} .$$

In definitiva:

$$\mathbb{E}_{IJKH} = 2 \frac{\partial \hat{S}_{IJ}}{\partial C_{HK}} .$$

Sfruttando la rappresentazione di $\hat{S}$ (estesa a tutta Lin):

$$\hat{S}_{IJ} = \delta_0 \delta_{IJ} + \frac{1}{2} \delta_1 (C_{IJ} + C_{JI}) + \frac{1}{2} \delta_2 (C_{IL} C_{LJ} + C_{JL} C_{LI}) ,$$

tenendo conto che:

$$\frac{\partial C_{IJ}}{\partial C_{HK}} = \delta_{IH} \delta_{JK} ,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (C_{IL} C_{LJ})}{\partial C_{HK}} &= \delta_{IH} \delta_{LK} C_{LJ} + \delta_{LH} \delta_{JK} C_{IL} \\ &= \delta_{IH} C_{JK} + \delta_{JK} C_{IH} , \end{aligned}$$

e che, similmente a $\partial \hat{w} / \partial \underline{C}$, si ottiene:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial \underline{C}} = \xi_0^i \underline{I} + \xi_1^i \underline{C} + \xi_2^i \underline{C}^2,$$

dove :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_0^i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial I_1} + \frac{\partial \gamma_i}{\partial I_2} I_1 + \frac{\partial \gamma_i}{\partial I_3} I_2 \\ \xi_1^i = - \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial I_2} + \frac{\partial \gamma_i}{\partial I_3} I_1 \right) \\ \xi_2^i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial I_3} \end{array} \right.$$

si ha infine la rappresentazione di $\mathbb{E}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{IJKH} = & \eta_1 \delta_{IJ} \delta_{HK} + \eta_2 (\delta_{IJ} C_{HK} + C_{IJ} \delta_{HK}) \\ & + \eta_3 (\delta_{IJ} C_{HL} C_{LK} + C_{IL} C_{LJ} \delta_{HK}) \\ & + \eta_4 C_{IJ} C_{HK} + \eta_5 (C_{IJ} C_{HL} C_{LK} + C_{IL} C_{LJ} C_{HK}) \\ & + \eta_6 C_{IL} C_{LJ} C_{HM} C_{MK} + \eta_7 (\delta_{IH} \delta_{JK} + \delta_{IK} \delta_{JH}) \\ & + \eta_8 (\delta_{IH} C_{JK} + \delta_{JK} C_{IH} + \delta_{IK} C_{JH} + \delta_{JH} C_{IK}). \end{aligned}$$

Questa rappresentazione è stata scritta tenendo conto di tutti i termini che si possono presentare (deducibili facilmente dalle espressioni riportate) e che $\mathbb{E}$ deve soddisfare le condizioni di simmetria maggiore e minori. I coefficienti η_i sono funzioni scalari degli invarianti di $\underline{C}$. Sono dunque sufficienti 8 funzioni scalari per individuare le 21 funzioni scalari che definiscono gli elementi di $\mathbb{E}$ (le componenti di $\mathbb{E}$ sono 81, ma per le simmetrie di $\mathbb{E}$ solo 21 sono indipendenti).

L'isotropia riduce quindi da 6 a 3 le componenti indipendenti di $\hat{\underline{S}}$ e da 21 a 8 quelle di $\mathbb{E}$.

2.5 Esempi di relazioni costitutive iperelastiche

Relazione costitutiva isotropa proposta da St. Venant

e Kirchhoff :

$$\hat{\underline{S}} = \lambda (\text{tr } \underline{E}) \underline{I} + 2\mu \underline{E},$$

con $\lambda = \lambda(X)$ e $\mu = \mu(X)$, cioè indipendenti dagli invarianti di $\underline{E}$. Osservare che tale equazione non è lineare. Ne consegue il seguente tensore di elasticità:

$$\mathbb{E}_{IJKL} = \lambda \delta_{IJ} \delta_{KL} + \mu (\delta_{IK} \delta_{JL} + \delta_{IL} \delta_{JK}),$$

che si ottiene derivando l'estensione di $\hat{\underline{S}}$ a tutto Lin:

$$\hat{\underline{S}}_{IJ} = \lambda E_{LL} \delta_{IJ} + \mu (E_{IJ} + E_{JI}).$$

Tale rappresentazione è appropriata solo nel caso di moderate deformazioni.

Relazione costitutiva isotropa proposta da Mooney, Rivlin e Ogden per modellare le gomme.

Si assume quale energia di deformazione w per unità di volume l'espressione:

$$\begin{aligned} w = & \sum_{i=1}^M a_i (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \\ & + \sum_{j=1}^N b_j \{ (\lambda_2 \lambda_3)^{\beta_j} + (\lambda_3 \lambda_1)^{\beta_j} + (\lambda_1 \lambda_2)^{\beta_j} - 3 \} \\ & + h(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3), \end{aligned}$$

dove λ_1, λ_2 e λ_3 sono gli autovalori di $\underline{U} = \sqrt{\underline{C}}$.

Il caso particolare $M=N=1$, $\alpha_i = \beta_i = 2$ e $h=0$

è chiamato materiale di Mooney-Rivlin. Poiché λ_1^2, λ_2^2 e λ_3^2 sono gli autovalori di $\underline{C}$ se ne deduce:

$$w = a(I_1 - 3) + b(I_2 - 3),$$

dove I_1 e I_2 sono i primi due invarianti principali di $\underline{C}$.

Se poi $b=0$ si ottiene il cosiddetto materiale neo-Hookeano :

$$w = a(I_1 - 3).$$

2.6 Appendice: Invarianti di un tensore doppio

Sia $\underline{A}$ un tensore doppio di componenti:

$$\underline{A} \equiv \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix},$$

in un generico sistema di riferimento $Oxyz$.

L'equazione caratteristica per la determinazione dei valori principali di $\underline{A}$ risulta:

$$\det \begin{bmatrix} A_{xx} - \lambda & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} - \lambda & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

cioè

$$\lambda^3 - A_I \lambda^2 + A_{II} \lambda - A_{III} = 0,$$

dove A_I, A_{II}, A_{III} sono gli invarianti di $\underline{A}$,

rispettivamente lineare, quadratico, cubico:

$$A_I = \text{tr } \underline{A} = A_{xx} + A_{yy} + A_{zz},$$

$$A_{II} = A_{xx}A_{yy} + A_{yy}A_{zz} + A_{zz}A_{xx} \\ - A_{xy}A_{yx} - A_{yz}A_{zy} - A_{zx}A_{xz},$$

$$A_{III} = \det \underline{A}.$$

Se $\underline{A}$ è simmetrico, l'equazione caratteristica ha tre radici reali A_1, A_2, A_3 ed è possibile esprimere $\underline{A}$ in componenti nel sistema principale (ortonormale):

$$\underline{A} \equiv \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}.$$

Gli invarianti di $\underline{A}$ valgono quindi:

$$A_I = \text{tr } \underline{A} = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$A_{II} = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1,$$

$$A_{III} = \det \underline{A} = A_1A_2A_3.$$

L'operatore traccia permette di introdurre altri due invarianti di $\underline{A}$, il primo quadratico e il secondo cubico nelle componenti di $\underline{A}$:

$$\text{tr}(\underline{A}^2) = \underline{A} \cdot \underline{A} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2,$$

$$\text{tr}(\underline{A}^3) = A_1^3 + A_2^3 + A_3^3.$$

Questi due invarianti differiscono da A_{II} e da A_{III} . Vediamone le relazioni. In primo luogo:

$$(\text{tr } \underline{A})^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + 2(A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1),$$

e quindi:

$$(\text{tr } \underline{A})^2 = \text{tr}(\underline{A}^2) + 2A_{II}.$$

In secondo luogo:

$$\begin{aligned} (\text{tr } \underline{A})^3 &= A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + 6A_1A_2A_3 \\ &+ 3\{(A_1^2A_2 + A_1A_2^2) + (A_2^2A_3 + A_2A_3^2) + (A_3^2A_1 + A_3A_1^2)\} \\ &= A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + 6A_1A_2A_3 \\ &+ 3\{A_1A_2(A_1 + A_2) + A_2A_3(A_2 + A_3) + A_3A_1(A_3 + A_1)\} \end{aligned}$$

$$= A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 - 3 A_1 A_2 A_3 \\ + 3 \operatorname{tr} \underline{A} (A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_1),$$

avendo utilizzato le relazioni:

$$A_1 + A_2 = \operatorname{tr} \underline{\sigma} - A_3, \quad ,$$

$$A_2 + A_3 = \operatorname{tr} \underline{\sigma} - A_1, \quad ,$$

$$A_3 + A_1 = \operatorname{tr} \underline{\sigma} - A_2.$$

Quindi si ottiene:

$$(\operatorname{tr} \underline{A})^3 = \operatorname{tr}(\underline{A}^3) - 3 \det \underline{A} + 3 A_{\text{II}} \operatorname{tr} \underline{A}.$$

Se il tensore $\underline{A}$ è emisimmetrico, cioè se:

$$\operatorname{tr} \underline{A} = 0,$$

risulta:

$$A_{\text{II}} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\underline{A}^2) = -\frac{1}{2} \underline{A} \cdot \underline{A},$$

$$\det \underline{A} = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\underline{A}^3).$$

Si consideri ora un tensore $\underline{A}$ simmetrico e le

sue parti sferica e deviatorica:

$$\underline{S} = \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \underline{A}) \underline{I},$$

$$\underline{D} = \underline{A} - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \underline{A}) \underline{I}.$$

Cerchiamo le relazioni tra gli invarianti di $\underline{D}$ e quelli di $\underline{A}$. Vale la relazione:

$$\underline{D}^2 = \underline{A}^2 - \frac{2}{3} (\operatorname{tr} \underline{A}) \underline{A} + \frac{1}{9} (\operatorname{tr} \underline{A})^2 \underline{I}.$$

Inoltre:

$$\underline{D}^3 = \underline{A}^3 - \frac{2}{3} (\operatorname{tr} \underline{A}) \underline{A}^2 + \frac{1}{9} (\operatorname{tr} \underline{A})^2 \underline{A} \\ - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \underline{A}) \underline{A}^2 + \frac{2}{9} (\operatorname{tr} \underline{A})^2 \underline{A} - \frac{1}{27} (\operatorname{tr} \underline{A})^3 \underline{I},$$

cioè:

$$\underline{D}^3 = \underline{A}^3 - (\operatorname{tr} \underline{A}) \underline{A}^2 + \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \underline{A})^2 \underline{A} - \frac{1}{27} (\operatorname{tr} \underline{A})^3 \underline{I}.$$

Quindi, tenendo conto che $\operatorname{tr} \underline{I} = 3$:

$$\operatorname{tr}(\underline{D}^2) = \operatorname{tr}(\underline{A}^2) - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \underline{A})^2,$$

$$\operatorname{tr}(\underline{D}^3) = \operatorname{tr}(\underline{A}^3) - (\operatorname{tr} \underline{A}) \operatorname{tr}(\underline{A}^2) + \frac{2}{9} (\operatorname{tr} \underline{A})^3.$$

Infine, tenendo conto che $\underline{D}$ è deviatorico:

$$\underline{D}_{II} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\underline{D}^2) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\underline{A}^2) + \frac{1}{6} (\operatorname{tr} \underline{A})^2,$$

$$\det \underline{D} = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\underline{A}^3) - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \underline{A}) \operatorname{tr}(\underline{A}^2) + \frac{2}{27} (\operatorname{tr} \underline{A})^3.$$

Queste relazioni, tenendo conto che

$$\operatorname{tr}(\underline{A}^2) = (\operatorname{tr} \underline{A})^2 - 2 A_{II},$$

$$\operatorname{tr}(\underline{A}^3) = (\operatorname{tr} \underline{A})^3 + 3 \det \underline{A} - 3 A_{II} \operatorname{tr} \underline{A},$$

si possono mettere nella forma:

$$\underline{D}_{II} = A_{II} - \frac{1}{2} (\operatorname{tr} \underline{A})^2 + \frac{1}{6} (\operatorname{tr} \underline{A})^2,$$

$$\begin{aligned} \det \underline{D} &= \det \underline{A} + \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \underline{A})^3 - A_{II} \operatorname{tr} \underline{A} \\ &\quad - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \underline{A})^3 + \frac{2}{3} A_{II} \operatorname{tr} \underline{A} + \frac{2}{27} (\operatorname{tr} \underline{A})^3, \end{aligned}$$

e infine:

$$\underline{D}_{II} = A_{II} - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \underline{A})^2,$$

$$\det \underline{D} = \det \underline{A} - \frac{1}{3} A_{II} (\operatorname{tr} \underline{A}) + \frac{2}{27} (\operatorname{tr} \underline{A})^3.$$

Capitolo 3

Principi variazionali in elasticità

3.1 Caso statico

Si vuole esprimere il problema al contorno per la elastostatica in forma variazionale, o, in altri termini, in forma debole.

Ricordiamo che nel problema della elastostatica in forma forte si ricerca una deformazione ϕ tale che $\text{Div } \underline{P} + \underline{f}^* = \underline{0}$ nella configurazione B_0 di riferimento, dove $\underline{P}$ è ottenuto da ϕ tramite il legame costitutivo, e che soddisfi la condizione al contorno $\phi = \phi_u$ nella porzione di contorno ∂B_u e la condizione $\underline{P} \underline{N} = \underline{p}_f$ sulla porzione ∂B_f .

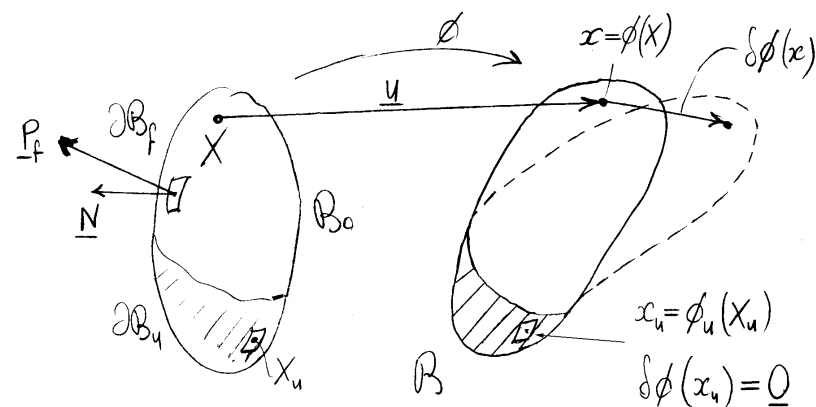
Lo spazio delle configurazioni $\mathcal{C}$ rappresenta l'in-

sieme delle deformazioni ϕ che soddisfanno le condizioni al contorno su ∂B_u :

$$\mathcal{C} = \{ \phi : B_0 \rightarrow \mathcal{E} / \phi = \phi_u \text{ su } \partial B_u \}.$$

Lo spazio delle variazioni $\mathcal{V}_\phi$, associato alla configurazione ϕ , è l'insieme dei campi vettoriali, indicati con $\delta\phi$, tali che $\phi + \delta\phi$ sia ancora una configurazione di B_0 . Quindi $\delta\phi$ soddisfa le condizioni omogenee su ∂B_u :

$$\delta\phi = \underline{0} \quad \text{su } \partial B_u.$$



Si consideri il funzionale:

$$\mathcal{J}(\phi, \delta\phi) = \int_{B_0} \underline{P} \cdot \text{Grad} \delta\phi \, dV_0 - \int_{B_0} \underline{f}^* \cdot \delta\phi \, dV_0 - \int_{\partial B_f} \underline{P}_f \cdot \delta\phi \, dA_0.$$

La forma debole del problema al contorno per la elastostatica richiede di determinare $\phi \in \mathcal{C}$ (quindi soddisfacente le condizioni al contorno su ∂B_u) tale che $\mathcal{J}(\phi, \delta\phi) = 0$ per ogni $\delta\phi \in \mathcal{V}_\phi$ (cioè per ogni variazione soddisfacente le condizioni omogenee su ∂B_u).

Se la soluzione debole è "sufficientemente" regolare, ne consegue che essa è anche soluzione del problema forte della elastostatica e viceversa una soluzione forte è anche soluzione debole del problema

della elastostatica.

Infatti se ϕ è una soluzione forte del problema della elastostatica, allora il campo tensoriale $\underline{P}$ che ne consegue tramite il legame costitutivo è equilibrato nel volume e nel contorno ∂B_f . Per il principio dei lavori virtuali, scritto nel caso statico ($\dot{\underline{v}} = \underline{0}$) con $\delta\phi$ quale campo di spostamenti virtuale, risulta:

$$\int_{\partial B_\sigma} \delta\phi \cdot d\underline{p} + \int_{B_0} \underline{f}^* \cdot \delta\phi \, dV_0 = \int_{B_0} \underline{P} \cdot \text{Grad} \delta\phi \, dV_0.$$

Dato che $\delta\phi = 0$ su ∂B_u e $d\underline{p} = \underline{P}_f \, dA_0$ su ∂B_f ne consegue:

$$\mathcal{J}(\phi, \delta\phi) = 0 \quad \text{per ogni } \delta\phi \in \mathcal{V}_\phi.$$

Se invece ϕ è una soluzione debole del

problema della elastostatica e il campo tensoriale

$\underline{P}$ che ne consegue e' sufficientemente regolare

allora si puo' trasformare il funzionale $\mathcal{J}(\phi, \delta\phi)$

tenendo conto che :

$$\underline{P} \cdot \text{Grad } \delta\phi = -\text{Div } \underline{P} \cdot \delta\phi + \text{Div}(\underline{P}^T \delta\phi).$$

Si ottiene :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\phi, \delta\phi) &= - \int_{B_0} (\text{Div } \underline{P} + \underline{f}^*) \cdot \delta\phi \, dV_0 \\ &\quad + \int_{\partial B_f} (\underline{P} \underline{N} - \underline{p}_f) \cdot \delta\phi \, dA_0. \end{aligned}$$

Se ϕ e' soluzione debole allora $\mathcal{J}(\phi, \delta\phi) = 0$

per ogni $\delta\phi$ "sufficientemente" regolare per rendere valide

le trasformazioni operate. Per il teorema fondamentale

del calcolo delle variazioni ne consegue che

$$\text{Div } \underline{P} + \underline{f}^* = \underline{0} \quad \text{in } B_0$$

$$\underline{P} \underline{N} = \underline{p}_f \quad \text{su } \partial B_f,$$

e quindi ϕ e' anche soluzione forte.

3.2 Principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale

Sia w l'energia interna per unita' di volume di un solido iperelastico.

Tale energia e' comunemente indicata sotto il nome di energia elastica di deformazione (per unita' di volume). Globalmente si ha:

$$\mathcal{W} = \int_{B_0} w \, dV_0.$$

Tale energia globale rappresenta un funzionale della deformazione ϕ , attraverso la dipendenza locale di w dal tensore di Green-Lagrange $\underline{E}$.

La variazione di $\mathcal{W}$, associata alla variazione $\delta\phi$ di ϕ , risulta:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W} &= \int_{B_0} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \underline{\underline{E}}} \cdot \delta \underline{\underline{E}} dV_0 \\ &= \int_{B_0} \underline{\underline{S}} \cdot \delta \underline{\underline{E}} dV_0 \\ &= \int_{B_0} \underline{\underline{P}} \cdot \delta \underline{\underline{E}} dV_0 = \int_{B_0} \underline{\underline{P}} \cdot \text{Grad } \delta\phi dV_0.\end{aligned}$$

Se inoltre le forze esterne $\underline{\underline{f}}^*$ e $\underline{\underline{p}}_f$ sono conservative, ovvero se esiste un funzionale $V(\phi)$ della deformazione tale che:

$$\int_{\partial B_f} \underline{\underline{p}}_f \cdot \delta\phi dA_0 + \int_{B_0} \underline{\underline{f}}^* \cdot \delta\phi dV_0 = \delta V,$$

allora risulta:

$$\mathcal{I}(\phi, \delta\phi) = \delta(\mathcal{W} - V).$$

Ne consegue che l'energia potenziale totale

$$\Pi = \mathcal{W} - V,$$

è "stazionaria" in corrispondenza della deformazione ϕ soluzione debole del problema della elastostatica e, viceversa, una deformazione ϕ che rende stazionaria l'energia potenziale totale è soluzione debole del problema della elastostatica.

3.3 Caso dinamico

Nel caso della elastodinamica, si ricerca, quale soluzione forte, un moto $\phi(X, t)$ tale che, ad ogni istante, sia $\text{Div } \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{f}}^* = \rho_0 \underline{\underline{v}}$ in B_0 e che soddisfi le condizioni al contorno $\phi = \phi_u$ su ∂B_u e $\underline{\underline{P}}\underline{\underline{N}} = \underline{\underline{p}}_f$ su ∂B_f , sempre ad ogni istante.

A questo livello di generalità (ovverossia senza imporre condizioni iniziali) la forma debole del problema della elastodinamica è basata sul seguente funzionale, dipendente dal tempo:

$$\mathcal{D}(\phi, \delta\phi) = \int_{B_0} \underline{P} \cdot \text{Grad } \delta\phi \, dV_0 - \int_{B_0} (\underline{f}^* - \rho_0 \underline{\dot{v}}) \cdot \delta\phi \, dV_0 - \int_{\partial B_f} \underline{p}_f \cdot \delta\phi \, dA_0,$$

dove $\phi(t)$ è un moto che soddisfa le condizioni al contorno su ∂B_u e $\delta\phi(t)$ una variazione del moto $\phi(t)$, quindi soddisfacente le condizioni omogenee al contorno. La forma debole del problema al contorno richiede di determinare un moto $\phi(t)$ tale che $\mathcal{D}(\phi, \delta\phi) = 0$ per ogni variazione $\delta\phi$ del moto.

Se una soluzione debole è sufficientemente regolare, allora essa è anche una soluzione forte del problema elastodinamico e viceversa. La dimostrazione è analoga al caso statico.

3.4 Principio di Hamilton

Nel caso di un solido iperelastico, il funzionale $\mathcal{D}(\phi, \delta\phi)$ può porsi nella forma:

$$\mathcal{D}(\phi, \delta\phi) = \int_{B_0} \rho_0 \underline{\dot{v}} \cdot \delta\phi \, dV_0 - \delta \Pi.$$

Integrando nel tempo tra due estremi t_1 e t_2 si ottiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{B_0} \rho_0 \underline{\dot{v}} \cdot \delta\phi \, dV_0 =$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{B_0} \rho_0 \underline{v} \cdot \dot{\delta \phi} dV_0 \\ + \left[\int_{B_0} \rho_0 \underline{v} \cdot \delta \phi dV_0 \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Poiché:

$$\underline{v} \cdot \dot{\delta \phi} = \delta \left\{ \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} \right\},$$

risulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{B_0} \rho_0 \underline{v} \cdot \dot{\delta \phi} dV_0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{B_0} \frac{1}{2} \rho_0 \underline{v} \cdot \underline{v} dV_0.$$

Integrando il funzionale $\mathcal{Q}(\phi, \delta \phi)$ tra t_1 e t_2 si ottiene quindi:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{Q}(\phi, \delta \phi) dt = - \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\phi) dt + \left[\int_{B_0} \rho_0 \underline{v} \cdot \delta \phi dV_0 \right]_{t_1}^{t_2},$$

dove:

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} \int_{B_0} \rho_0 \underline{v} \cdot \underline{v} dV_0 - \Pi$$

rappresenta la lagrangiana del problema.

È evidente che, per l'arbitrarietà di $\delta \phi$, il problema debole dell'elastodinamica è equivalente a richiedere che sia

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{Q}(\phi, \delta \phi) dt = 0,$$

per ogni $\delta \phi(t)$, relativamente alla ricerca di un moto $\phi(x, t)$ nell'intervallo (t_1, t_2) , e quindi è equivalente a ricercare un moto tale che:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\phi) dt + \left[\int_{B_0} \rho_0 \underline{v} \cdot \delta \phi dV_0 \right]_{t_1}^{t_2} = 0,$$

per ogni variazione $\delta\phi$ del moto soddisfacente le condizioni al contorno.

Se poi si richiede che le variazioni $\delta\phi$ si annullino ai due istanti t_1 e t_2 si ottiene il principio di Hamilton: una soluzione debole ϕ del problema della elastodinamica la si ottiene richiedendo che sia:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\phi) dt = 0,$$

per ogni variazione $\delta\phi$ del moto soddisfacente le condizioni al contorno e che si annulli ai due istanti t_1 e t_2 .

Capitolo 4

Termoelasticità

4.1 Assunzioni costitutive termomeccaniche

Riassumiamo le equazioni dedotte in precedenza, nella loro versione materiale.

1. conservazione della massa:

$$\dot{J} = \dot{\rho}_0,$$

2. equazione del moto o bilancio della quantità di moto:

$$\text{Div } \underline{P} + \underline{f}_0 = \rho_0 \underline{\dot{v}}_{\text{ref}},$$

3. simmetria del secondo tensore di Piola-Kirchhoff o bilancio del momento della quantità di moto:

$$\underline{S} = \underline{S}^T,$$

4. bilancio dell'energia:

$$\rho_0 \dot{u} + \text{Div } \underline{q}_0 = \underline{S} \cdot \underline{\dot{E}} + \underline{\tau}_0,$$

5. disuguaglianza di dissipazione o di Clausius-Duhem:

$$\rho_0 (\dot{\Psi} + \dot{\eta}) - \underline{S} \cdot \underline{\dot{E}} + \frac{1}{\vartheta} \underline{q}_0 \cdot \text{Grad } \vartheta \leq 0,$$

6. relazione tra energia interna ed energia libera:

$$u = \Psi + \vartheta \eta.$$

Generalmente le variabili incognite sono assunte essere la deformazione $\phi(t)$ e la temperatura assoluta $\vartheta(x, t)$. Spesso la densità di massa materiale ρ_0 è considerata quale termine noto così come le forze per unità di massa $\underline{f}_0/\rho_0$ e la produzione di calore per unità di massa $\underline{\tau}_0/\rho_0$. Per determinare ϕ e ϑ occorre specificare $\underline{S}$, $\underline{q}_0$, Ψ e η in funzione di ϕ e ϑ .

In generale si assume che $\underline{S}$, $\underline{q}_0$, Ψ e η ad un dato istante siano dei funzionali della storia del moto e della

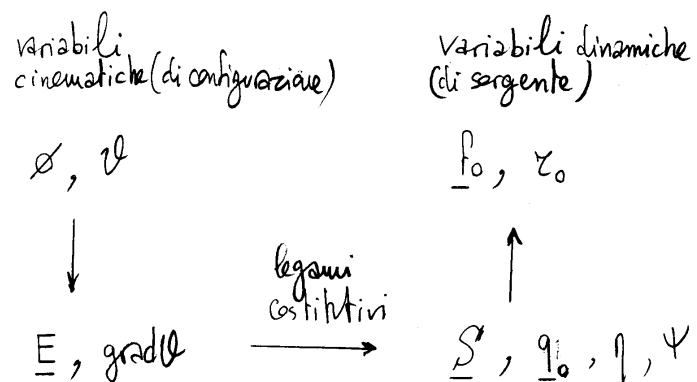


Diagramma di Tonti del problema termomeccanico

temperatura fino a quell'istante. Si consideri l'insieme delle possibili storie del moto fino al tempo t_0 :

$$\mathcal{M}_{t_0} = \{ \phi / \phi_0 : (-\infty, t_0] \rightarrow \mathcal{C}^{B_0} \},$$

e l'insieme delle possibili storie di temperatura fino al tempo t_0 :

$$\mathcal{Z}_{t_0} = \{ \vartheta / \vartheta_0 : B_0 \times (-\infty, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^+ \}.$$

L'insieme $\mathcal{H}$ di tutte le possibili storie passate

(rispetto ad ogni tempo) risulta:

$$\mathcal{H} = \bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} (\mathcal{M}_{t_0} \times \mathcal{Z}_{t_0}).$$

Si assume che le equazioni costitutive siano delle mappe del tipo (principio di determinismo):

$$\hat{\underline{S}} : \mathcal{H} \rightarrow \text{Sym}(B_0),$$

$$\hat{\underline{q}}_0 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{V}(B_0),$$

$$\hat{\eta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}(B_0),$$

$$\hat{\psi} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}(B_0),$$

che ad ogni storia passata associano rispettivamente un campo tensoriale simmetrico in B_0 , un campo vettoriale in B_0 e due campi scalari in B_0 .

Attraverso tali mappe è possibile generare le funzioni $\underline{S}'(x, t)$, $\underline{q}_0(x, t)$, $\eta(x, t)$ e $\psi(x, t)$ nel modo seguente:

$$\underline{S}(X, t) = \hat{\underline{S}}[\phi_{t_0}, \psi_{t_0}](X),$$

e analoghe, dove ϕ_{t_0} e ψ_{t_0} sono le effettive storie fino al tempo t_0 .

Una ulteriore assunzione costitutiva è il principio di localizzazione spaziale:

"Il valore delle funzioni $\underline{S}(X, t)$, ed analoghe, in un dato punto X e ad un dato istante non dipende dal moto dei punti materiali al di fuori di un qualunque intorno (comunque piccolo) di X ".

In fine un'ulteriore assunzione costitutiva, universalmente accettata, è il principio di indifferenza materiale:

"Due osservatori in moto relativo tra loro osservano la stessa tensione ad ogni istante". In

altre parole il principio di indifferenza afferma l'obiettività della tensione, il che porta con sé che i tensori di Cauchy $\underline{\sigma}$ e di Kirchhoff $\underline{\tau}$ sono dei tensori spaziali oggettivi.

Una derivazione oggettiva naturale del tensore di Kirchhoff $\underline{\tau}$ risulta essere la derivata di Oldroyd ($J=1$ nel riferimento relativo):

$$\overset{\Delta}{\underline{\tau}} = \dot{\underline{\tau}} - \underline{L}\underline{\tau} - \underline{\tau}\underline{L}^T,$$

poiché il pull-back di $\underline{\tau}$:

$$\underline{S} = \underline{F}^{-1}\underline{\tau}\underline{F}^{-T},$$

è proprio quello (relativo alle aree) che si utilizza per la derivazione oggettiva. Tale derivata è meno naturale per il tensore di Cauchy $\underline{\sigma}$ poiché il suo pull-back contiene anche J :

$$\underline{S} = J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T}.$$

4.2 Assunzioni costitutive termoelastiche

Nel caso della termoelasticità le storie possibili che conducono alla stessa configurazione finale (rispetto ai campi di temperatura ϑ e di deformazione ϕ) sono ritenute equivalenti, ovvero sia la tensione, il flusso di calore, l'entropia e l'energia libera dipendono solo dalla configurazione finale e non dal modo in cui tale configurazione è stata raggiunta.

Questo significa che l'insieme delle possibili storie passate di temperatura e di moto possa essere sostituito dall'insieme delle possibili configurazioni finali di temperatura e di deformazione:

$$\mathcal{C} : \{(\phi, \vartheta) / \phi: B_0 \rightarrow \mathcal{C}; \vartheta: B_0 \rightarrow \mathbb{R}^+\}.$$

Le equazioni costitutive termoelastiche saranno allora

delle mappe:

$$\hat{\underline{S}}: \mathcal{C} \rightarrow \text{Sym}(B_0),$$

$$\hat{\underline{q}}_0: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{V}(B_0),$$

$$\hat{\eta}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}(B_0),$$

$$\hat{\psi}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}(B_0),$$

sufficientemente regolari. Il secondo tensore di Piola-Kirchhoff associato, tramite $\hat{\underline{S}}$, ad un campo ϑ di temperatura e ad una deformazione ϕ di B_0 risulta:

$$\underline{S}(X) = \hat{\underline{S}}[\vartheta, \phi](X).$$

Per le altre variabili dipendenti valgono analoghe relazioni.

4.3 Energia libera di Helmholtz

Sotto l'ipotesi di validità della disuguaglianza di Clausius-Duhem :

$$\rho_0 (\dot{\Psi} + \vartheta \eta) - \underline{S} \cdot \dot{\underline{E}} + \frac{1}{\vartheta} \underline{q}_0 \cdot \text{Grad } \vartheta \leq 0,$$

è possibile mostrare che il funzionale $\hat{\Psi}$ dipende solo dal punto, dal tensore di Green-Lagrange della deformazione e dalla temperatura:

$$\hat{\Psi}[\phi, \vartheta](X) = \hat{\Psi}(X, \underline{E}(X), \vartheta(X)),$$

dove :

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\text{Grad}^T \phi \text{ Grad } \phi - \underline{I}).$$

Inoltre valgono le relazioni:

$$\begin{cases} \hat{\eta} = - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \vartheta} \\ \hat{\underline{S}} = \rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \underline{E}} \end{cases},$$

mentre la disuguaglianza di Clausius-Duhem si riduce alla :

$$\underline{q}_0 \cdot \text{Grad } \vartheta \leq 0.$$

Vediamo la traccia della dimostrazione.

Risulta:

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} = D_{\phi} \hat{\Psi} [\underline{V}_{\text{Ref}}] + D_{\vartheta} \hat{\Psi} [\dot{\vartheta}],$$

dove :

$$D_{\phi} \hat{\Psi} : \mathcal{V}^0(B_0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \delta \phi \mapsto D_{\phi} \hat{\Psi}[\delta \phi]$$

rappresenta la derivata di Frechet di $\hat{\Psi}$ fatta rispetto alla deformazione ϕ (Ψ è funzione del campo ϕ , una variazione $\delta \phi$ di ϕ è un campo vettoriale su B_0 , la derivata di Frechet è la parte lineare dell'incremento di Ψ , cioè è un operatore lineare che si applica ai campi vettoriali definiti su B_0). Analogamente :

$$D_\vartheta \hat{\Psi}: R(B_0) \rightarrow R, \vartheta \mapsto D_\vartheta \hat{\Psi}[\vartheta],$$

solo che ora la variazione ϑ è un campo scalare su B_0 .

Si scelga una storia (ϕ, ϑ) in cui ϕ sia indipendente dal tempo cioè tale che $\underline{v}_{\text{ref}} = \underline{0}$ e $\underline{\dot{E}} = \underline{0}$.
La disuguaglianza di Clausius-Duhem si scrive:

$$\int_0 (D_\vartheta \hat{\Psi}[\underline{\dot{\vartheta}}] + \hat{\eta} \underline{\dot{\vartheta}}) + \frac{1}{\vartheta} \hat{q}_0 \cdot \text{Grad } \vartheta \leq 0.$$

Se ϑ è una storia che soddisfa la disuguaglianza ad un certo tempo t_0 senza annullare il primo termine, si scelga un'altra storia ϑ^* che abbia la stessa temperatura al tempo t_0 e la derivata materiale semplificata tramite un coefficiente scalare α :

$$\vartheta^*(t_0) = \vartheta(t_0), \quad \dot{\vartheta}^*(t_0) = \alpha \dot{\vartheta}(t_0).$$

Poiché α può essere scelto arbitrariamente, se ne deduce

che è possibile violare la disuguaglianza. Il tempo t_0 è generico ed allora, ad ogni tempo, deve essere:

$$D_\vartheta \hat{\Psi}[\underline{\dot{\vartheta}}] + \hat{\eta} \underline{\dot{\vartheta}} = 0.$$

Tale espressione non contiene variazioni di ϕ e quindi vale per ogni storia ϕ .

Procedendo in modo analogo, considerando una storia (ϕ, ϑ) con ϑ indipendente dal tempo, si deduce:

$$\int_0 D_\phi \hat{\Psi}[\underline{v}_{\text{ref}}] - \hat{S} \cdot \underline{\dot{E}} = 0.$$

Tale espressione non contiene variazioni di ϑ e quindi vale per ogni storia ϑ .

E' chiaro che la disuguaglianza si riduce poi alla forma:

$$\frac{1}{\vartheta} \hat{q}_0 \cdot \text{Grad } \vartheta \leq 0.$$

Sia ora ϑ un campo di temperatura e sia $X_0 \in B_0$.

Siano poi ϕ_1 e ϕ_2 due deformazioni tali che:

$$\underline{E}_1(X_0) = \underline{E}_2(X_0).$$

Definiamo un moto nel modo seguente:

$$\phi(t) = \phi_1 + t\{\phi_2 - \phi_1\}.$$

Tale moto soddisfa alla condizione:

$$\dot{\underline{\underline{E}}}(X_0) = \underline{\underline{0}},$$

per ogni tempo t e dunque:

$$\int_0 D_\phi \hat{\Psi}[\underline{\underline{v}}_{\text{Ref}}] \Big|_{X=X_0} = 0.$$

Quindi, se il campo di temperatura è indipendente dal tempo:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0 \hat{\Psi} \right) \Big|_{X=X_0} = 0,$$

ed anche:

$$\int_0 \hat{\Psi} \Big|_{X=X_0} = \text{cost},$$

dove la costanza è rispetto al tempo t . Poiché al

tempo $t=0$ risulta $\phi = \phi_1$ e al tempo $t=1$

risulta $\phi = \phi_2$, si ha:

$$\int_0(X_0) \hat{\Psi}[\phi_1, \vartheta](X_0) = \int_0(X_0) \hat{\Psi}[\phi_2, \vartheta](X_0),$$

e quindi Ψ dipende da ϕ , nel punto X_0 , solo per il tramite di $\underline{\underline{E}}(X_0)$. Ragionando allo stesso modo,

assumendo due campi di temperatura ϑ_1 e ϑ_2 tali che

$$\vartheta_1(X_0) = \vartheta_2(X_0),$$

ed una storia di temperatura:

$$\vartheta(t) = \vartheta_1 + t\{\vartheta_2 - \vartheta_1\},$$

dalla uguaglianza $D_\vartheta \hat{\Psi}[\vartheta] = -\hat{\eta} \dot{\vartheta}$ si deduce

che la dipendenza di $\hat{\Psi}$ dalla funzione ϑ , nel punto X_0 , dipende solo dal valore $\vartheta(X_0)$ di ϑ nel punto X_0 .

Sfruttando il risultato:

$$\hat{\Psi}[\phi, \vartheta](X_0) = \hat{\Psi}(X_0, \underline{\underline{E}}(X_0), \vartheta(X_0)),$$

all'interno delle uguaglianze:

$$D_\vartheta \hat{\Psi}[\vartheta] = -\hat{\eta} \dot{\vartheta} \quad \text{e} \quad \int_0 D_\phi \hat{\Psi}[\underline{\underline{v}}_{\text{Ref}}] = \hat{\underline{\underline{S}}} \cdot \dot{\underline{\underline{E}}},$$

si ottiene infine:

$$\hat{\eta} = - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \vartheta} \quad , \quad \underline{\hat{S}} = \int_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \underline{E}} \cdot$$

4.4 Osservazioni

4.4.1 Derivata dell'energia libera

La "derivata" $\partial \hat{\Psi} / \partial \underline{E}$ rappresenta il gradiente di $\hat{\Psi}$ rispetto alla sua dipendenza da $\underline{E}$, e quindi a $x_0 = \text{Cost}$ e $\vartheta = \text{Cost}$. Tale dipendenza è del tipo $\text{Lin} \rightarrow \mathbb{R}$, a differenza della dipendenza funzionale $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}(\mathcal{B}_0)$ sulla quale era calcolata la derivata $D_{\phi} \hat{\Psi}$ nel senso di Frechet.

4.4.2 Caso puramente elastico

Nel caso puramente elastico, cioè ignorando gli effetti termici, si perviene a conclusioni analoghe

partendo dal bilancio dell'energia, scritto omettendo gli effetti termici dovuti a $\underline{q}_0$ e $\underline{r}_0$:

$$\int_0 \hat{u} = \underline{\hat{S}} \cdot \underline{\dot{E}} \quad .$$

In tal caso l'energia interna dipende solo da ϕ e si ha:

$$\begin{cases} \hat{u}[\phi](x_0) = \hat{u}(x_0, \underline{E}(x_0)) \\ \underline{\hat{S}} = \int_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \underline{E}} \end{cases} \quad .$$

Tale tipo di solido viene detto iperelastico.

4.4.3 Bilancio dell'energia

Tenendo conto che:

$$\begin{aligned} \int_0 \dot{u} &= \int_0 (\dot{\Psi} + \vartheta \dot{\eta} + \vartheta \dot{\eta}) = \\ &= \int_0 \vartheta \dot{\eta} + \int_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} + \eta \right) \dot{\vartheta} + \int_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{E}} \cdot \underline{\dot{E}} \\ &= \int_0 \vartheta \dot{\eta} + \int_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{E}} \cdot \underline{\dot{E}} \quad , \end{aligned}$$

il bilancio dell'energia, nel caso termoelastico, diviene:

$$\int_0 \vartheta \dot{\eta} + \text{Div} \underline{q}_0 = \int_0 \underline{r}_0 \quad .$$

4.4.4 Materiale semplice elastico

Se si ammette anche il bilancio dell'energia, la dipendenza di $\underline{S}$ da $\underline{E}$ non è limitata. Si definisce materiale semplice un materiale per il quale $\underline{S}$ dipende solo dalla storia locale del gradiente della deformazione:

$$\underline{S}(X_0, t_0) = \hat{\underline{S}}(X_0, \underline{E}_{t_0}(X_0)),$$

dove $\underline{E}_{t_0}(X_0) : (-\infty, t_0] \rightarrow \text{Lin}$, $t \mapsto \underline{E}(X_0, t)$, rappresenta una storia di $\underline{E}$ fino al tempo t_0 , in corrispondenza di X_0 .

Un materiale semplice elastico ha dunque una equazione costitutiva del tipo:

$$\underline{S}(X_0) = \hat{\underline{S}}(X_0, \underline{E}(X_0)),$$

cioè, il secondo tensore di Piola-Kirchhoff (ed altro tensore degli sforzi equivalente) dipende solo dal valore locale al dato tempo del gradiente della deformazione.

Un solido semplice elastico è anche detto solido elastico.

Il principio di indifferenza materiale permette poi di verificare che la dipendenza di $\underline{S}$ da $\underline{E}$ passa attraverso $\underline{E}$, nel senso che a due gradienti della deformazione che originano lo stesso tensore di Green-Lagrange della deformazione corrisponde lo stesso tensore degli sforzi $\underline{S}$.

4.4.5 Principio di indifferenza materiale

Il principio di indifferenza materiale è automaticamente soddisfatto dalla funzione scalare termoelastica $\hat{\Psi}(X_0, \underline{E}, \vartheta)$ oppure dalla corrispondente funzione iperelastica $\hat{\Psi}(X_0, \underline{E})$. Infatti ϑ è uno scalare obiettivo e quindi resta invariato al cambiare dell'osservatore. Inoltre è stato a suo tempo verificato che il tensore destro di stretching $\underline{U}$ non

varia al cambiare dell'osservatore e questa proprietà si trasmette al tensore destro di Cauchy-Green

$\underline{C} = \underline{U}^2$ e quindi al tensore di Green-Lagrange

$\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{C} - \underline{I})$. La richiesta di obiettività:

$$\hat{\Psi}(X, \underline{E}, \vartheta) = \hat{\Psi}(X, \underline{E}^*, \vartheta),$$

per ogni $\underline{E} = \underline{E}^*$, e' quindi banalmente soddisfatta.

4.4.6 Flusso di calore

Per quel che riguarda la dipendenza del flusso di calore $\underline{q}_0$ da ϑ e ϑ mente si può dire a priori.

Spesso e' assunta una dipendenza del tipo:

$$\underline{q}_0(X_0) = \hat{\underline{q}}_0(X_0, \underline{E}, \vartheta, \text{Grad } \vartheta),$$

dipendenza che e' detta di grado uno (poiche' dipende dai gradienti di ϑ e di ϑ).

Risulta:

$$\underline{q}_0 = \underline{0} \quad \text{se} \quad \text{Grad } \vartheta = \underline{0}.$$

Infatti, si metta $\text{grad } \vartheta$ nella forma $\text{grad } \vartheta = \alpha \underline{u}$ e si ponga:

$$f(\alpha) = \hat{\underline{q}}_0(X_0, \underline{E}, \vartheta, \alpha \underline{u}) \cdot \underline{u}.$$

La disuguaglianza di Clausius-Duhem impone:

$$\alpha f(\alpha) \leq 0,$$

e per continuità:

$$f(0) = \underline{q}_0(X_0, \underline{E}, \vartheta, \underline{0}) \cdot \underline{u} = 0,$$

per ogni $\underline{u}$, e quindi:

$$\underline{q}_0(X_0, \underline{E}, \vartheta, \underline{0}) = \underline{0}.$$

4.4.7 Dipendenze costitutive dell'energia libera

Notiamo ancora che l'energia libera Ψ potrà essere espressa quale funzione del tensore destro di Cauchy-Green $\underline{C}$ in luogo di $\underline{E}$, e questo per l'uguaglianza:

$$\underline{S} \cdot \underline{\dot{E}} = \frac{1}{2} \underline{S} \cdot \underline{\dot{C}}.$$

Se $\Psi = \hat{\Psi}(X, \underline{C}, \vartheta)$ ne risulta:

$$\underline{\hat{S}} = 2 \int_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \underline{C}}.$$

Analogamente, dall'uguaglianza:

$$\underline{S} \cdot \underline{\dot{E}} = \underline{P} \cdot \underline{\dot{F}}$$

si sarebbe potuta dedurre la dipendenza più bassa

$\Psi = \hat{\Psi}(X, \underline{E}, \mathcal{V})$ e la relazione:

$$\underline{\hat{P}} = \int_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \underline{E}}.$$

In tal caso l'indifferenza materiale non è automaticamente soddisfatta, ma è soddisfatta se e solo se la dipendenza

di $\hat{\Psi}$ da $\underline{F}$ passa attraverso $\underline{C}$ oppure $\underline{E}$, nel senso che per due diversi gradienti $\underline{F}_1$ ed $\underline{F}_2$ cui corrispondono

uguali tensori destri di Cauchy-Green $\underline{C}_1 = \underline{C}_2$

(e quindi $\underline{E}_1 = \underline{E}_2$) l'energia libera è la stessa:

$$\hat{\Psi}(X, \underline{F}_1, \mathcal{V}) = \hat{\Psi}(X, \underline{F}_2, \mathcal{V}).$$

4.4.8 Trasformata di Legendre

Notiamo infine che se il legame:

$$\eta = \hat{\eta}(\phi, \mathcal{V}),$$

è invertibile, parzialmente, in $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V} = \hat{\mathcal{V}}(\phi, \eta),$$

allora l'energia interna, ritenuta funzione di ϕ e η :

$$\hat{u}(\phi, \eta) = \eta \hat{\mathcal{V}}(\phi, \eta) + \hat{\Psi}(\phi, \hat{\mathcal{V}}(\phi, \eta)),$$

è fornita da una trasformata, parziale (solo in $\mathcal{V}$), di Legendre. La relazione:

$$\underline{S} = \int_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \underline{E}}, \quad \Psi = \hat{\Psi}(X, \underline{E}, \mathcal{V}),$$

è equivalente alla formula:

$$\underline{S} = \int_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \underline{E}}, \quad u = \hat{u}(X, \underline{E}, \eta).$$

Infatti, derivando la trasformata di Legendre rispetto ad $\underline{E}$ si ottiene:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \underline{E}} = \frac{\partial \hat{\mathcal{V}}}{\partial \underline{E}} \eta + \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \underline{E}} + \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathcal{V}} \frac{\partial \hat{\mathcal{V}}}{\partial \underline{E}} = \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \underline{E}},$$

poiché $\eta = -\partial \hat{\Psi} / \partial \mathcal{V}$.

4.5 Problema termoelastico

Vediamo di formulare nel seguito il problema termoelastico sfruttando le proprietà e le relazioni che mano a mano abbiamo illustrato.

Ricordiamo l'equazione del moto:

$$\text{Div } \underline{P} + \underline{f}_0 = \rho_0 \dot{\underline{v}}_{\text{Ref}}.$$

Dato che $\underline{P} = \hat{\underline{P}}(X, \underline{F}, \vartheta)$ risulta, in componenti cartesiane:

$$\begin{aligned} (\text{Div } \underline{P})_i &= \frac{\partial \hat{P}_{iI}}{\partial X_I} + \frac{\partial \hat{P}_{iI}}{\partial F_{jJ}} \frac{\partial F_{jJ}}{\partial X_I} + \frac{\partial \hat{P}_{iI}}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial X_I} \\ &= (\text{Div}_X \hat{\underline{P}})_i + A_{iIJ} (\text{Grad } \underline{F})_{jJI} + \frac{\partial \hat{P}_{iI}}{\partial \vartheta} (\text{Grad } \vartheta)_I. \end{aligned}$$

Posto:

$$(\partial \underline{F})_{IjJ} = (\text{Grad } \underline{F})_{jJI},$$

cioè mettendo al primo posto l'indice di derivazione,

si può scrivere:

$$\text{Div } \hat{\underline{P}} = \text{Div}_X \hat{\underline{P}} + A[\partial \underline{F}] + \frac{\partial \hat{\underline{P}}}{\partial \vartheta} \text{Grad } \vartheta,$$

dove l'indice X in $\text{Div}_X \hat{\underline{P}}$ ricorda che la divergenza deve essere fatta ad $\underline{F}$ e ϑ costanti.

Si noti che se la funzione $\hat{\underline{P}}$ dipende da X solo attraverso $\underline{F}$ e ϑ (materiale omogeneo):

$$\underline{P} = \hat{\underline{P}}(\underline{F}, \vartheta),$$

risulta $\text{Div}_X \hat{\underline{P}} = \underline{0}$. Per tale motivo la quantità

$$\underline{f}_i = \text{Div}_X \hat{\underline{P}}$$

è detta forza dovuta alla non omogeneità del materiale.

Veniamo ora al problema a valori iniziali per la termoelasticità. Si tratta di trovare la deformazione $\phi(t)$ e il campo di temperature $\vartheta(X, t)$ tali che:

- 1) $A[\partial \underline{E}] + \underline{f}_0 + \underline{f}_i + \frac{\partial \hat{P}}{\partial \vartheta} \text{Grad } \vartheta = \int_0 \dot{\underline{v}}_{\text{Ref}} \text{ (moto),}$
- 2) $\int_0 \vartheta \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} + \text{Div } \hat{\underline{q}}_0 = \int_0 \gamma_0 \text{ (energia),}$
- 3) $\phi, \underline{v}_{\text{Ref}}$ e ϑ dati per $t=0$ (condizioni iniziali),
- 4) Validità delle condizioni al contorno per ϕ e ϑ .

Le condizioni al contorno sia per ϕ che per ϑ possono essere di 3 tipi.

Condizioni per ϕ :

- a) di spostamento: ϕ è prescritta su ∂B_0 ;
- b) di forza: la tensione $\underline{p}^* = \underline{P}\underline{N}$ è prescritta su ∂B_0 ;
- c) miste: ϕ prescritta su ∂B_u e $\underline{p}^*$ prescritta su ∂B_f
tali che $\partial B_u \cap \partial B_f = \emptyset$ e $\overline{\partial B_u \cup \partial B_f} = \partial B_0$.

Condizioni per ϑ :

- a) di temperatura: ϑ è prescritta su ∂B_0
(condizioni di Dirichlet);

b) di flusso: il flusso $\underline{q}_0 \cdot \underline{N}$ è prescritto su ∂B_0
(condizioni di Neumann);

c) miste: ϑ è prescritta su ∂B_ϑ e il flusso su ∂B_q
tali che $\partial B_\vartheta \cap \partial B_q = \emptyset$ e $\overline{\partial B_\vartheta \cup \partial B_q} = \partial B_0$.

Naturalmente si suppone nota la funzione costitutiva $\hat{\Psi}(X, \underline{E}, \vartheta)$, attraverso la quale si esprimono le funzioni $\hat{S}$ e $\hat{\eta}$ e quindi il tensore elastico A e la forza $\underline{f}_i$. Le forze di volume $\underline{f}_0$, la densità di massa ρ_0 e la produzione di calore γ_0 sono supposti noti, così come la funzione costitutiva $\hat{\underline{q}}_0(X, \underline{E}, \vartheta, \text{Grad } \vartheta)$ soddisfacente la disuguaglianza $\hat{\underline{q}}_0 \cdot \text{Grad } \vartheta \leq 0$.

Se si omettono le quantità termodinamiche si ottiene la formulazione del problema a valori iniziali per la iperelasticità:

$$1) A[\partial \underline{E}] + \underline{f}_0 + \underline{f}_i = \rho_0 \dot{\underline{v}}_{\text{Ref}},$$

2) ϕ, v_{ref} dati per $t=0$,

3) validità delle condizioni al contorno per ϕ .

$$1) A[\partial \underline{E}] + \underline{f}_0 + \underline{f}_i = \underline{0},$$

2) validità delle condizioni al contorno per ϕ .

In tal caso si suppone noto, la funzione costitutiva dell'energia di deformazione $\underline{u}_0(X, \underline{E})$ per unità di massa oppure $w(X, \underline{E})$ per unità di volume, da cui deriva la funzione costitutiva $\hat{S}(X, \underline{E})$ e quindi il tensore di elasticità A e la forza $\underline{f}_i$. Ancora $\underline{f}_0$ e $\underline{f}_b$ sono supposti noti.

Infine se si omette la dipendenza dal tempo si ottengono il problema al contorno per la termoelastostatica:

$$1) A[\partial \underline{E}] + \underline{f}_0 + \underline{f}_i + \frac{\partial \hat{P}}{\partial \theta} \text{Grad } \theta = \underline{0},$$

$$2) \text{Div } \hat{q}_0 = \underline{f}_0 \chi_0,$$

3) validità delle condizioni al contorno per ϕ e θ ,

e il problema al contorno per la elastostatica: