

**FONDAMENTI
DI
STABILITÀ
DELLE
STRUTTURE ELASTICHE**

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile
Università di Trieste
Piazzale Europa 1

Trieste, 31 maggio 2005

SISTEMI DINAMICI 1

Elementi caratterizzanti

- Variabile indipendente *tempo*

$$t \in T = [0, +\infty)$$

- Insieme delle *configurazioni* possibili

$$X$$

- Insieme delle *soluzioni*

$$S = \{\varphi : T \rightarrow X\}$$

- Insieme dei *valori iniziali*

$$X_0 \subset X$$

- Insieme degli *istanti iniziali*

$$T_0 \subset T$$

- *Moto* di istante iniziale t_0

$$\varphi_{t_0} : T \rightarrow X, t \mapsto \varphi(t_0 + t)$$

Osservazioni

- ☞ Normalmente la variabile tempo deve appartenere ad un intervallo della retta reale, finito o infinito, ma potrebbe anche essere un sottoinsieme dei numeri naturali (dinamica discreta).
- ☞ Nel caso della meccanica dei solidi, una configurazione potrebbe constare di un sottodominio dello spazio euclideo tridimensionale e dei campi di velocità, di deformazione e di tensione in esso definiti.
- ☞ Le soluzioni devono soddisfare certe condizioni, come per esempio delle equazioni differenziali, delle equazioni discrete, dei principi variazionali o altro.
- ☞ Un moto di istante iniziale t_0 relativo ad una soluzione φ è anche detto il *traslato* di φ . È evidente che ad un tale moto deve essere richiesto di essere una soluzione, essendo ottenuto da una soluzione per una semplice traslazione dell'asse dei tempi.
- ☞ L'insieme dei valori iniziali, in molti problemi, è un sottoinsieme proprio dell'insieme delle configurazioni, come nel caso del problema delle onde in più dimensioni. Questo implica che, data una soluzione φ , in generale non ogni tempo t può essere assunto quale istante iniziale e che quindi a volte è necessario limitare l'insieme degli istanti iniziali.

SISTEMI DINAMICI 2

Concetto di *vicinanza*

- Vicinanza di configurazioni (*metrica* in X)

$$\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

- Vicinanza di valori iniziali (*metrica* in X_0)

$$\rho_0 : X_0 \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

- Vicinanza di moti (*metrica* in S)

$$\rho_s : S \times S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \sup_{t \in T} \rho(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$$

Osservazioni

- ☞ Una metrica generalizza il concetto di *distanza*: ad ogni coppia di elementi dello spazio distinti associa quindi un numero reale strettamente positivo e tale corrispondenza deve risultare simmetrica e deve soddisfare la disuguaglianza triangolare.
- ☞ Gli interni sferici indotti da una metrica costituiscono una base per munire lo spazio di una struttura *topologica*, la struttura minima necessaria per i concetti di *limite* e di *continuità*.
- ☞ Se invece di una metrica si introduce più semplicemente un funzionale strettamente positivo, i corrispondenti interni sferici non muniscono lo spazio di una struttura topologica. È però possibile aggiungere ulteriori interni, costruiti a partire dagli interni sferici, in modo tale da ottenere una base per una struttura topologica.
- ☞ Può essere conveniente assumere metriche diverse per i concetti di vicinanza negli spazi delle configurazioni e dei valori iniziali.
- ☞ Ad un moto di istante iniziale t_0 è richiesto di essere continuo in t_0 , nel senso che $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_{t_0}(t) = \varphi(t_0)$. Il valore iniziale deve quindi poter essere recuperato per estensione continua dai valori che il moto assume all'interno dell'intervallo di tempo T .

SISTEMI DINAMICI ③

Alcuni ulteriori concetti

- *Grafico* di un moto

insieme delle coppie $(t, \varphi_{t_0}(t))$

- *Orbita* di un moto (proiezione della traiettoria su X)

insieme dei valori $\varphi_{t_0}(t)$

- *Soluzione stazionaria* (indipendente dal tempo)

$\varphi_{t_0}(t) = \varphi(t_0)$ per ogni t

- *Soluzione nulla* (identicamente coincidente con la configurazione nulla)

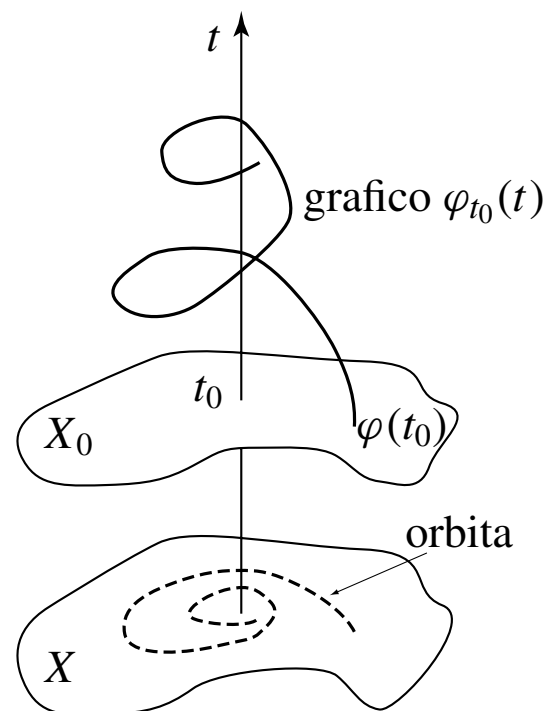
$\varphi_{t_0}(t) = 0$ per ogni t

- *Soluzione periodica* (di periodo s)

$\varphi_{t_0}(t) = \varphi_{t_0}(t + s)$ per ogni t

Osservazioni

- ☞ Una soluzione stazionaria è indipendente dal tempo ed è soluzione di un problema statico (problema di valori al contorno).



SISTEMI DINAMICI 4

Esistenza e Unicità

- *Esistenza* della soluzione di tempo iniziale t_0 e valore iniziale x_0

Esiste φ tale che $\varphi(t_0) = x_0$

- *Unicità* della soluzione di tempo iniziale t_0 e valore iniziale x_0

Al più esiste una sola φ tale che $\varphi(t_0) = x_0$

Osservazioni

- ☞ Nel caso di una soluzione stazionaria, il problema dell'unicità può essere visto in due modi diversi e non equivalenti: unicità del problema statico oppure unicità del sottostante problema dinamico in cui occorre mettere in conto non solo i valori al contorno ma anche i valori iniziali.
- ☞ Se si considera l'insieme $M(t_0, x_0)$ dei moti φ_{t_0} tali che $\varphi(t_0) = x_0$, l'esistenza richiede che $M(t_0, x_0)$ contenga almeno un elemento mentre l'unicità richiede che contenga al più un elemento.
- ☞ L'insieme $M(t_0, x_0)$ permette di definire la mappa $M_{t_0} : X_0 \rightarrow 2^S, x_0 \mapsto M(t_0, x_0)$ che al valore iniziale x_0 generico (al tempo iniziale t_0 fisso) associa il corrispondente insieme di soluzioni. Con 2^S si è inteso l'insieme potenza di S (insieme dei sottoinsiemi di S).

STABILITÀ DI LIAPUNOV ①

- Affinchè vi sia *stabilità secondo Liapunov* occorre che moti di condizioni iniziali vicine restino vicini ad ogni istante.
- Se la misura della vicinanza non diverge nell'intervallo dei tempi iniziali si dice che la stabilità è *uniforme*.
- Se i due moti tendono a coincidere al progredire del tempo si dice che la stabilità è *asintotica*.
- Se una soluzione non è stabile secondo Liapunov si dice che è *instabile secondo Liapunov*

Osservazioni

- ☞ Perturbazioni che agiscono su un sistema meccanico possono essere assimilate a variazioni delle condizioni iniziali. Quindi la richiesta di stabilità di Liapunov equivale a richiedere che *piccole* perturbazioni non modifichino *essenzialmente* il moto del sistema.
- ☞ Nella letteratura scientifica esistono definizioni di stabilità che differiscono da quella di Liapunov in modo sostanziale. La scelta della definizione della stabilità, così come delle misure che rendono operative le definizioni, dipende in ultima analisi dal problema particolare oggetto di studio. Il criterio di Liapunov viene tuttora considerato il criterio più generale per lo studio della stabilità e ad esso vengono ricondotti, quando possibile, i criteri tradizionali utilizzati in campo strutturale.
- ☞ La stabilità di una soluzione espressa attraverso il concetto di vicinanza dei moti che si sviluppano a seguito di piccole perturbazioni, *non è sufficiente* ad inferire quella che si potrebbe chiamare *stabilità reale* e che richiede che *perturbazioni reali* non modifichino *essenzialmente* il moto. In un caso concreto occorre quindi non solo conoscere se il moto è stabile secondo Liapunov, ma anche l'influenza delle perturbazioni reali sul moto.
- ☞ Il concetto di stabilità uniforme è importante nell'ambito dei materiali con caratteristiche meccaniche dipendenti dal tempo, come i materiali visco-elastici.

STABILITÀ DI LIAPUNOV ②

Con riferimento alle metriche:

ρ_0 nell'insieme delle condizioni iniziali X_0

ρ nell'insieme delle configurazioni X

ρ_s nell'insieme delle soluzioni S

- Una soluzione φ è detta *stabile secondo Liapunov* se e solo se per ogni $t_0 \in T_0$, $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ e $\psi \in S$ esiste un $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\rho_0(\psi(t_0), \varphi(t_0)) < \delta \Rightarrow \rho_s(\psi_{t_0}, \varphi_{t_0}) < \epsilon.$$

- Una soluzione stabile φ è detta *uniformemente stabile* nell'intervallo T_0 se δ non dipende da t_0 .
- Una soluzione stabile φ è detta *asintoticamente stabile* se e solo se esiste un γ positivo tale che

$$\rho_0(\psi(t_0), \varphi(t_0)) < \gamma \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\psi(t), \varphi(t)) = 0.$$

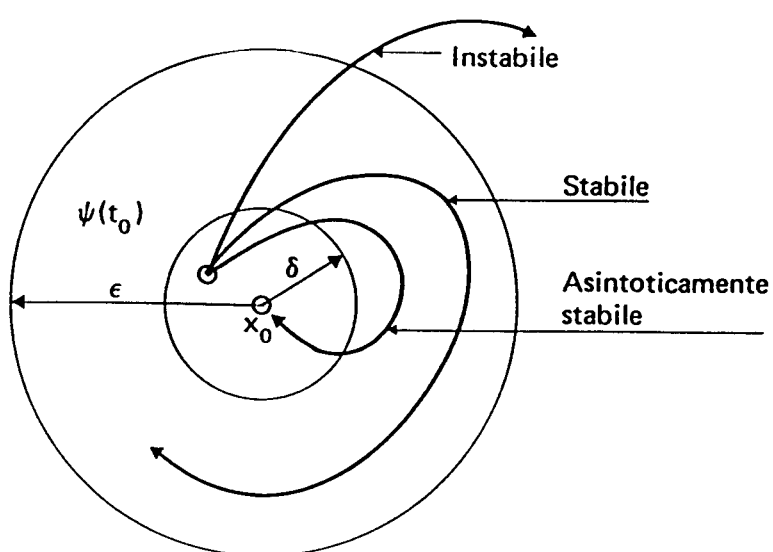
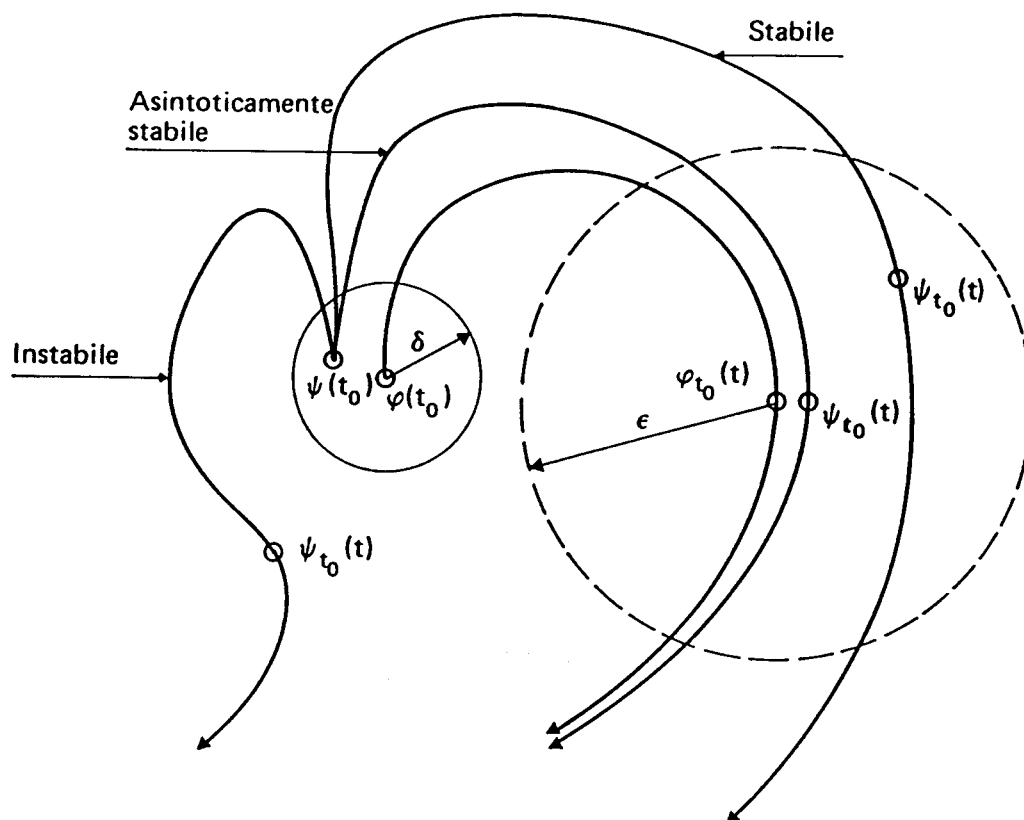
- Una soluzione φ è *instabile secondo Liapunov* se e solo se esistono un $t_0 \in T_0$ e un $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tali che per ogni $\delta \in \mathbb{R}^+$ esiste una soluzione $\psi \in S$ per la quale sia

$$\rho_0(\psi(t_0), \varphi(t_0)) < \delta \quad \text{e} \quad \rho_s(\psi_{t_0}, \varphi_{t_0}) \geq \epsilon$$

Osservazioni

- ☞ Dalla stabilità di un moto di istante iniziale t_0 e configurazione iniziale x_0 segue immediatamente la sua unicità.
- ☞ Se la soluzione φ è stabile, l'applicazione $x_0 \mapsto M(t_0, x_0)$ è continua in corrispondenza del moto φ_{t_0} .

STABILITÀ DI LIAPUNOV ③



STABILITÀ DI LIAPUNOV 4

Dipendenza dalla metrica

- Se la coppia di metriche (ρ_0, ρ) discende da una coppia di *norme* $(\|\cdot\|_0, \|\cdot\|)$, una soluzione stabile rispetto ad una coppia di norme è stabile nei confronti di tutte le coppie di norme equivalenti.
- Se il sistema dinamico è discreto, e quindi X e X_0 sono di dimensione finita, tutte le norme sono equivalenti e ne consegue che la stabilità *non dipende* dalla coppia di norme prescelte.
- Se il sistema dinamico è continuo non tutte le norme sono equivalenti e ne consegue che la stabilità *dipende* dalla coppia di norme prescelte.

Osservazioni

- ☞ Affinchè due coppie di metriche (ρ_0, ρ) e (ρ'_0, ρ') siano *equivalenti* nel senso della stabilità occorre che esistano quattro numeri positivi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tali che :

$$\alpha \rho'_0(x_0, y_0) \leq \rho_0(x_0, y_0) \leq \beta \rho'_0(x_0, y_0) \quad \text{per ogni } x_0, y_0 \in X_0,$$

$$\gamma \rho'(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \delta \rho'(x, y) \quad \text{per ogni } x, y \in X.$$

- ☞ La metrica ρ associata alla norma $\|\cdot\|$ è definita ponendo $\rho(x, y) = \|x - y\|$.
- ☞ Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono equivalenti se e solo se esistono due numeri positivi α e β tali che

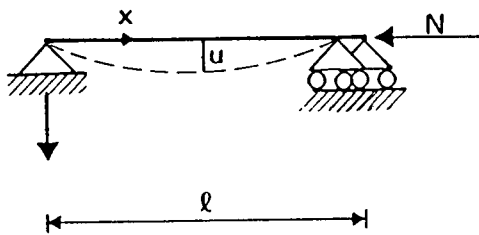
$$\alpha \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \beta \|\cdot\|_1.$$

- ☞ Una delle differenze fondamentali tra i sistemi discreti e i sistemi continui riguarda il concetto di compattezza. In uno spazio normato di dimensione infinita la superficie sferica unitaria e la sfera unitaria chiusa non sono compatte. Questo fatto ha tra l'altro la conseguenza che una funzione limitata inferiormente (superiormente) non ha in generale minimo (massimo) in una sfera unitaria chiusa. Infatti, affinchè il minimo (massimo) esista necessariamente occorre che il dominio in cui la funzione è limitata sia compatto (teorema di Weierstrass).

STABILITÀ DI LIAPUNOV ⑤

Un esempio di sistema dinamico

- **Sistema Dinamico:** Trave elastica assialmente rigida incernierata alle due estremità e soggetta ad uno sforzo costante di compressione inferiore al carico critico euleriano.



$$EJ u^{IV} + Nu'' + \mu \ddot{u} = 0$$

$$N < \pi^2 EJ / l^2$$

$$T_0 = T = [0, +\infty)$$

$$(u, v) \in X \iff u, v \in \{f \in C^4[0, l] / f(x) = f''(x) = 0 \text{ per } x = 0, l\}$$

$$(u, v) \in X_0 \iff u(x) = c \sin n(\pi x / l), v(x) = 0, \text{ con } c \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

- **Una soluzione:**

$$u(x, t) = C \sin n \frac{\pi x}{l} \cos \beta_n t,$$

$$\beta_n^2 = \frac{EJ}{\mu} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left[\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 - \frac{N}{EJ} \right],$$

dove μ rappresenta la massa (costante) per unità di lunghezza.
Poichè $(n\pi/l)^2 > N/EJ$, β_n^2 è senz'altro reale positivo.

STABILITÀ DI LIAPUNOV ⑥

Un esempio di dipendenza dalla metrica

- **Una norma che rende instabile la soluzione indeformata equilibrata $u(x, t) = 0$:**

$$\|(u, v)\|_1 = \sup_{x \in [0, \ell]} \{|u| + |v|\}$$

dove v è la velocità. I valori iniziali corrispondenti alla soluzione generica sono $u \neq 0$ e $v = 0$.

- **Distanze della soluzione generica da quella indeformata:**

Se ρ_0 e ρ sono ottenuti da $\|\cdot\|_1$:

$$\rho_0((u, 0), (0, 0)) = C, \quad \rho_s((u, \dot{u}), (0, 0)) = C(1 + \beta_n)$$

Dato che si può limitare la costante C senza che con ciò resti limitata la quantità $C(1 + \beta_n)$ ne segue l'instabilità della configurazione indeformata.

- **La soluzione indeformata equilibrata è stabile se ρ si fa discendere dalla norma standard:**

$$\|(u, v)\|_2 = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(E J u''^2 - N u'^2 + \mu v^2 \right) dx$$

che rappresenta l'*energia* della configurazione.

STABILITÀ DI LIAPUNOV 7

Secondo metodo di Liapunov

- **Funzione di Liapunov:** È un funzionale positivo definito nelle coppie di configurazioni, variabile nel tempo e dipendente dal tempo iniziale

$$F_{t_0,t} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

- Dal funzionale $F_{t_0,t}$ si ottiene un funzionale positivo definito nelle coppie di soluzioni e dipendente dal solo tempo iniziale

$$F_{t_0} : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad (\varphi, \psi) \mapsto \sup_{t \in T} F_{t_0,t}(\varphi(t), \psi(t))$$

- **Teorema:** Una soluzione $\varphi \in S$ è stabile se e solo se esiste una funzione di Liapunov $F_{t_0,t}$ tale che per ogni $t_0 \in T_0$ valgano le due proprietà:

- 1) La soluzione φ è stabile nelle metriche ρ_0 e F_{t_0} . Ovverossia, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ (dipendente in generale da ϵ e t_0) tale che

$$\rho_0(\psi(t_0), \varphi(t_0)) < \delta \Rightarrow F_{t_0}(\psi_{t_0}, \varphi_{t_0}) < \epsilon \quad \text{per ogni } \psi \in S$$

- 2) Lo spazio delle soluzioni S munito della topologia indotta da F_{t_0} è *immerso*, in senso topologico, nello stesso spazio munito della topologia indotta da ρ . Ovverossia, per ogni $\eta > 0$ esiste un $\xi > 0$ (dipendente in generale da η e t_0) tale che

$$F_{t_0}(\psi_{t_0}, \varphi_{t_0}) < \xi \Rightarrow \rho_s(\psi_{t_0}, \varphi_{t_0}) < \eta \quad \text{per ogni } \psi \in S$$

STABILITÀ DI LIAPUNOV 8

Secondo metodo di Liapunov

Osservazioni

- ☞ Se F_{t_0} non è una metrica, ma solo un funzionale positivo, è sempre possibile istituire una topologia adatta allo scopo.
- ☞ La funzione di Liapunov $F_{t_0,t}$ è completamente arbitraria, a parte il fatto che per implicare la stabilità deve soddisfare le due condizioni indicate nel teorema. Nel caso dello studio della stabilità di soluzioni stazionarie di sistemi conservativi può essere fatta coincidere, con opportune cautele, con il funzionale dell'energia potenziale totale.
- ☞ Nel caso dei sistemi discreti, il teorema può essere semplificato. Se $X = \mathbb{R}^n$, e ρ_0 e ρ sono metriche indotte da norme euclidee, la soluzione φ è stabile se e solo se esiste un funzionale $F_{t_0,t}$ positivo su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, ivi continuo e tale che la funzione $t \mapsto F_{t_0,t}(\psi_{t_0}(t), \varphi_{t_0}(t))$ sia non crescente.

CAOS 1

Attrattori

- Un attrattore A con bacino di attrazione B_A contenente A rappresenta un sottoinsieme dello spazio delle configurazioni X che gode delle seguenti proprietà
 1. Per ogni valore iniziale x_0 in B_A la soluzione corrispondente tende ad A ;
 2. Se il punto iniziale x_0 è in A allora la soluzione corrispondente è sempre in A . Questa proprietà implica che A è un insieme di orbite.
 3. L'insieme F è minimale, nel senso che esiste una soluzione, di punto iniziale $x_0 \in F$, densa in F . Questa proprietà dice che F non può essere decomposto in attrattori più semplici.
- Un attrattore F di un sistema dinamico viene detto *strano* se è di tipo *frattale*, cioè se ha dimensione non intera.

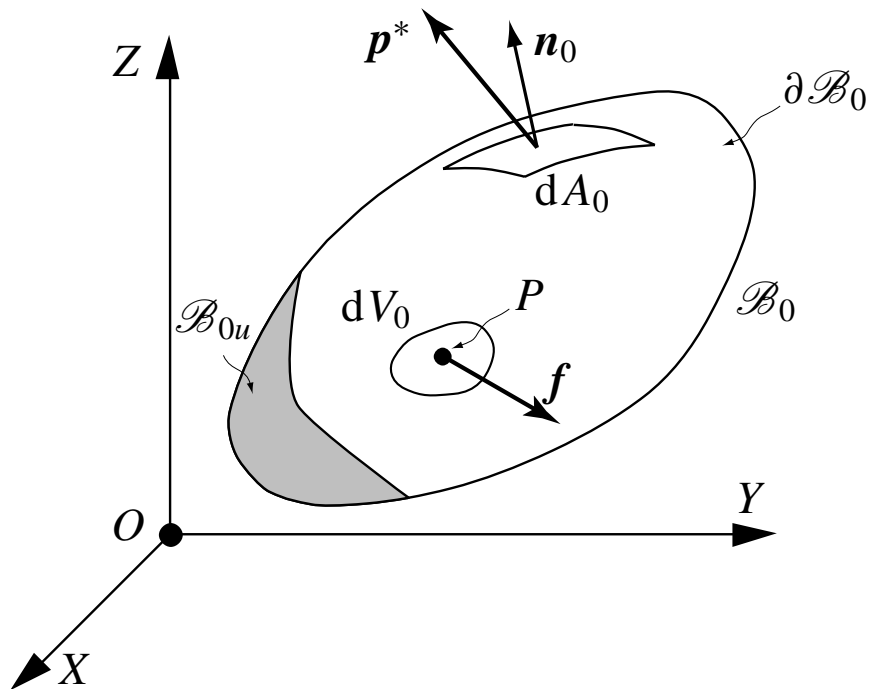
Caos

- Con il termine di caos si intende un comportamento stocastico che si verifica in un sistema deterministico (nel nostro caso un sistema dinamico).
- Se un sistema dinamico ha un attrattore F strano e se le soluzioni sono fortemente sensibili ai dati iniziali (nel bacino di attrazione B_F di F) è molto probabile che il sistema dinamico presenti un comportamento *caotico*.

Osservazioni

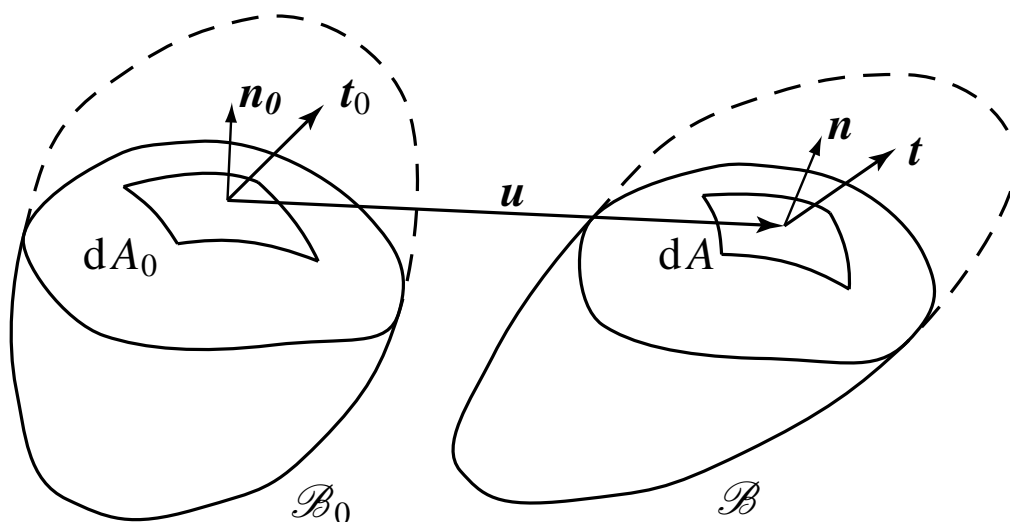
- ☞ Le soluzioni sono fortemente sensibili ai dati iniziali (nel bacino di attrazione B_F di F) se esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x_0 \in B_F$ ci sono punti $y_0 \in B_F$ arbitrariamente vicini a x_0 ai quali corrispondono soluzioni φ_y che si allontanano dalla soluzione φ_x corrispondente a x_0 più di δ . In altri termini deve essere $|\varphi_y(t) - \varphi_x(t)| > \delta$ per t sufficientemente grande.
- ☞ Se le soluzioni sono sensibili ai valori iniziali sono anche instabili secondo Liapunov. Infatti in tal caso non è possibile rendere vicine le soluzioni prendendo valori iniziali vicini.
- ☞ Le instabilità di tipo non caotico si differenziano in modo essenziale da quelle di tipo caotico. Nel primo caso, variando la condizione iniziale che genera la soluzione instabile si ottiene un moto che cambia di poco variando di poco la nuova condizione iniziale. Nel secondo caso, variando di poco la nuova condizione iniziale il moto cambia di molto sul lungo periodo.
- ☞ La sensibilità ai valori iniziali rende le soluzioni (deterministiche) del sistema dinamico inaffidabili nel lungo periodo dato che i valori iniziali nei casi concreti sono sempre soggetti ad una certa imprecisione.
Inoltre non è possibile approssimare numericamente una soluzione nel lungo periodo.
- ☞ Nonostante la sensibilità ai dati iniziali, resta comunque la possibilità di previsioni nel “breve” periodo, se il breve periodo ha un significato pratico.
Non solo, il comportamento caotico è spesso accompagnato da regolarità che restano deterministiche anche nel lungo periodo.

STATICA DEI SOLIDI ELASTICI ①



- Solido iperelastico di configurazione materiale $\mathcal{B}_0$ di contorno $\partial\mathcal{B}_0$ soggetto a
 - 1) forze di volume $\mathbf{f}(P)$;
 - 2) forze superficiali $\mathbf{p}^*(P)$ (per unità di superficie indeformata) sulla parte di contorno $\partial\mathcal{B}_{0f}$;
 - 3) spostamenti imposti $\mathbf{u}^*(P)$ sulla parte restante di contorno $\partial\mathcal{B}_{0u}$;
 - 4) Spostamenti $\mathbf{u}_0$ e velocità $\mathbf{v}_0$ iniziali (al tempo t_0).

STATICA DEI SOLIDI ELASTICI ②



- La configurazione deformata è individuata dal campo degli spostamenti u .
- La deformazione è individuata dal *gradiente degli spostamenti* $\mathbf{H}$ e dal *tensore di deformazione di Green-Lagrange* $\mathbf{E}$

$$\begin{cases} \mathbf{H} = \text{Grad } u \\ \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \end{cases}$$

- La *formula di Nanson* esprime la relazione tra area deformata $dA\mathbf{n}$ e area indeformata $dA_0\mathbf{n}_0$

$$dA\mathbf{n} = dA_0 [\det(\mathbf{I} + \mathbf{H})] (\mathbf{I} + \mathbf{H}^{-T}) \mathbf{n}_0$$

- La tensione interna $\mathbf{t}$ nel solido deformato è individuata dal *Primo tensore di Piola-Kirchhoff degli sforzi* $\mathbf{P}$ in funzione dell'area indeformata $dA_0\mathbf{n}_0$

$$dA\mathbf{t} = \mathbf{P}(dA_0\mathbf{n}_0)$$

STATICA DEI SOLIDI ELASTICI ③

Tensione materiale

- La *tensione materiale* $\mathbf{t}_0$ è introdotta portando la tensione $\mathbf{t}$ nella configurazione materiale tramite la deformazione

$$dA_0 \mathbf{t}_0 = dA (\mathbf{I} + \mathbf{H}^{-1}) \mathbf{t}$$

- La tensione materiale $\mathbf{t}_0$ è individuata dal *Secondo tensore di Piola-Kirchhoff degli sforzi* $\mathbf{S}$ in funzione dell'area indeformata $dA_0 \mathbf{n}_0$

$$dA_0 \mathbf{t}_0 = \mathbf{S} (dA_0 \mathbf{n}_0)$$

Equilibrio

- Equilibrio materiale espresso tramite il primo tensore di Piola-Kirchhoff:

$$\text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

- Equilibrio materiale espresso tramite il secondo tensore di Piola-Kirchhoff:

$$\text{Div} [(\mathbf{I} + \mathbf{H}) \mathbf{S}] + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

Legame costitutivo elastico

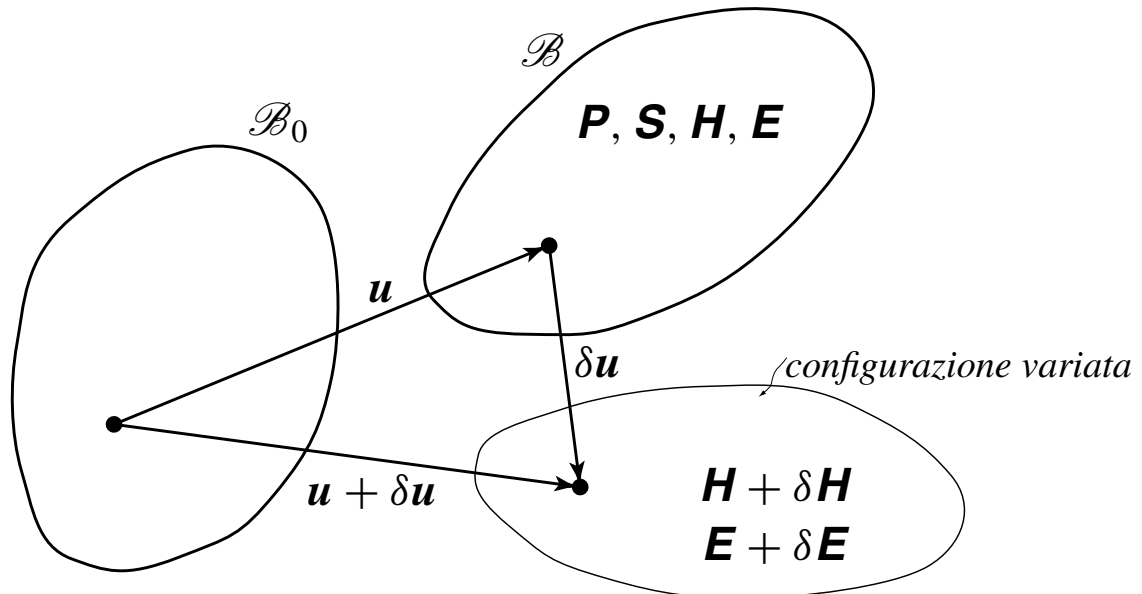
- Il legame costitutivo è individuato tramite l'*energia elastica di deformazione per unità di volume* w , funzione della deformazione:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{H}} \quad (\text{primo tensore di Piola-Kirchhoff})$$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}} \quad (\text{secondo tensore di Piola-Kirchhoff})$$

STATICA DEI SOLIDI ELASTICI 4

Dualità statico-cinematica



- Principio dei lavori virtuali materiale espresso tramite il primo tensore di Piola-Kirchhoff:

$$\int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV_0 = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{H} \, dV_0$$

- Principio dei lavori virtuali materiale espresso tramite il secondo tensore di Piola-Kirchhoff:

$$\int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV_0 = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E} \, dV_0$$

dove $\delta \mathbf{E}$ è la variazione prima del tensore di deformazione di Green-Lagrange:

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\delta \mathbf{H} + \delta \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \delta \mathbf{H} + \delta \mathbf{H}^T \mathbf{H})$$

STATICA DEI SOLIDI ELASTICI 5

Equazioni della Elastostatica

- Equazioni valide nella configurazione materiale $\mathcal{B}_0$

$$\begin{cases} \mathbf{H} = \text{Grad} \mathbf{u} \\ \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \end{cases} \quad (\text{congruenza})$$

$$\begin{cases} \text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \\ \text{Div} [(\mathbf{I} + \mathbf{H}) \mathbf{S}] + \mathbf{f} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{equilibrio})$$

$$\mathbf{P} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{H}} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{S} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}} \quad (\text{legame costitutivo})$$

$$\mathbb{A} = \frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{H}^2} \quad \text{oppure} \quad \mathbb{C} = \frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{E}^2} \quad (\text{Tensori di elasticità})$$

- Condizioni sul contorno materiale del solido valide sulla porzione caricata $\partial \mathcal{B}_{0f}$ e sulla porzione vincolata $\partial \mathcal{B}_{0u}$

$$\begin{cases} \mathbf{p}^* = \mathbf{P} \mathbf{n}_0 \\ \mathbf{p}^* = (\mathbf{I} + \mathbf{H}) \mathbf{S} \mathbf{n}_0 \end{cases} \quad \text{su } \partial \mathcal{B}_{0f}$$

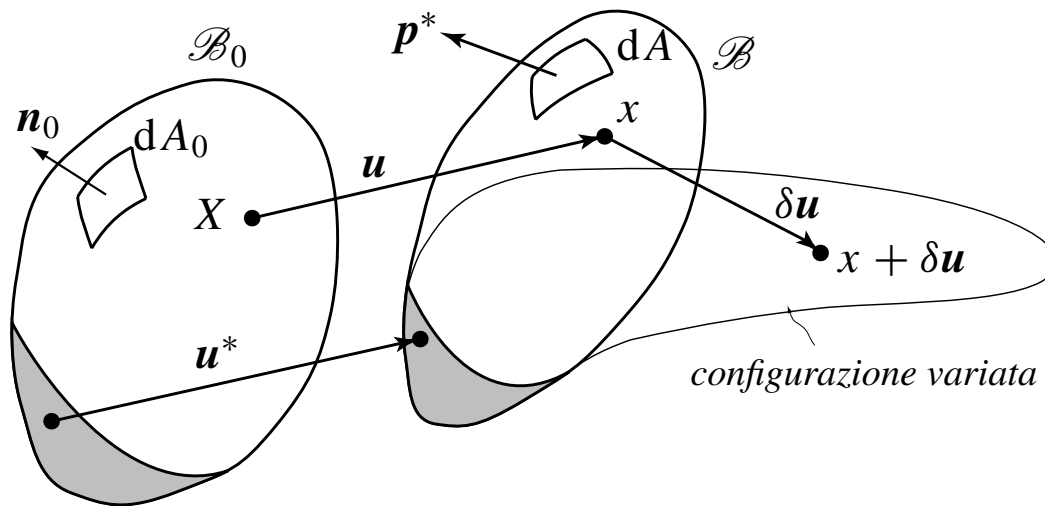
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad \text{su } \partial \mathcal{B}_{0u}$$

Osservazioni

- ☞ Ricordiamo che le equazioni che deve soddisfare il problema fisico sono equazioni integrali (di bilancio) e che le equazioni differenziali di equilibrio (indefinito) richiedono condizioni aggiuntive di differenziabilità, condizioni che non appartengono al problema fisico.

STATICA DEI SOLIDI ELASTICI ⑥

Principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale



- Forze esterne conservative e dipendenti da un potenziale V
- *Energia potenziale totale* P

$$P = W - V$$

- Variazione prima dell'energia elastica di deformazione globale W

$$\delta W = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{H} dV_0 = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E} dV_0$$

- La soluzione del problema elastico rende stazionaria l'energia potenziale totale P

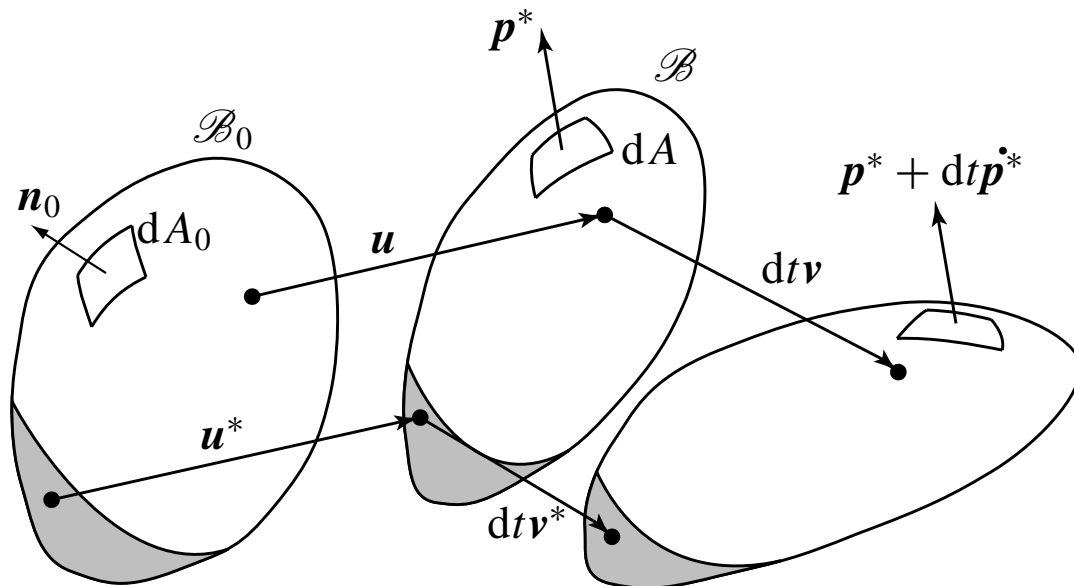
$$\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{H} dV_0 - \delta V = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E} dV_0 - \delta V = 0$$

- Se si introduce l'operatore che agisce sulle variazioni $\delta \mathbf{u}$ per fornire la parte prima dell'incremento di P (*derivata prima* P' del funzionale energia potenziale totale)

$$P' \delta \mathbf{u} = 0 \quad \text{per ogni } \delta \mathbf{u} \text{ ammissibile}$$

STATICA DEI SOLIDI ELASTICI 7

Problema incrementale quasi-statico



- Equazioni valide nella configurazione materiale $\mathcal{B}_0$

$$\begin{cases} \text{Div } \dot{\mathbf{P}} + \dot{\mathbf{f}} = \mathbf{0} & \text{(equilibrio)} \\ \dot{\mathbf{P}} = \mathbb{A}[\text{Grad } \mathbf{v}] & \text{(legame costitutivo)} \end{cases}$$

dove $\text{Grad } \mathbf{v}$ è il gradiente materiale del campo delle velocità.

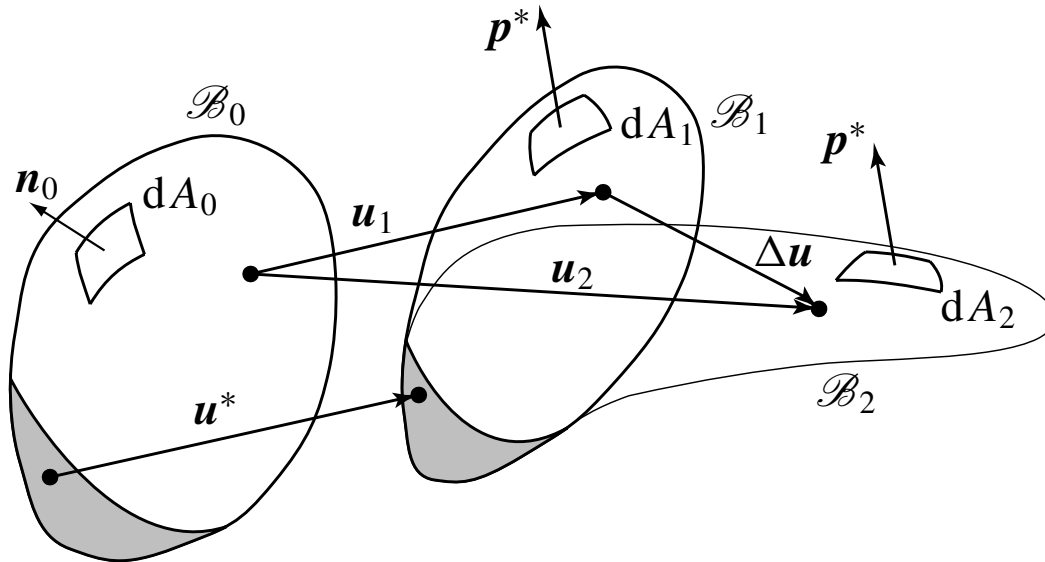
- Condizioni sul contorno materiale del solido valide sulla porzione caricata $\partial \mathcal{B}_{0f}$ e sulla porzione vincolata $\partial \mathcal{B}_{0u}$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}^* &= \dot{\mathbf{P}} \mathbf{n}_0 & \text{su } \partial \mathcal{B}_{0f} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}^* & \text{su } \partial \mathcal{B}_{0u} \end{aligned}$$

dove $\mathbf{v}^*$ sono le velocità impresse sulla parte di contorno $\partial \mathcal{B}_{0u}$.

UNICITÀ DELLA SOLUZIONE ①

Problema elastostatico



- Se le forze $\mathbf{p}^*$ applicate al contorno sono indipendenti dalla deformazione, due soluzioni $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ impongono $\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 = 0$ sulla quota di contorno $\partial\mathcal{B}_{0u}$ e $\mathbf{t}_2^* - \mathbf{t}_1^* = 0$ sulla quota di contorno $\partial\mathcal{B}_{0f}$, dove $\mathbf{t}^*$ rappresenta la tensione per unità di area indeformata

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1, \Delta\mathbf{t}^* = \mathbf{t}_2^* - \mathbf{t}_1^* \Rightarrow \int_{\partial\mathcal{B}_0} \Delta\mathbf{t}^* \cdot \Delta\mathbf{u} \, dA_0 = 0$$

- Condizione sufficiente di unicità (Hill), espressa in termini di energia di deformazione specifica

$\int_{\mathcal{B}_0} \Delta \frac{\partial w}{\partial \mathbf{H}} \cdot \Delta \mathbf{H} \, dV_0 \neq 0$	per ogni $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ ammissibili, oppure, equivalentemente, per ogni campo $\Delta\mathbf{u}$ di spostamenti non nullo soddisfacente le condizioni omogenee $\Delta\mathbf{u} = 0$ sulla quota $\partial\mathcal{B}_{0u}$ di contorno
---	--

UNICITÀ DELLA SOLUZIONE ②

Problema elastostatico □ Osservazioni

- ☞ La condizione $\int_{\mathcal{B}_0} \Delta \frac{\partial w}{\partial \mathbf{H}} \cdot \Delta \mathbf{H} dV_0 \neq 0$ non può essere ridotta ad una forma del tipo $\int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{H}} \cdot \mathbf{H} dV_0 \neq 0$ poiché $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{H}}$ non è una relazione lineare.
- ☞ Se l'energia di deformazione specifica $w(\mathbf{H})$, espressa in funzione del gradiente degli spostamenti $\mathbf{H}$, è strettamente convessa allora la soluzione è unica.
- ☞ Ricordiamo che $w(\mathbf{H})$ è convessa se e solo se

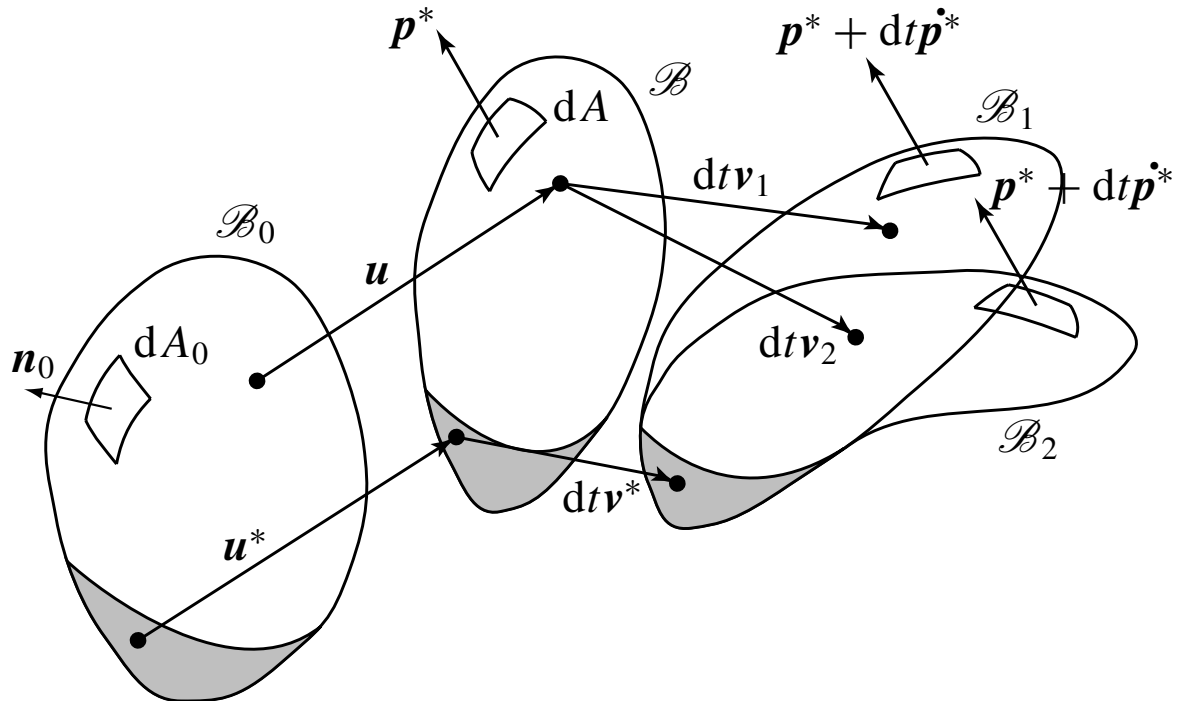
$$w(\mathbf{H}_1) + w(\mathbf{H}_2) \geq 2w\left(\frac{\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2}{2}\right), \quad \text{per ogni } \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2.$$

Inoltre è strettamente convessa se il segno di uguaglianza vale solo se $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$.

- ☞ Se w ha, in qualche senso, derivata prima continua e derivata seconda continua a tratti, affinché sia strettamente convessa è necessario e sufficiente che la matrice Hessiana $\frac{\partial^2 w}{\partial H^i_j \partial H^h_k}$ (matrice delle componenti del tensore di elasticità $\mathbb{A}$) sia definita positiva per ogni $\mathbf{H}$. Se lo è solo localmente si dice *localmente convessa*.
- ☞ Richiedere che l'energia $w(\mathbf{H})$ sia strettamente convessa è molto restrittivo e contrario al comportamento reale dei solidi che presentano sia in grandi che moderate deformazioni il fenomeno della perdita di unicità e della conseguente diramazione dell'equilibrio.
- ☞ Relativamente al comportamento reale dei solidi il problema non è quello dell'unicità della soluzione del problema elastostatico, ma bensì quello della unicità della soluzione del problema incrementale. In altre parole, si vuole determinare sotto quali condizioni si ottiene una soluzione unica incrementando le condizioni al contorno e le forze di volume a partire da uno stato di deformazione finita preesistente.

UNICITÀ DELLA SOLUZIONE ③

Problema incrementale quasi-statico



- Se gli incrementi $\dot{\mathbf{p}}^*$ delle forze applicate al contorno sono indipendenti dalla deformazione, due soluzioni $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ impongono $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = 0$ sulla quota di contorno $\partial\mathcal{B}_{0u}$ e $\dot{\mathbf{t}}_2^* - \dot{\mathbf{t}}_1^* = 0$ sulla quota di contorno $\partial\mathcal{B}_{0f}$, dove $\dot{\mathbf{t}}$ rappresenta l'incremento di tensione per unità di area indeformata

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \Delta \dot{\mathbf{t}}^* = \dot{\mathbf{t}}_2^* - \dot{\mathbf{t}}_1^* \Rightarrow \int_{\partial\mathcal{B}_0} \Delta \dot{\mathbf{t}}^* \cdot \Delta \mathbf{v} dA_0 = 0$$

- Condizione sufficiente di unicità, espressa in termini del tensore di elasticità

$$\int_{\mathcal{B}_0} \text{Grad } \mathbf{v} \cdot \mathbb{A}[\text{Grad } \mathbf{v}] dV_0 \neq 0$$

per ogni campo $\mathbf{v}$ di velocità non nullo soddisfacente le condizioni omogenee $\mathbf{v} = 0$ sulla quota $\partial\mathcal{B}_{0u}$ di contorno

UNICITÀ DELLA SOLUZIONE ④

Problema incrementale □ Osservazioni

- ☞ Se per un certo $\mathbf{v}^*$ è soddisfatta la condizione necessaria per l'esistenza di due soluzioni, tenendo conto che $\mathbf{v}^*$ è omogenea sul contorno e che $\dot{\mathbf{P}}^* = \mathbb{A}[\text{Grad } \mathbf{v}^*]$, risulta

$$-\int_{\mathcal{B}_0} \text{Div } \dot{\mathbf{P}}^* \cdot \mathbf{v}^* dV_0 + \int_{\partial \mathcal{B}_{0f}} \dot{\mathbf{P}}^* \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v}^* dA_0 = 0.$$

Da questa non si può dedurre $\text{Div } \dot{\mathbf{P}}^* = 0$ in $\mathcal{B}_0$ e $\dot{\mathbf{P}}^* \mathbf{n}_0$ su $\partial \mathcal{B}_{0f}$ poichè nè $\mathcal{B}_0$ è un volume arbitrario, nè $\mathbf{v}^*$ è un vettore arbitrario. Quindi $\mathbf{v}^*$ non è necessariamente soluzione del problema incrementale omogeneo. Ne consegue che se $\mathbf{v}_1$ è soluzione del problema incrementale non è detto a priori che lo sia $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}^*$.

- ☞ È chiaro che la condizione (Hill)

$$\int_{\mathcal{B}_0} \text{Grad } \mathbf{v} \cdot \mathbb{A}[\text{Grad } \mathbf{v}] dV_0 > 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \neq 0 \text{ omogeneo su } \partial \mathcal{B}_{0u} \quad (1)$$

è condizione sufficiente di unicità. Tale condizione risulterà anche condizione sufficiente di stabilità della configurazione deformata preesistente, qualora le forze applicate siano indipendenti dalla deformazione (che poi è la stessa condizione che la rende valida quale condizione sufficiente di unicità).

- ☞ Per rendere valida la condizione (1) è sufficiente che il tensore di elasticità $\mathbb{A}$ sia definito positivo, il che coincide con l'affermazione che l'energia elastica di deformazione deve essere localmente convessa.
- ☞ Sotto l'ipotesi di validità della condizione (1), la soluzione (unica) del problema incrementale si può ottenere minimizzando nell'insieme delle velocità soddisfacenti la condizione $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$ sulla quota $\partial \mathcal{B}_{0u}$ del contorno il seguente funzionale della velocità (Hill)

$$J(\mathbf{v}) = \int_{\mathcal{B}_0} \text{Grad } \mathbf{v} \cdot \mathbb{A}[\text{Grad } \mathbf{v}] dV_0 - 2 \left(\int_{\mathcal{B}_{0f}} \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{v} dA_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \dot{\mathbf{f}}^* \cdot \mathbf{v} dV_0 \right).$$

STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO ①

Caratterizzazione del sistema elastodinamico

- Sistema elastico continuo soggetto a forze esterne conservative derivabili quindi da un potenziale $V(\mathbf{u})$ e con vincoli perfetti lisci.
- Insieme X delle configurazioni costituito dalle coppie spostamento-velocità $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ soddisfacenti le condizioni cinematiche su $\partial \mathcal{B}_{0u}$.
- Insieme T_0 degli istanti iniziali coincidente con l'intervallo T di variazione del tempo.
- Insiemi X_{t_0} dei valori iniziali coincidenti con X .
- Insieme S delle soluzioni costituito dalle coppie $(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ tali da soddisfare le equazioni della elastodinamica.
- Energia totale $E(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ del sistema somma dell'energia potenziale totale $P(\mathbf{u})$ e dell'energia cinetica $K(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \mu_0 \mathbf{v}^2 dV_0$

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = P(\mathbf{u}) + K(\mathbf{v})$$

- Soluzioni stazionarie, di cui si ricerca la condizione di stabilità, caratterizzate dall'essere

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0, \quad \text{per ogni } t \in T$$

Osservazioni

- ☞ Integrando nel tempo la potenza in entrata nel sistema $P_{\text{input}} = \dot{K} + \dot{W}$ il primo membro acquista il significato di lavoro delle forze esterne e quindi di variazione del potenziale V delle forze e ne discende la conservazione dell'energia totale E lungo una soluzione $(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$

$$E(\mathbf{u}(t_1), \dot{\mathbf{u}}(t_1)) = E(\mathbf{u}(t_2), \dot{\mathbf{u}}(t_2))$$

STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO ②

Teorema di stabilità

Se il funzionale energia potenziale totale P è continuo ed ha un *minimo relativo proprio* in corrispondenza della soluzione stazionaria $\mathbf{u}_0$ allora questa soluzione è stabile uniformemente in T rispetto alle metriche

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 = \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_u + |K(\mathbf{v}_1) - K(\mathbf{v}_2)| && \text{in } X = X_0 \\ \rho_s &= \sup_{t \in T} \left(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_u + \left| K(\dot{\mathbf{u}}_1(t)) - K(\dot{\mathbf{u}}_2(t)) \right| \right) && \text{in } S \end{aligned}$$

dove $\|\mathbf{u}\|_u = \left(\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{u}^2 dV_0 \right)^{1/2}$ rappresenta la norma euclidea nello spazio X_u degli spostamenti ammissibili.

Osservazioni

☞ Il funzionale P ha un minimo relativo proprio in $\mathbf{u}_0$ se esiste $\alpha > 0$ tale che

$$\begin{aligned} 0 < \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_u < \alpha &\Rightarrow P(\mathbf{u}) > P(\mathbf{u}_0), \\ 0 < \beta < \alpha &\Rightarrow \inf_{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_u = \beta} \{P(\mathbf{u}) - P(\mathbf{u}_0)\} > 0 \end{aligned}$$

☞ Il teorema afferma che se P è continuo ed ha un minimo relativo proprio in $\mathbf{u}_0$ allora per ogni $t_0 \in T_0$ ed ogni $\epsilon > 0$ esiste un δ dipendente solo da ϵ tale che

$$\|\mathbf{u}(t_0) - \mathbf{u}_0\|_u + K(\dot{\mathbf{u}}(t_0)) < \delta \Rightarrow \sup_{t \in T} \left\{ \|\mathbf{u}_{t_0}(t) - \mathbf{u}_0\|_u + K(\dot{\mathbf{u}}_{t_0}(t)) \right\} < \epsilon$$

dove $\mathbf{u}_{t_0}$ è il moto di tempo iniziale t_0 e valori iniziali $\mathbf{u}(t_0)$ e $\dot{\mathbf{u}}(t_0)$. In altri termini tale espressione afferma che “piccoli” disturbi, secondo la norma ρ_0 , delle condizioni iniziali originano dei moti confinati in un intorno “piccolo”, secondo la norma ρ_s , della configurazione stazionaria. L'utilizzazione di altre metriche può condurre ad instabilità secondo Liapunov anche in presenza di un minimo proprio.

STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO ③

Teorema del differenziale secondo

Se il funzionale energia potenziale totale P è differenziabile almeno due volte secondo Fréchet in $\mathbf{u}_0$, condizione sufficiente affinché P assuma in $\mathbf{u}_0$ un minimo relativo proprio è che sia

$$P'(\mathbf{u}_0) = 0$$
$$\inf_{\|\mathbf{u}\|_u=1} P''(\mathbf{u}_0)\mathbf{u}\mathbf{u} > 0, \quad \mathbf{u} \in X_u$$

Osservazioni

- ☞ Si considera la funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\alpha \mapsto P(\mathbf{u}_0 + \alpha\mathbf{u})$ per definire la derivata di P in $\mathbf{u}_0$ nella direzione $\mathbf{u}$

$$P'(\mathbf{u}_0)\mathbf{u} = \frac{d}{d\alpha} P(\mathbf{u}_0 + \alpha\mathbf{u})|_{\alpha=0}.$$

- ☞ Se $P'(\mathbf{u}_0)\mathbf{u}$ esiste per ogni $\mathbf{u}$ l'operatore $P'(\mathbf{u}_0) : \mathbf{u} \mapsto P'(\mathbf{u}_0)\mathbf{u}$ è detto *derivata prima* di P . Se poi l'operatore è lineare e continuo allora si dice che “ P è differenziabile secondo Gateau in $\mathbf{u}_0$ ” e l'operatore $P'(\mathbf{u}_0)$ è detto *derivata di Gateau*.

- ☞ Se P è derivabile in $\mathbf{u}_0$ vale la seguente rappresentazione (unica) per ogni $\mathbf{u}$

$$P(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}) - P(\mathbf{u}_0) = P'(\mathbf{u}_0)\mathbf{u} + R(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}), \quad \text{con} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|R(\mathbf{u}_0, \alpha\mathbf{u})|}{\alpha} = 0$$

- ☞ Se il limite $\lim_{\alpha \rightarrow 0} |R(\mathbf{u}_0, \alpha\mathbf{u})|/\alpha = 0$ è uniforme rispetto ad $\mathbf{u}$ si dice che “ P è differenziabile secondo Fréchet in $\mathbf{u}_0$ ” e l'operatore $P'(\mathbf{u}_0)$ è detto *derivata di Fréchet*.

- ☞ Se la derivata prima esiste non solo in un punto $\mathbf{u}_0$ ma almeno in un suo intorno, resta definito l'operatore $P' : \mathbf{u} \mapsto P'(\mathbf{u})$. Quanto detto per $P(\mathbf{u})$ si ripete per $P'(\mathbf{u})$, ottenendo la derivata seconda $P''(\mathbf{u}_0)$ in $\mathbf{u}_0$, e così via per le derivate di ordine superiore. La derivata seconda $P''(\mathbf{u}_0)$ fa corrispondere ad un generico $\mathbf{u}$ la parte lineare della differenza $P'(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}) - P'(\mathbf{u}_0)$. Quindi il numero $P''(\mathbf{u}_0)\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2$ fornisce la variazione a partire da $\mathbf{u}_0$ nella direzione $\mathbf{u}_1$ della variazione di P in direzione di $\mathbf{u}_2$. Il numero $P''(\mathbf{u}_0)\mathbf{u}\mathbf{u}$ fornisce poi la variazione seconda di P a partire da $\mathbf{u}_0$ nella direzione $\mathbf{u}$.

STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO ④

Stabilità di Hadamard

Nella letteratura tecnica relativa alla stabilità delle strutture elastiche soggette a forze conservative, il criterio di stabilità adottato è quello di Hadamard

UNA CONFIGURAZIONE EQUILIBRATA È DETTA STABILE SECONDO HADAMARD SE E SOLO SE L'ENERGIA POTENZIALE HA IN ESSA UN MINIMO RELATIVO ISOLATO NELL'INSIEME DEGLI SPOSTAMENTI AMMISSIBILI FINITI SODDISFACENTI LE CONDIZIONI CINEMATICHE AL CONTORNO.

● Elementi caratterizzanti

1. Corpo iperelastico soggetto a forze conservative, per il quale esistono quindi sia l'energia elastica di deformazione $W(\mathbf{u})$ che l'energia delle forze esterne $-V(\mathbf{u})$, dove $V(\mathbf{u})$ è il potenziale delle forze.
2. Configurazione di equilibrio sotto date forze, soluzione del problema elastostatico (*configurazione fondamentale*).
3. La configurazione fondamentale può essere utilizzata, senza perdita di generalità, quale configurazione $\mathcal{B}_0$ di riferimento lagrangiana (il vettore spostamento $\mathbf{u}$ che individua la configurazione fondamentale è in tal caso nullo).
4. La configurazione fondamentale può essere utilizzata quale livello energetico nullo: $W(\mathbf{0}) = 0$ e $V(\mathbf{0}) = 0$.

STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO 5

Stabilità di Hadamard □ Osservazioni

- ☞ La stabilità di Hadamard utilizza esclusivamente grandezze indipendenti dal tempo. Risulta quindi un criterio di tipo statico.
- ☞ Il classico criterio energetico di stabilità assume la stabilità secondo Hadamard, e cioè il minimo relativo isolato dell'energia potenziale totale, come condizione necessaria e sufficiente per la stabilità secondo Liapunov della configurazione fondamentale

$$\text{Stabilità di Hadamard} \Leftrightarrow \text{Stabilità di Liapunov}$$

- ☞ Per i sistemi continui è stata dimostrata da Koiter, sotto condizioni non troppo restrittive, la sola necessità della stabilità di Hadamard per la stabilità di Liapunov. Un teorema che ne dimostri la sufficienza sotto condizioni non troppo restrittive non è ancora stato fornito. Sono invece noti alcuni controesempi che però risultano di carattere estremamente particolare.
- ☞ Per alcune strutture di ampio uso nella tecnica, come per esempio le *lastre piane* e le *lastre curve ribassate*, è stata fornita da Koiter una dimostrazione della sufficienza del criterio di Hadamard.
- ☞ Se gli spostamenti sulla parte di contorno $\partial\mathcal{B}_{0u}$ dipendono da vincoli cinematicamente non lineari, il problema del minimo relativo isolato dell'energia potenziale totale risulta essere un problema di minimo vincolato. Se invece gli spostamenti sul contorno vincolato sono assunti noti a priori e ricordando che la configurazione fondamentale è stata assunta quale configurazione di riferimento, le condizioni al contorno sugli spostamenti diventano omogenee.
- ☞ Introducendo l'insieme X_u degli spostamenti ammissibili finiti $\mathbf{u}$, la definizione di stabilità di Hadamard può essere riscritta in forma analitica nel modo seguente

Una configurazione equilibrata è stabile secondo Hadamard se e solo se esiste un $\epsilon > 0$ tale che, per ogni $\mathbf{u} \in X_u$

$$\begin{aligned} P(\mathbf{u}) &\geq 0 && \text{se } \|\mathbf{u}\| < \epsilon, \\ P(\mathbf{u}) &= 0 && \text{se e solo se } \mathbf{u} = 0. \end{aligned}$$

STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO ⑥

Teorema di instabilità secondo Hadamard

SE P È DIFFERENZIABILE DUE VOLTE IN CORRISPONDENZA DELLA CONFIGURAZIONE EQUILIBRATA $\mathbf{u}_0$, CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÈ $\mathbf{u}_0$ SIA INSTABILE SECONDO HADAMARD È CHE SIA

$$P''_0 \mathbf{u} \mathbf{u} < 0 \quad \text{PER ALMENO UN } \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$$

Osservazioni

- ☞ Se il funzionale energia potenziale totale è differenziabile due volte in corrispondenza di una configurazione generica $\mathbf{u}_0$ è possibile scrivere la formula di Taylor

$$P(\mathbf{u}) = P_0 + P'_0 \mathbf{u} + \frac{1}{2} P''_0 \mathbf{u} \mathbf{u} + R_0(\mathbf{u}), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|R_0(\alpha \mathbf{u})|}{\alpha^2} = 0.$$

- ☞ Se la configurazione $\mathbf{u}_0$ coincide con quella fondamentale risulta $P_0 = P(\mathbf{u}_0) = 0$ e $P'_0 = P'(\mathbf{u}_0) = 0$ e al secondo ordine la variazione seconda rappresenta tutta l'energia potenziale

$$P(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} P''_0 \mathbf{u} \mathbf{u} + R_0(\mathbf{u}), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|R_0(\alpha \mathbf{u})|}{\alpha^2} = 0 \quad (1)$$

- ☞ Dalla (1) consegue che condizione necessaria affinché l'energia potenziale totale sia positiva in un certo intorno sferico dell'origine e quindi affinché la configurazione sia stabile secondo Hadamard è che risulti

$$P''_0 \mathbf{u} \mathbf{u} \geq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in X_u \quad (2)$$

- ☞ La negazione della (2) fornisce dunque una condizione sufficiente di instabilità secondo Hadamard.

STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO 7

Stabilità di Pearson

- Richiede all'energia immagazzinata nel corpo a causa di un qualunque spostamento infinitesimo $\mathbf{u}$ a partire dalla configurazione equilibrata di superare il lavoro eseguito dalle forze esterne per lo stesso spostamento.

Criterio della variazione seconda

- L'incremento dell'energia potenziale totale associata ad $\mathbf{u}$ rappresenta la somma dell'energia immagazzinata e del lavoro delle forze esterne cambiato di segno. Tenendo poi conto che per spostamenti infinitesimi l'incremento dell'energia potenziale diventa $\frac{1}{2}P''_0\mathbf{u}\mathbf{u}$, sotto la sola ipotesi di differenziabilità di P fino al secondo ordine, la condizione di stabilità di Pearson si riduce al *classico criterio della variazione seconda dell'energia potenziale totale*:

SE P È DIFFERENZIABILE DUE VOLTE IN $\mathbf{u}_0$, CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÈ UNA CONFIGURAZIONE EQUILIBRATA $\mathbf{u}_0$ SIA STABILE È CHE SIA

$$P''_0\mathbf{u}\mathbf{u} > 0 \quad \text{PER OGNI} \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$$

STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO 8

Criterio della variazione seconda

Osservazioni

- ☞ Si può mostrare con dei controesempi che per i sistemi continui, a differenza di quelli discreti, il criterio enunciato non è condizione sufficiente per la stabilità di Hadamard, anche nel caso in cui P è differenziabile due volte secondo Frechét.

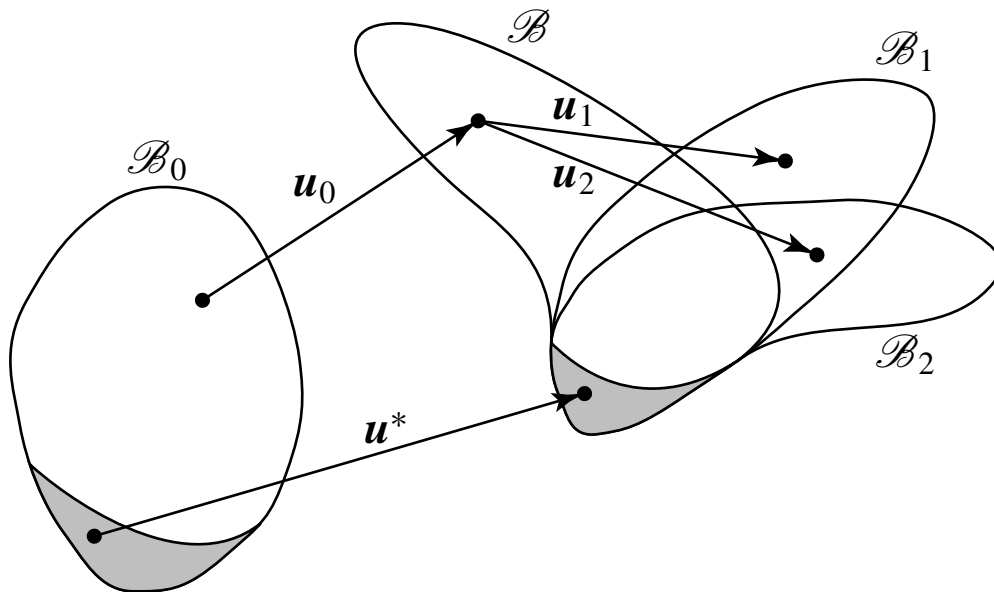
Si possono infatti verificare casi in cui il criterio è verificato senza che ne consegua la positività dell'energia potenziale totale, e nemmeno la sua non negatività, in qualche intorno sferico dell'origine.

- ☞ La ragione di ciò si fonda essenzialmente sulla non compattezza di una superficie sferica negli spazi (di Hilbert) di dimensione infinita. Sia infatti $\partial B_1 = \{\mathbf{u} \in X_u \mid \|\mathbf{u}\| = 1\}$ la superficie sferica unitaria di centro l'origine. La sua non compattezza impedisce di usare il teorema di Weierstrass (esistenza del minimo di una funzione su un insieme compatto). La condizione $P_0'' \mathbf{u}^2 > 0$ non esclude che il limite inferiore di $P_0'' \mathbf{u} \mathbf{u}$ sia nullo. Se questo è il caso, dato che $P_0'' \mathbf{u} \mathbf{u}$ è quadratico in $\mathbf{u}$ allora il limite inferiore è nullo su ogni sfera di centro l'origine. Supponiamo poi che per ogni $\epsilon > 0$ esista un $\eta < \epsilon$ tale che $\gamma = \inf_{\|\mathbf{u}\|=\eta} R_0(\mathbf{u}) < 0$ (dove $R_0(\mathbf{u})$ è il resto della formula di Taylor). È allora possibile scegliere un $\mathbf{u}^* \in X_u$ tale che $\|\mathbf{u}^*\| = \eta$ e $P_0'' \mathbf{u}^* \mathbf{u}^* < 2\gamma$. Dalla formula di Taylor deriva infine che $P(\mathbf{u}^*) < 0$.
- ☞ Una condizione sufficiente per la stabilità di Hadamard è naturalmente quella che assicura l'esistenza del minimo proprio

$$\inf_{\|\mathbf{u}\|_u=1} P_0'' \mathbf{u} \mathbf{u} > 0, \quad \mathbf{u} \in X_u$$

che però richiede che P_0'' sia la derivata seconda di P nel senso di Frechet. Inoltre tale condizione, come visto, assicura la stabilità della configurazione equilibrata nel senso di Liapunov.

DERIVATE DELL'ENERGIA POTENZIALE TOTALE ¹



Potenziale delle forze esterne

- Se le forze sono indipendenti dalla deformazione

$$V'' u_1 u_2 = 0$$

Energia elastica di deformazione

- Se si suppone che l'energia elastica di deformazione per unità di linea w sia funzione del gradiente degli spostamenti $\mathbf{H}$, differenziando due volte in corrispondenza di uno spostamento $\mathbf{u}_0$ si ottiene

$$W'' u_1 u_2 = \int_{\mathcal{B}_0} \text{Grad } \mathbf{u}_1 \cdot \mathbb{A} [\text{Grad } \mathbf{u}_2] dV_0$$

- Se invece si suppone l'energia elastica di deformazione per unità di linea w funzione del tensore di Green-Lagrange della deformazione $\mathbf{E}$, differenziando due volte in corrispondenza di uno spostamento $\mathbf{u}_0$ si ottiene

$$W'' u_1 u_2 = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{E}' u_1 \cdot \mathbb{C} [\mathbf{E}' u_2] + \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}'' u_1 u_2 dV_0$$

DERIVATE DELL'ENERGIA ² POTENZIALE TOTALE

Osservazioni

☞ Le derivate del tensore di Green-Lagrange valgono

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'\mathbf{u}_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \text{Grad } \mathbf{u}_1 + \text{Grad}^T \mathbf{u}_1 + \mathbf{H}^T \text{Grad } \mathbf{u}_1 + (\text{Grad}^T \mathbf{u}_1) \mathbf{H} \right\} \\ \mathbf{E}''\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 &= \frac{1}{2} \left\{ (\text{Grad}^T \mathbf{u}_2) \text{Grad } \mathbf{u}_1 + (\text{Grad}^T \mathbf{u}_1) \text{Grad } \mathbf{u}_2 \right\} \end{aligned}$$

☞ Se si assume una descrizione lagrangiana relativa con configurazione di riferimento coincidente con quella fondamentale risulta $\mathbf{H} = \mathbf{I}$, l'operazione gradiente diviene quella relativa alla configurazione spaziale $\mathcal{B}$ e i tensori degli sforzi di Piola-Kirchhoff coincidono, nella configurazione fondamentale, con il tensore degli sforzi di Cauchy

$$\begin{aligned} W''\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 &= \int_{\mathcal{B}} \text{grad } \mathbf{u}_1 \cdot \mathbb{A} [\text{grad } \mathbf{u}_2] dV_0 \\ W''\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 &= \int_{\mathcal{B}} \text{grad } \mathbf{u}_1 \cdot \mathbb{C} [\text{grad } \mathbf{u}_2] + \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[(\text{Grad}^T \mathbf{u}_1) \text{Grad } \mathbf{u}_2 \right] dV_0 \end{aligned}$$

DERIVATE DELL'ENERGIA 3 POTENZIALE TOTALE

Spostamenti non indipendenti

- Se gli spostamenti $\mathbf{u}$ non sono indipendenti ma risultano funzioni di altre variabili η , come nel caso della teoria delle travi o delle lastre, la variazione seconda del potenziale delle forze esterne non è nulla.

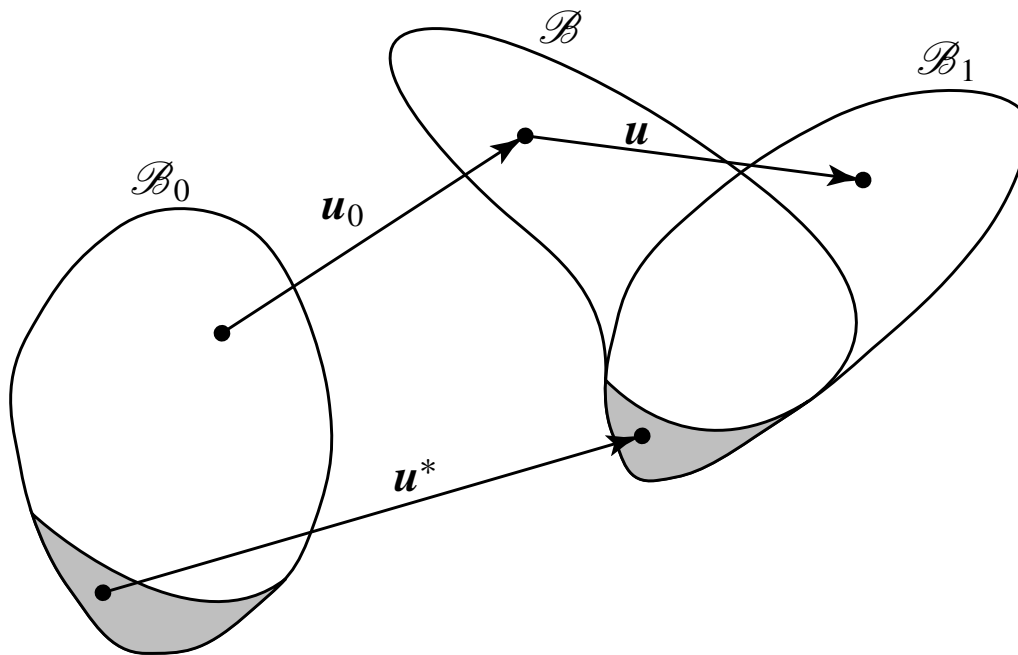
Ancora supponendo che le forze esterne siano indipendenti dalla deformazione, la derivata seconda del potenziale V delle forze esterne diviene

$$V''\eta_1\eta_2 = \int_{\partial\mathcal{B}_{0f}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}''\eta_1\eta_2 \, dA_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}''\eta_1\eta_2 \, dV_0$$

- Le espressioni delle derivate prima e seconda dell'energia elastica di deformazione $W(\mathbf{E})$ divengono invece

$$\begin{aligned} W'\eta_1 &= \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}'\mathbf{u}'\eta_1 \, dV_0 \\ W''\eta_1\eta_2 &= \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{E}'\mathbf{u}'\eta_1 \cdot \mathbb{C}[\mathbf{E}'\mathbf{u}'\eta_1] \, dV_0 \\ &\quad + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}''\mathbf{u}'\eta_1\mathbf{u}'\eta_2 \, dV_0 \\ &\quad + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}'\mathbf{u}''\eta_1\eta_2 \, dV_0 \end{aligned}$$

STABILITÀ E UNICITÀ 1



- Si assume l'ipotesi di forze applicate indipendenti dalla deformazione

$$V'' = 0$$

- Il criterio della variazione seconda si scrive pertanto

$$W''uu > 0 \quad \text{per ogni } u \neq 0$$

- In descrizione lagrangiana

$$\int_{\mathcal{B}_0} \text{Grad } u \cdot \mathbb{A} [\text{Grad } u] dV_0 > 0 \quad \text{per ogni } u \neq 0$$

- In descrizione lagrangiana relativa

$$\int_{\mathcal{B}} \text{grad } u \cdot \mathbb{A} [\text{grad } u] dV_0 > 0 \quad \text{oppure}$$

$$\int_{\mathcal{B}} \text{grad } u \cdot \mathbb{C} [\text{grad } u] + \sigma \cdot [(\text{Grad}^T u) \text{Grad } u] dV_0 > 0$$

per ogni $u \neq 0$

STABILITÀ E UNICITÀ ②

- Stabilità in descrizione lagrangiana, espressa tramite il criterio della variazione seconda sotto l'ipotesi di forze indipendenti dalla deformazione

$\int_{\mathcal{B}_0} \text{Grad } \mathbf{u} \cdot \mathbb{A}[\text{Grad } \mathbf{u}] dV_0 > 0$	per ogni campo $\mathbf{u}$ di spostamenti non nullo soddisfacente le condizioni omogenee $\mathbf{u} = 0$ sulla quota $\partial \mathcal{B}_{0u}$ di contorno
---	--

- Condizione sufficiente di unicità del problema incrementale in descrizione lagrangiana, sotto l'ipotesi di forze indipendenti dalla deformazione

$\int_{\mathcal{B}_0} \text{Grad } \mathbf{v} \cdot \mathbb{A}[\text{Grad } \mathbf{v}] dV_0 \neq 0$	per ogni campo $\mathbf{v}$ di velocità non nullo soddisfacente le condizioni omogenee $\mathbf{v} = 0$ sulla quota $\partial \mathcal{B}_{0u}$ di contorno
--	---

- Relazione tra stabilità di una configurazione equilibrata e unicità della soluzione del problema incrementale a partire dalla stessa soluzione equilibrata

Configurazione stabile $\Rightarrow$ Unicità del problema incrementale

Osservazioni

- ☞ L'implicazione non può essere invertita, dato che il problema incrementale è unico sia nel caso $\int_{\mathcal{B}_0} \text{Grad } \mathbf{v} \cdot \mathbb{A}[\text{Grad } \mathbf{v}] dV_0 > 0$ (stabilità della configurazione fondamentale) che nel caso $\int_{\mathcal{B}_0} \text{Grad } \mathbf{v} \cdot \mathbb{A}[\text{Grad } \mathbf{v}] dV_0 < 0$ (instabilità della configurazione fondamentale).

EQUILIBRIO CRITICO ①

- In base al criterio della variazione seconda, una configurazione equilibrata $\mathbf{u}_0$ ha tre possibilità:

1. È una configurazione di equilibrio stabile

$$P_0''\mathbf{u}\mathbf{u} > 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in X_u$$

2. È una configurazione di equilibrio instabile

$$P_0''\mathbf{u}\mathbf{u} < 0 \quad \text{per almeno un } \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$$

3. È una configurazione di *equilibrio critico*

$$\begin{array}{ll} P_0''\mathbf{u}\mathbf{u} \geq 0 & \text{per ogni } \mathbf{u} \in X_u \\ P_0''\mathbf{u}\mathbf{u} = 0 & \text{per almeno un } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \end{array}$$

- Un qualunque spostamento, diverso da zero, per il quale la variazione seconda di P è nulla è detto *modo critico*.
- Se $\mathbf{u}_1$ è un modo critico anche $\alpha\mathbf{u}_1$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ è un modo critico. Cioè i modi critici sono definibili a meno di una costante moltiplicativa.

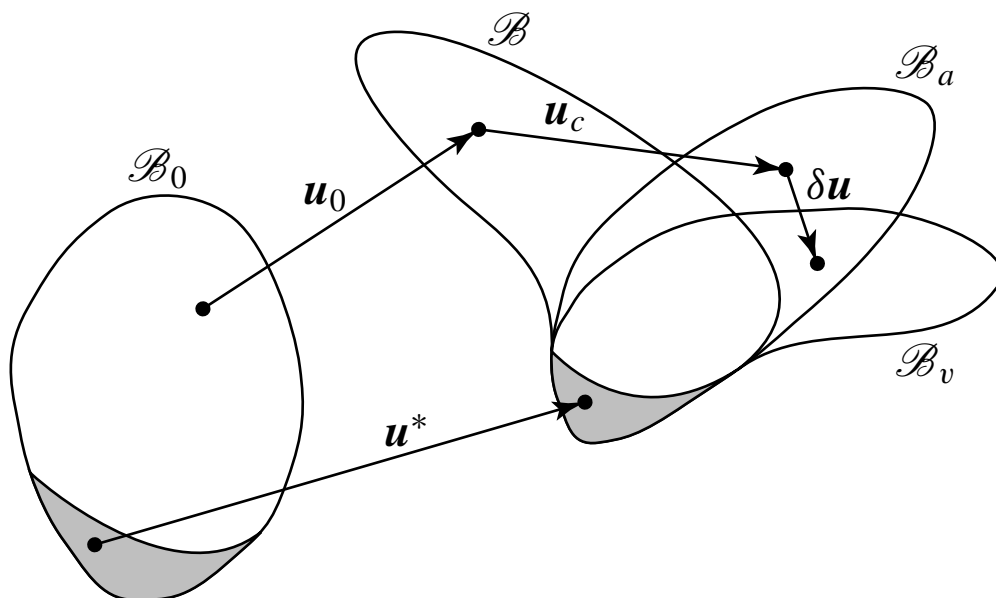
EQUILIBRIO CRITICO ②

- Dalla definizione di modo critico consegue che il funzionale quadratico $\mathbf{u} \mapsto P_0'' \mathbf{u} \mathbf{u}$ è minimo in corrispondenza dei modi critici. Deve quindi annullarsi la variazione prima di tale funzionale in corrispondenza dei modi critici.

Se $\mathbf{u}_c$ è un modo critico deve dunque essere

$$P_0'' \mathbf{u}_c \delta \mathbf{u} = 0 \quad \text{per ogni} \quad \delta \mathbf{u} \in X_u$$

Criterio statico o dell'equilibrio adiacente



- Ricordando lo sviluppo dell'energia potenziale totale, si può affermare che nell'intorno della configurazione fondamentale si ha $P(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} P_0'' \mathbf{u} \mathbf{u}$. La condizione di minimo di P_0'' rappresenta quindi, nell'intorno della configurazione fondamentale $\mathbf{u}_0$, l'annullarsi della variazione prima dell'energia potenziale totale in corrispondenza del modo critico. Quindi il modo critico rappresenta, nell'intorno della configurazione fondamentale, una configurazione di equilibrio e ciò conduce al classico criterio statico o dell'equilibrio adiacente.

EQUILIBRIO CRITICO ③

Condizione necessaria di stabilità

- Si suppone la differenziabilità fino al quarto ordine del funzionale energia potenziale totale e l'esistenza, a meno del segno, di un solo modo critico normalizzato (di norma unitaria).
- Lo sviluppo di P in serie di Taylor troncato al quarto ordine si scrive

$$P(u) = \frac{1}{2}P_0''uu + \frac{1}{6}P_0'''uuu + \frac{1}{24}P_0^{iv}uuuu + R_0(u)$$
$$\lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{R_0(u)}{\|u\|^4} = 0$$

- Sia allora u_c il modo critico normalizzato (unico a meno del segno) e si consideri il percorso lineare αu_c , con $\alpha \in \mathbb{R}$ passante per l'origine di X_u . Lo sviluppo di P in serie di Taylor diventa

$$P(\alpha u_c) = \frac{\alpha^3}{6}P_0'''u_c u_c u_c + \frac{\alpha^4}{24}P_0^{iv}u_c u_c u_c u_c + o(\alpha^4)$$

- Se P_0''' non è nullo, P non può essere positivo poichè se $P_0'''uuu > 0$ allora $P_0'''(-u)(-u)(-u) < 0$. Ne consegue il teorema

CONDIZIONE NECESSARIA DI STABILITÀ SECONDO
HADAMARD DI UNA CONFIGURAZIONE u_c DI EQUILIBRIO
CRITICO È CHE SIA

$$P_0'''u_c u_c u_c = 0$$

$$P_0^{iv}u_c u_c u_c u_c \geq 0$$

EQUILIBRIO CRITICO 4

Condizione sufficiente di stabilità

- Si suppone la differenziabilità nel senso di Frechét fino al quarto ordine del funzionale energia potenziale totale e l'esistenza, a meno del segno, di un solo modo critico normalizzato (di norma unitaria).
- Per determinare la condizione che assicura che P sia crescente su un percorso in direzione critica, si considera un percorso $\mathbf{u}(\alpha)$ dipendente dal parametro reale α e tale che $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_c$, dove il punto indica derivazione rispetto ad α . Espandendo in serie di Taylor si ha $\mathbf{u}(\alpha) = \alpha \mathbf{u}_c + \frac{1}{2} \alpha^2 \ddot{\mathbf{u}} + o(\alpha^2)$.
- Lo sviluppo in serie di Taylor di P sul percorso $\mathbf{u}(\alpha)$ diventa $P(\mathbf{u}(\alpha)) = \frac{\alpha^4}{24} H(\ddot{\mathbf{u}}) + o(\alpha^4)$, dove il funzionale H risulta

$$H(\mathbf{u}) = 3P_0'' \mathbf{u} \mathbf{u} + 6P_0''' \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u} + P_0^{iv} \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c$$

- Ciò premesso, si dimostra la validità del seguente teorema

SE P È DIFFERENZIABILE QUATTRO VOLTE SECONDO FRECHÉT IN CORRISPONDENZA DELLA CONFIGURAZIONE CRITICA $\mathbf{u}_c$, CONDIZIONE SUFFICIENTE DI STABILITÀ SECONDO HADAMARD DI TALE CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO CRITICO È CHE SIA

$$P_0''' \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c = 0,$$

$$\begin{cases} \inf_{\|\mathbf{u}\|=1} P_0'' \mathbf{u} \mathbf{u} > 0 \\ \inf H(\mathbf{u}) > 0 \end{cases} \quad \text{NELLO SPAZIO } N^\perp(P_0'').$$

dove $N^\perp(P_0'')$ indica l'insieme degli spostamenti $\mathbf{u} \in X_u$ tali che $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_c = 0$.

EQUILIBRIO CRITICO 5

Condizione sufficiente di stabilità □ Osservazioni

☞ Il parametro α rappresenta il tempo. Poichè il problema trattato è indipendente dalla scala dei tempi è possibile, senza perdita di generalità, porre una condizione aggiuntiva che precisa tale scala, richiedendo per esempio che $\alpha \mathbf{u}_c$ rappresenti la proiezione di $\mathbf{u}(\alpha)$ nella direzione di $\mathbf{u}_c$. Ne risulta che $\ddot{\mathbf{u}}$ deve essere ortogonale ad $\mathbf{u}_c$ per cui $\ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_c = 0$.

☞ Lo spazio $N^\perp(P_0'')$ rappresenta il sottospazio di X_u ortogonale al nucleo $N(P_0'')$ del funzionale $\mathbf{u} \mapsto P_0'' \mathbf{u} \mathbf{u}$, definito dalla condizione $P_0'' \mathbf{u} \mathbf{u} = 0$.

☞ Lo spostamento $\mathbf{u}^*$ che rende minimo il funzionale $H(\mathbf{u})$ nello spazio $N^\perp(P_0'')$ deve soddisfare l'equazione

$$P_0'' \mathbf{u}^* \mathbf{u} + P_0''' \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u} = 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in N^\perp(P_0''). \quad (1)$$

☞ L'equazione variazionale (1) ha una e una sola soluzione e in sua corrispondenza il funzionale H assume il valore del limite inferiore

$$\inf H(\mathbf{u}) = P_0^{lv} \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c - 3 P_0'' \mathbf{u}^* \mathbf{u}^*.$$

☞ La condizione $\inf H(\mathbf{u}) > 0$ può dunque essere sostituita dalla condizione equivalente

$$P_0^{lv} \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c - 3 P_0'' \mathbf{u}^* \mathbf{u}^* > 0.$$

EQUILIBRIO CRITICO ⑥

Criterio di stabilità di una configurazione critica

- Il criterio di stabilità normalmente utilizzato per giudicare la stabilità di una configurazione critica è una versione rilassata rispetto a quella fornita dal teorema precedente

SE P È DIFFERENZIABILE QUATTRO VOLTE IN CORRISPONDENZA DELLA CONFIGURAZIONE CRITICA $\mathbf{u}_c$, CONDIZIONE SUFFICIENTE DI STABILITÀ DI TALE CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO CRITICO È CHE SIA

$$P_0''' \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c = 0,$$

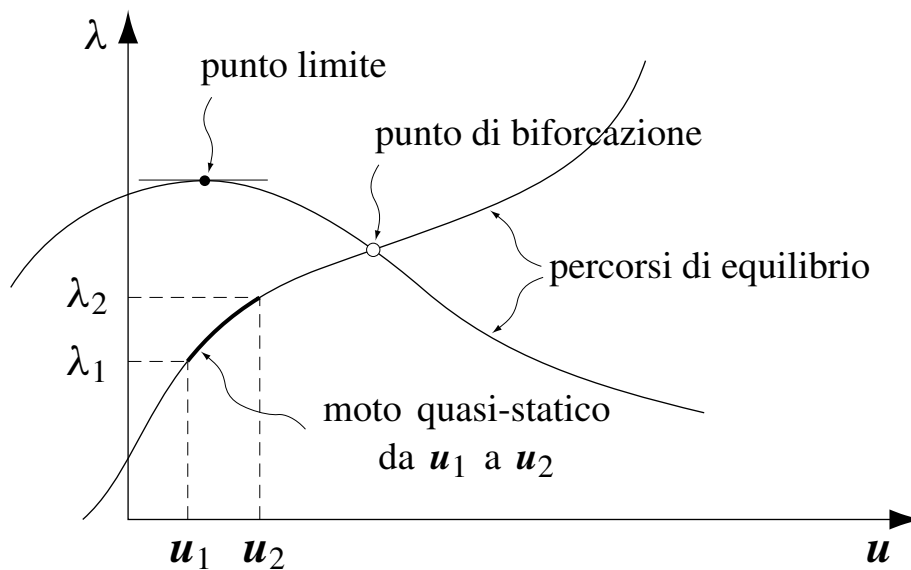
$$P_0^{iv} \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c > 3 P_0'' \mathbf{u}^* \mathbf{u}^*$$

DOVE $\mathbf{u}^*$ È SOLUZIONE DEL PROBLEMA VARIAZIONALE

$$P_0'' \mathbf{u}^* \mathbf{u} + P_0''' \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u} = 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in N^\perp(P_0'').$$

- Tale criterio di stabilità è condizionato dall'esistenza della soluzione $\mathbf{u}^*$, garantita solo nel caso in cui le derivate di P siano di Frechét.
- È da notare che $P_0'' \mathbf{u}^* \mathbf{u}^* \geq 0$ e che quindi tali condizioni sono più forti delle condizioni necessarie che richiedono semplicemente $P_0^{iv} \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c > 0$.
- Se il criterio non è soddisfatto, la configurazione è instabile, salvo che non sia $P_0''' \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c = 0$ e $P_0^{iv} \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c = 3 P_0'' \mathbf{u}^* \mathbf{u}^*$. In tal caso, per giudicare la stabilità della configurazione critica occorre esaminare, se esistono, le derivate di ordine superiore al quarto.

BIFORCAZIONE DELL'EQUILIBRIO ①

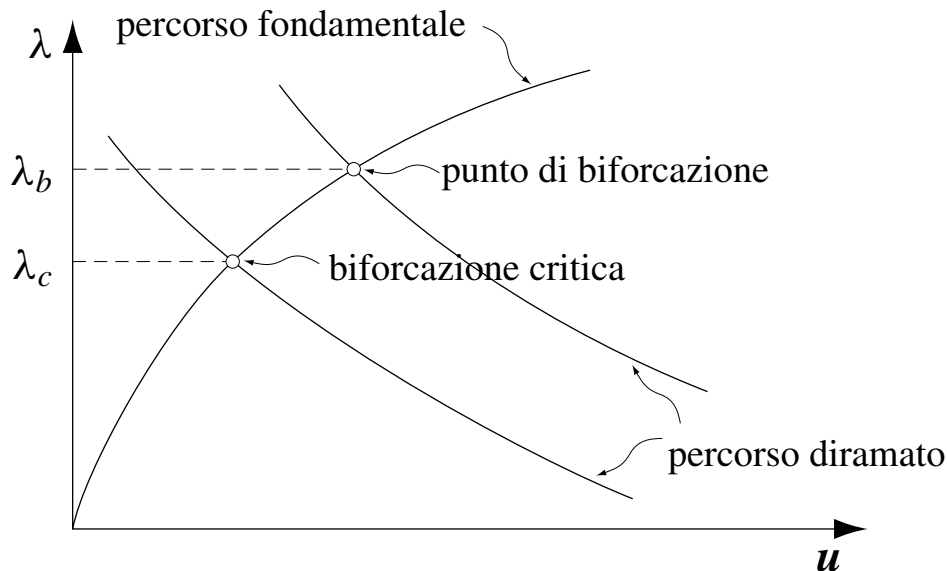


- Si considerano le diverse configurazioni di equilibrio che viene ad assumere un continuo elastico al variare, in modo quasi statico, delle condizioni al contorno geometriche e meccaniche e delle forze di volume in dipendenza di un *parametro di carico* λ che assume il significato di variabile temporale.

Essendo il problema indipendente dalla scala dei tempi, resta aperta la possibilità di fissare a priori la scala dei tempi, senza perdita di generalità.

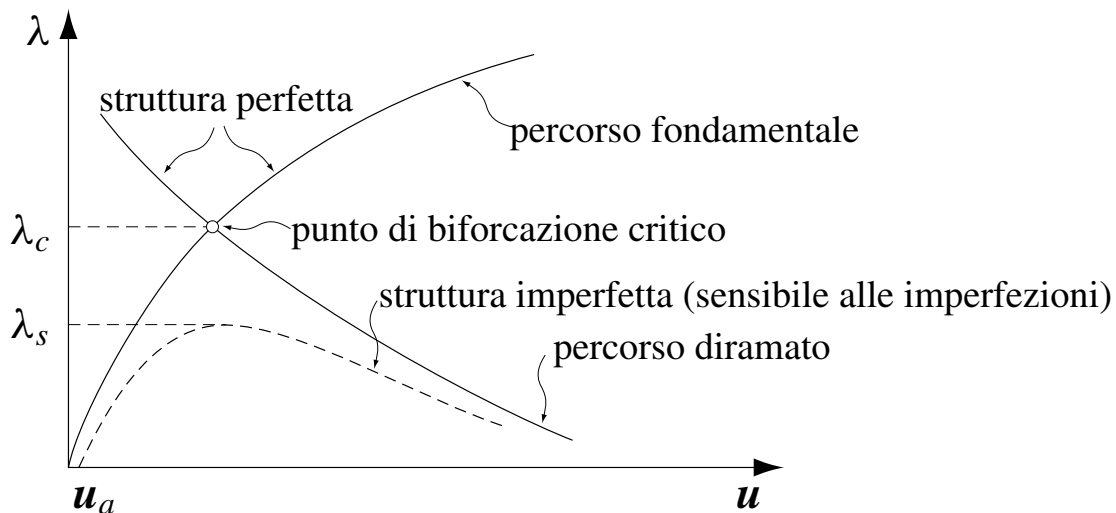
- Le coppie $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X_u$, dove gli spostamenti u sono soluzione del problema elastostatico corrispondente a λ , disegnano nello spazio $\mathbb{R} \times X_u$ dei *percorsi di equilibrio*. Questi percorsi definiscono le possibili evoluzioni quasi-statiche del sistema conseguenti alle variazioni delle forze esterne e delle condizioni cinematiche.
- Se per un punto dello spazio $\mathbb{R} \times X_u$ passano più percorsi di equilibrio il punto è detto di *biforcazione*. Se i percorsi sono due il punto è detto di *biforcazione semplice*. Un punto di massimo di λ su un percorso di equilibrio è poi detto *punto limite*.

BIFORCAZIONE DELL'EQUILIBRIO ②



- Innanzitutto occorre individuare i punti di biforcazione sul *percorso fondamentale* o *percorso naturale*, percorso di equilibrio che parte dalla configurazione naturale del solido (configurazione scarica priva di autotensioni). Se la configurazione di riferimento lagrangiana coincide con la configurazione naturale, questa è individuata dal punto $(0, \mathbf{0})$ nello spazio $\mathbb{R} \times X_u$
- I valori che assume il parametro λ in corrispondenza dei punti di biforcazione sono detti di *biforcazione* e il più piccolo di questi è detto *critico*.
- I percorsi equilibrati che, oltre a quello naturale, passano da un punto di biforcazione sono detti *diramati*.
- Se per un punto di biforcazione passa un solo percorso diramato la biforcazione è detta *semplice*, altrimenti è detta *multipla*.

BIFORCAZIONE DELL'EQUILIBRIO ③



- L'analisi postcritica della struttura consiste nella determinazione dei percorsi di equilibrio che si diramano dal punto di biforcazione critico, oppure, in sottordine, nella determinazione delle caratteristiche principali di tali percorsi.
- Metodi generali per la determinazione delle caratteristiche di un percorso diramato sono i *metodi perturbativi*, che consistono essenzialmente nell'operare degli sviluppi asintotici in funzione di un determinato parametro. Gli sviluppi sono eseguiti a partire da un valore del parametro in corrispondenza del quale lo stato del sistema è noto. Nel presente caso l'espansione viene eseguita a partire dal punto di biforcazione posto sul percorso fondamentale.
- Eseguita l'analisi biforcatica della struttura, si individua inoltre il comportamento di una seconda struttura la cui configurazione prima dell'applicazione dei carichi differisce dalla precedente di una quantità aggiuntiva u_a . La struttura originale è detta *perfetta*, quella variata è detta *imperfetta*, mentre la quantità u_a è detta *imperfezione iniziale*.

Se il percorso di equilibrio della struttura imperfetta presenta un punto limite inferiore a quello critico si dice che la struttura è *sensibile alle imperfezioni*.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI 1

- Antman, S. S. (1995) *Nonlinear Problems of Elasticity*. No. 107 in Applied Mathematical sciences. Springer-Verlag, New York.
- Bolotin, V. V. (1963) *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*. Pergamon, Oxford.
- Budiansky, B. (1974) Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures. *Adv. in Appl. Mech.* **14**, 1–65.
- Corradi, L. (1978) *Instabilità delle Strutture*. Clup, Milano.
- Hill, R. (1957) On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain. *J. Mech. Phys. Solids* **5**, 229–241.
- Knops, R. J. and Wilkes, E. W. (1973) Theory of elastic stability. In *Encyclopedia of Physics, Volume VIa/3: Mechanics of Solids III* (Ed. C. Truesdell), 125–302. Springer-Verlag, Berlin. Chief Editor: Flügge, S.
- Koiter, W. T. (1962) Stability of equilibrium of continuous bodies. Technical Report 79, Division of Applied Mathematics, Brown University.
- Leipholz, H. H. E. (1980) *Stability of Elastic Systems*. Sijthoff & Noordhoff.
- Pignataro, M., Rizzi, N. and Luongo, A. (1983) *Stabilità, Biforcazione e Comportamento Postcritico delle Strutture Elastiche*. Esa, Roma.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI 2

Sewell, M. J. (1965) The static perturbation technique in buckling problems. *J. Mech. Phys. Solids* **13**, 247–265.

Sewell, M. J. (1987) *Maximum and Minimum Principles, A Unified Approach, with Applications..* Cambridge University Press, Cambridge.

Thompson, J. M. T. and Hunt, G. W. (1973) *A General Theory of Elastic Stability*. Wiley, London.

Thompson, J. M. T. and Hunt, G. W. (1984) *Elastic Instability Phenomena*. Wiley, Chichester.

Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. (1961) *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill, New York, seconda edn.

Ziegler, H. (1956) On the concept of elastic stability. *Adv. in Appl. Mech.* **4**, 351–403.

Ziegler, H. (1968) *Principles of Structural Stability*. Blaisdell, Waltham.