

# DEFORMAZIONE DI SCORRIMENTO SEMPLICE

Prof. Daniele Zaccaria  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Università di Trieste  
Piazzale Europa 1, Trieste

20 giugno 2005

## Indice

|   |                                      |    |
|---|--------------------------------------|----|
| 1 | Deformazione                         | 2  |
| 2 | Velocità                             | 3  |
| 3 | Tensori di deformazione              | 5  |
| 4 | Velocità di deformazione             | 7  |
| 5 | Direzioni principali di deformazione | 8  |
| 6 | Decomposizione polare                | 11 |

Sia dato un corpo, illustrato in fig. 1, la cui configurazione di riferimento  $\mathcal{B}_0$  coincide con quella di un cubo di lato  $L$  e che sia soggetto ad una deformazione di *scorrimento semplice*, deformazione caratterizzata da uno scorrimento nella direzione  $Y$  e proporzionale a  $Z$  delle sezioni perpendicolari all'asse  $Z$  (di equazione  $Z = \text{cost}$ ).

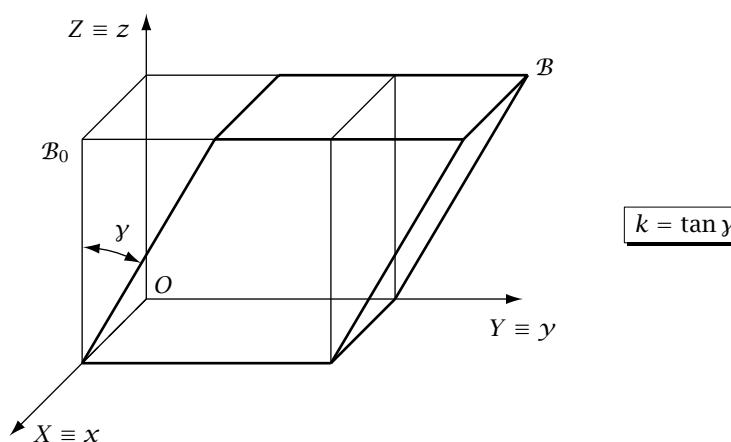


Figura 1: Deformazione di scorrimento semplice

Assunta la configurazione  $\mathcal{B}_0$  quale configurazione di riferimento:

1. Calcolare in modo diretto:
  - (a) Gli stiramenti (stretches) delle linee parallele alle linee coordinate;
  - (b) Le dilatazioni lineari e gli scorrimenti sempre delle linee parallele alle linee coordinate;
  - (c) La differenza  $d\ell^2 - dL^2$  tra i quadrati delle lunghezze prima e dopo la deformazione di un elemento di linea materiale  $dL$  parallelo a  $Z$ ;
  - (d) I vettori area spaziali corrispondenti alle giaciture materiali parallele ai piani coordinati;
2. Definire le componenti della funzione di deformazione  $\phi$  e della sua inversa  $\phi^{-1}$ ;
3. Definire le componenti del vettore spostamento  $\mathbf{u}$ , sia in versione materiale che spaziale;
4. Supponendo una velocità di scorrimento costante ( $\gamma = \gamma_0 t$ ), calcolare il campo, sia materiale che spaziale, delle velocità;
5. Calcolare la velocità  $d_Z$  di deformazione delle linee parallele alla linea coordinata  $Z$  e verificare che non coincide con la derivata materiale della relativa dilatazione lineare  $\epsilon_Z$ ;
6. Calcolare la dilatazione logaritmica  $\bar{\epsilon}_Z$  delle linee parallele alla linea coordinata  $Z$  e verificare che la sua derivata materiale coincide con la relativa velocità  $d_Z$  di deformazione;
7. Calcolare il gradiente della deformazione  $\mathbf{F}$  e il suo inverso  $\mathbf{F}^{-1}$ ;
8. Utilizzando il gradiente della deformazione  $\mathbf{F}$  calcolare il vettore area spaziale corrispondente alla giacitura materiale parallela al piano coordinato  $XZ$ ;
9. Calcolare i gradienti materiale  $\mathbf{H}$  e spaziale  $\text{grad } \mathbf{u}$  degli spostamenti;
10. Calcolare i tensori destro  $\mathbf{C}$  e sinistro  $\mathbf{B}$  di Cauchy-Green e valutare, sia con l'uno che con l'altro, la dilatazione  $\epsilon_Z$  delle linee parallele alla linea coordinata  $Z$ ;
11. Calcolare i tensori di deformazione di Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  e di Almansi  $\mathbf{e}$  e valutare, sia con l'uno che con l'altro, la differenza  $d\ell^2 - dL^2$  tra i quadrati delle lunghezze prima e dopo la deformazione di un elemento di linea materiale  $dL$  parallelo alla linea coordinata  $Z$ .

## 1 Deformazione

Le componenti, nel sistema di riferimento  $Oxyz$  illustrato in fig. 1, della funzione di deformazione  $\phi$  che mappa la configurazione di riferimento  $\mathcal{B}_0$  nella configurazione spaziale  $\mathcal{B}$ , risulta:

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y + kZ. \\ z = Z \end{cases} \quad (1)$$

La deformazione inversa  $\phi^{-1}$  che mappa la configurazione spaziale  $\mathcal{B}$  nella configurazione materiale  $\mathcal{B}_0$  risulta invece:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - kz. \\ Z = z \end{cases} \quad (2)$$

Per quel che riguarda il campo degli spostamenti occorre distinguere tra campo materiale  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ , che mappa la configurazione materiale  $\mathcal{B}_0$  nello spazio  $\mathcal{V}$  delle traslazioni dello spazio ambiente  $\mathcal{E}$ , e campo spaziale  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , il cui dominio è invece la configurazione spaziale  $\mathcal{B}$ :

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = kZ, \\ w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u = 0 \\ v = kZ. \\ w = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Si valutano ora le deformazioni associate alle linee parallele agli assi coordinati. Le linee materiali parallele agli assi  $X$  e  $Y$  subiscono una semplice traslazione e quindi gli stretches sono unitari e le dilatazioni sono nulle:

$$\lambda_X = \lambda_Y = 1, \quad \epsilon_X = \epsilon_Y = 0. \quad (4)$$

Un segmento materiale parallelo all'asse  $Z$ , di lunghezza iniziale pari al lato  $L$  del cubo, dopo la deformazione ha lunghezza  $L/\cos \gamma$ . Lo stretch e la dilatazione in direzione  $Z$  valgono quindi:

$$\lambda_Z = \frac{1}{\cos \gamma}, \quad \epsilon_Z = \frac{1}{\cos \gamma} - 1 = \frac{1 - \cos \gamma}{\cos \gamma}. \quad (5)$$

Si consideri ancora il segmento materiale parallelo all'asse  $Z$  e di lunghezza iniziale  $L$ . Detta  $\ell$  la lunghezza della stessa linea nella configurazione spaziale risulta:

$$\ell^2 - L^2 = \frac{1 - \cos^2 \gamma}{\cos^2 \gamma} L^2 = k^2 L^2. \quad (6)$$

Infine gli scorrimenti tra le linee materiali parallele agli assi  $X$  e  $Y$  e agli assi  $X$  e  $Z$  sono nulli, mentre per quel che riguarda le linee materiali parallele agli assi  $Y$  e  $Z$  lo scorrimento vale  $\gamma$ :

$$\gamma_{XY} = 0, \quad \gamma_{XZ} = 0, \quad \gamma_{YZ} = \gamma. \quad (7)$$

Per quel che riguarda la variazione delle aree, si considerino i quadrati materiali (orientati) di area  $L^2$  perpendicolari agli assi coordinati. I quadrati ortogonali agli assi materiali  $X$  e  $Z$  mantengono invariata sia l'area che l'orientazione e quindi i vettori area materiali  $L^2 \mathbf{e}_X$  e  $L^2 \mathbf{e}_Z$  restano invariati nel corso della deformazione. Il quadrato di area  $L^2$  ortogonale all'asse materiale  $Y$  varia invece sia l'area, che diventa  $L^2/\cos \gamma$ , sia la giacitura, la cui normale materiale  $\mathbf{N}_Y$  si trasforma in quella spaziale  $\mathbf{n}_Y$ , di componenti:

$$\mathbf{n}_Y \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

I volumi non subiscono invece alcuna variazione, dato che il cubo che rappresenta la configurazione iniziale di riferimento si trasforma in un parallelepipedo di uguale area e altezza.

## 2 Velocità

Supponendo una velocità di scorrimento costante pari a  $\gamma_0$ , la dipendenza dal tempo dello scorrimento  $\gamma$  e della costante  $k = \tan \gamma$  risultano

$$\gamma = \gamma_0 t, \quad k = \tan \gamma_0 t. \quad (9)$$

Il conseguente campo materiale della velocità,  $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ , risulta quindi:

$$v_X = v_Z = 0, \quad v_Y = \dot{k}Z = \frac{\dot{\gamma}}{\cos^2 \gamma} Z = \frac{\gamma_0}{\cos^2 \gamma} Z, \quad (10)$$

mentre quello spaziale,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , assume la forma:

$$v_x = v_z = 0, \quad v_y = \dot{k}z = \frac{\dot{y}}{\cos^2 y} z = \frac{y_0}{\cos^2 y} z. \quad (11)$$

Si noti la coincidenza analitica delle espressioni (10) e (11), dipendente dal fatto che la velocità è funzione solo dalla coordinata  $z$ , coordinata che resta costante sulle traiettorie del moto.

Le linee materiali parallele agli assi  $X$  e  $Y$ , come già detto, hanno dilatazione nulla nel corso del tempo. Ne consegue che le associate velocità di dilatazione sono nulle:

$$d_X = d_Y = 0. \quad (12)$$

Allo scopo di calcolare la velocità di dilatazione relativa alle linee materiali parallele all'asse  $Z$ , si consideri un segmento materiale di lunghezza  $L$  parallelo all'asse  $Z$ . Sia inoltre  $\Delta t$  un intervallo di tempo di istante iniziale il tempo  $t$  in corrispondenza del quale si vuole calcolare la velocità di dilatazione e di istante finale il tempo  $\hat{t}$  che in tale contesto assume il ruolo di variabile. Risulta:

$$\begin{aligned} d_Z &= \lim_{\hat{t} \rightarrow t} \frac{\epsilon_Z(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\hat{t} \rightarrow t} \frac{\frac{L}{\cos \hat{y}} - \frac{L}{\cos y}}{\frac{L}{\cos y}} \frac{1}{\hat{t} - t} \\ &= \lim_{\hat{t} \rightarrow t} \frac{1}{\cos \hat{y}} \left\{ -\frac{\cos \hat{y} - \cos y}{\hat{t} - t} \right\} \\ &= -\frac{1}{\cos y} \frac{d \cos y}{dt} = \frac{\sin y}{\cos y} \dot{y}, \end{aligned}$$

e quindi:

$$d_Z = k y_0. \quad (13)$$

Si noti che risulta:

$$\dot{\epsilon}_Z = \frac{\sin y}{\cos^2 y} \dot{y} = \frac{k y_0}{\cos y}, \quad (14)$$

e che quindi  $\dot{\epsilon}_Z \neq d_Z$ . Questo dipende dal fatto che la dilatazione, così come è stata definita, non è sommabile, nel senso che la differenza  $\epsilon_Z(\hat{t}) - \epsilon_Z(t)$  non coincide con la dilatazione  $\epsilon_Z(\Delta t)$  associata all'intervallo di tempo di estremi  $t$  e  $\hat{t}$ . Per avere una dilatazione sommabile occorre riferirsi alla dilatazione logaritmica  $\bar{\epsilon}$ , definita attraverso l'espressione incrementale:

$$d\bar{\epsilon} = \lim_{\ell \rightarrow P} \frac{d\ell}{\ell}, \quad (15)$$

dove  $\ell$  è la lunghezza al tempo  $t$  della linea per  $P$  di cui si vuole valutare la dilatazione e  $d\ell$  è la parte lineare dell'incremento corrispondente ad un incremento  $dt$  del tempo. Integrando l'espressione (15) tra gli estremi  $t$  e  $\hat{t}$  si ottiene:

$$\bar{\epsilon} = \ln \left( \lim_{\ell \rightarrow P} \frac{\hat{\ell}}{\ell} \right) = \ln \lambda = \ln(1 + \epsilon). \quad (16)$$

Dalla (5) si ottiene quindi:

$$\bar{\epsilon}_Z = \ln \frac{1}{\cos y}, \quad \dot{\bar{\epsilon}}_Z = \cos y \left( -\frac{-\sin y}{\cos^2 y} \right) \dot{y} = k y_0, \quad (17)$$

in accordo con la (13).

### 3 Tensori di deformazione

Dalla funzione  $\phi$  di deformazione (1) e dalla sua inversa (2) si ottengono immediatamente il gradiente della deformazione  $\mathbf{F}$  e il suo inverso:

$$\mathbf{F} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Si noti che il gradiente della deformazione non dipende dal punto, ovvero sia che la deformazione è omogenea. Si noti anche che  $\det \mathbf{F} = 1$ , in accordo con la circostanza che la deformazione è isocorica (senza variazione di volume). Verifichiamo subito che, utilizzando la formula di Nanson, il vettore area spaziale  $A_Y$ , corrispondente nella deformazione del vettore area materiale  $A_{0Y} = L^2 \mathbf{e}_Y$  di direzione l'asse materiale  $Y$ , ha la direzione (8):

$$A_Y = L^2 (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \mathbf{e}_Y \equiv L^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{L^2}{\cos \gamma} \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

Togliendo la matrice identità dalla prima delle (18), oppure utilizzando il campo materiale degli spostamenti (3a), si ottiene il gradiente materiale degli spostamenti  $\mathbf{H}$ , mentre il gradiente spaziale degli spostamenti  $\text{grad } \mathbf{u}$  si ottiene togliendo la seconda delle (18) dalla matrice identità oppure utilizzando il campo spaziale degli spostamenti (3b):

$$\mathbf{H} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{grad } \mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Come si nota dalle (20), i gradienti, materiale e spaziale, degli spostamenti coincidono nel caso particolare dello scorrimento semplice.

Utilizzando l'espressione (18a) del gradiente della deformazione e la sua trasposta si ottengono i tensori destro  $\mathbf{C}$  e sinistro  $\mathbf{B}$  di Cauchy-Green:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & 1+k^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+k^2 & k \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Analogamente, utilizzando l'espressione (18b) del gradiente della deformazione inversa e la sua trasposta si ottengono gli inversi degli stessi tensori di Cauchy-Green:

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+k^2 & -k \\ 0 & -k & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & -k & 1+k^2 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Utilizzando la rappresentazione (21a) di  $\mathbf{C}$ , verifichiamo subito le espressioni (5b) della dilatazione  $\epsilon_Z$  e quella (7c) dello scorrimento  $\gamma_{YZ}$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_Z &= \sqrt{\mathbf{e}_Z \cdot \mathbf{C} \mathbf{e}_Z} - 1 \\ &= \sqrt{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & 1+k^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}} - 1 = \frac{1}{\cos \gamma} - 1, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}\sin \gamma_{YZ} &= \frac{\mathbf{e}_Y \cdot \mathbf{C} \mathbf{e}_Z}{\sqrt{\mathbf{e}_Y \cdot \mathbf{C} \mathbf{e}_Y} \sqrt{\mathbf{e}_Z \cdot \mathbf{C} \mathbf{e}_Z}} \\ &= \cos \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & 1+k^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = k \cos \gamma = \sin \gamma\end{aligned}\quad (24)$$

La parte simmetrica e quella emisimmetrica del gradiente materiale degli spostamenti  $\mathbf{H}$  (eq. 20a) forniscono rispettivamente i tensori infinitesimi di deformazione  $\boldsymbol{\epsilon}$  e di rotazione  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}k \\ 0 & \frac{1}{2}k & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}k \\ 0 & -\frac{1}{2}k & 0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Si noti che nella teoria lineare il tensore di deformazione  $\boldsymbol{\epsilon}$  ha, approssimativamente, quali componenti diagonali le dilatazioni delle linee parallele agli assi coordinati e quali componenti fuori diagonale gli scorrimenti delle stesse linee. Poichè in tale teoria  $\cos \gamma \simeq 1$  e quindi  $\epsilon_Z \simeq 0$ , si ottiene la seguente rappresentazione della parte lineare di  $\boldsymbol{\epsilon}$ :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Si noti comunque che tale rappresentazione differisce sensibilmente dalla parte simmetrica del gradiente degli spostamenti (25a) se le deformazioni non sono piccole. Se invece le deformazioni sono piccole  $k = \tan \gamma \simeq \gamma$  e le due espressioni tendono a coincidere.

Infine, dai gradienti materiale e spaziale degli spostamenti (20) conseguono i tensori di deformazione materiale di Green-Lagrange e spaziale di Almansi:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}k \\ 0 & \frac{1}{2}k & \frac{1}{2}k^2 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{u} + \text{grad } \mathbf{u}^T - \text{grad } \mathbf{u}^T \text{grad } \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}k \\ 0 & \frac{1}{2}k & -\frac{1}{2}k^2 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Si vogliono ora utilizzare le (27) e (28) per verificare l'espressione (6) relativa alla differenza  $\ell^2 - L^2$  tra i quadrati della lunghezza di una linea nella sua versione rispettivamente spaziale e materiale. Ricordiamo che tale linea nella sua configurazione materiale ha direzione  $Z$  e lunghezza  $L$ , ed è quindi rappresentata dal vettore  $L\mathbf{e}_Z$ . Nel corso della deformazione tale linea si trasforma nella seguente linea spaziale:

$$\mathbf{F}(L\mathbf{e}_Z) = L \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = L \begin{Bmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (29)$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned}\ell^2 - L^2 &= 2L\mathbf{e}_Z \cdot \mathbf{E}(L\mathbf{e}_Z) \\ &= 2L^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}k \\ 0 & \frac{1}{2}k & \frac{1}{2}k^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = L^2 k^2,\end{aligned}\quad (30)$$

$$\begin{aligned}\ell^2 - L^2 &= 2\mathbf{F}(\mathbf{L}\mathbf{e}_Z) \cdot \mathbf{e}\mathbf{F}(\mathbf{L}\mathbf{e}_Z) \\ &= 2L^2 \begin{bmatrix} 0 & k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}k \\ 0 & \frac{1}{2}k & -\frac{1}{2}k^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{Bmatrix} = L^2 k^2.\end{aligned}\quad (31)$$

## 4 Velocità di deformazione

Dal campo della velocità spaziale (11) si ottiene immediatamente il gradiente  $\mathbf{L}$  della velocità:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_0}{\cos^2 \gamma} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

La velocità di deformazione  $\mathbf{D}$  e la velocità di rotazione  $\mathbf{W}$  rappresentano rispettivamente la parte simmetrica e la parte emisimmetrica del gradiente  $\mathbf{L}$  della velocità:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_0}{2\cos^2 \gamma} \\ 0 & \frac{\gamma_0}{2\cos^2 \gamma} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_0}{2\cos^2 \gamma} \\ 0 & -\frac{\gamma_0}{2\cos^2 \gamma} & 0 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Si osservi che  $t\mathbf{D}|_{t=0}$  coincide con la parte lineare della deformazione espressa dalla (26).

Per verificare l'espressione (13) della velocità di dilatazione  $d_Z$  relativa alle linee materiali parallele all'asse  $Z$ , si consideri che il versore  $\mathbf{f}_Z$  delle linee spaziali corrispondenti nella deformazione a tali linee materiali ha componenti:

$$\mathbf{f}_Z \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin \gamma \\ \cos \gamma \end{Bmatrix}. \quad (34)$$

Risulta:

$$\begin{aligned}d_Z &= \mathbf{f}_Z \cdot \mathbf{D}\mathbf{f}_Z \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_0}{2\cos^2 \gamma} \\ 0 & \frac{\gamma_0}{2\cos^2 \gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin \gamma \\ \cos \gamma \end{Bmatrix} = k\gamma_0.\end{aligned}\quad (35)$$

Infine verifichiamo che la velocità di deformazione  $\mathbf{D}$  rappresenta la derivata materiale del tensore di Green-Lagrange della deformazione  $\mathbf{E}$  portato nella configurazione spaziale tramite il gradiente della deformazione  $\mathbf{F}$ . Innanzitutto dalla (27) si ottiene:

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_0}{2\cos^2 \gamma} \\ 0 & \frac{\gamma_0}{2\cos^2 \gamma} & \frac{k\gamma_0}{\cos^2 \gamma} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Ne consegue infine:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_0}{2 \cos^2 \gamma} \\ 0 & \frac{\gamma_0}{2 \cos^2 \gamma} & \frac{k \gamma_0}{\cos^2 \gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_0}{2 \cos^2 \gamma} \\ 0 & \frac{\gamma_0}{2 \cos^2 \gamma} & 0 \end{bmatrix}, \quad (37) \end{aligned}$$

avendo fatto uso dell'espressione (18b) di  $\mathbf{F}^{-1}$ .

## 5 Direzioni principali di deformazione

Si vogliono ora determinare le direzioni principali di deformazione sia materiali che spaziali, ovvero sia le direzioni principali dei tensori rispettivamente destro  $\mathbf{C}$  e sinistro  $\mathbf{B}$  di Cauchy-Green. Cerchiamo innanzitutto le direzioni principali materiali. Ricordando l'espressione (21a) di  $\mathbf{C}$ , l'asse materiale  $X$  risulta una direzione principale corrispondente ad un autovalore unitario. Pertanto le altre due direzioni principali  $\eta$  e  $\zeta$  giacciono sul piano  $YZ$  (fig. 2). Inoltre, poichè  $\det \mathbf{F} = 1$  (deformazione isocorica) ne consegue che risulta

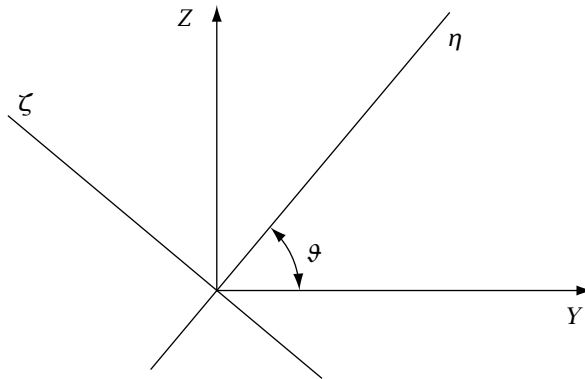


Figura 2: Direzioni principali materiali sul piano  $YZ$

anche  $\det \mathbf{C} = \det^2 \mathbf{F} = 1$ . Detti  $c_1$  e  $c_2$  i due autovalori associati agli assi  $\eta$  e  $\zeta$  risulta  $\det \mathbf{C} = c_1 c_2 = 1$  e quindi:

$$c_1 = \frac{1}{c_2} \quad (38)$$

Questo significa che indicando con  $c$  uno dei due autovalori, l'altro risulta essere  $1/c$ .

La rappresentazione di  $\mathbf{C}$  nel sistema principale si può dunque scrivere nella forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Se con  $\vartheta$  si indica l'angolo che individua il sistema principale rispetto agli assi  $YZ$  (fig. 2), allora il sistema  $YZ$  è individuato rispetto al sistema principale dall'angolo  $-\vartheta$ . Il tensore rotazione  $\mathbf{R}$  che ruota il sistema principale  $OX\eta\zeta$  sul sistema  $OXYZ$  ha allora le seguenti

componenti nel sistema principale:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (40)$$

La rappresentazione di  $\mathbf{C}$  nel sistema  $OXYZ$  coincide con la rappresentazione di  $\mathbf{R}^T \mathbf{C} \mathbf{R}$  nel sistema principale che deve coincidere con la rappresentazione (21a). Limitandosi ai soli assi  $Y$  e  $Z$  deve dunque risultare:

$$\begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1/c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 1+k^2 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Sviluppando si ottengono le tre uguaglianze seguenti:

$$\begin{cases} c \cos^2 \vartheta + \frac{1}{c} \sin^2 \vartheta = 1 \\ c \sin^2 \vartheta + \frac{1}{c} \cos^2 \vartheta = 1 + k^2 \\ \left(c - \frac{1}{c}\right) \sin \vartheta \cos \vartheta = k \end{cases}. \quad (42)$$

Sommando le prime due uguaglianze della (42) si ottiene la relazione:

$$c + \frac{1}{c} = 2 + k^2. \quad (43)$$

Utilizzando poi le seguenti formule trigonometriche:

$$\cos^2 \vartheta = \frac{1 + \cos 2\vartheta}{2}, \quad \sin^2 \vartheta = \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2}, \quad \sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{1}{2} \sin 2\vartheta, \quad (44)$$

le (42) diventano:

$$\begin{cases} c + \frac{1}{c} + \left(c - \frac{1}{c}\right) \cos 2\vartheta = 2 \\ c + \frac{1}{c} - \left(c - \frac{1}{c}\right) \cos 2\vartheta = 2 + 2k^2 \\ \left(c - \frac{1}{c}\right) \sin 2\vartheta = 2k \end{cases}, \quad (45)$$

e queste, per via della (43), si riducono alle due uguaglianze:

$$\begin{cases} \left(c - \frac{1}{c}\right) \cos 2\vartheta = -k^2 \\ \left(c - \frac{1}{c}\right) \sin 2\vartheta = 2k \end{cases}. \quad (46)$$

Dividendo infine la seconda di queste per la prima si ottiene una formula che individua entrambi gli assi principali:

$$\tan 2\vartheta = -\frac{2}{k}. \quad (47)$$

Poichè la metà dell'arcotangente di un valore negativo è compresa tra  $-\pi/4$  e  $0$ , l'angolo  $\vartheta_C$  che individua l'asse principale situato nel primo quadrante soddisfa la disuguaglianza:

$$\frac{\pi}{4} \leq \vartheta_C < \frac{\pi}{2}. \quad (48)$$

Individuiamo ora le direzioni principali del tensore sinistro di Cauchy-Green  $\mathbf{B}$ . Procedendo come per il tensore destro di Cauchy-Green, si tenga conto che per via della (21b) l'asse spaziale  $x$  è asse principale di autovalore unitario. Si ricordi inoltre che gli autovalori dei tensori di Cauchy-Green  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{B}$  coincidono, per cui i restanti due autovalori di  $\mathbf{B}$  coincideranno con  $c$  e  $1/c$ . D'altronde risulta  $\det \mathbf{B} = 1$ , per cui i due autovalori  $b_1$  e  $b_2$  di  $\mathbf{B}$  corrispondenti alle due direzioni principali giacenti nel piano  $yz$  sono l'uno l'opposto dell'altro. Indicando anche ora con  $\vartheta$  l'angolo che individua le direzioni principali di  $\mathbf{B}$  nel piano  $yz$  si riottiene la relazione (43), mentre le relazioni analoghe delle (46) risultano:

$$\begin{cases} \left(c - \frac{1}{c}\right) \cos 2\vartheta = k^2 \\ \left(c - \frac{1}{c}\right) \sin 2\vartheta = 2k \end{cases} \quad (49)$$

Dividendo ancora la seconda di queste per la prima si ottiene la formula che individua entrambi gli assi principali:

$$\tan 2\vartheta = \frac{2}{k}. \quad (50)$$

Poichè la metà dell'arcotangente di un valore positivo è compresa tra  $0$  e  $\pi/4$ , l'angolo  $\vartheta_B$  che individua l'asse principale situato nel primo quadrante soddisfa la disuguaglianza:

$$0 < \vartheta_B \leq \frac{\pi}{4}. \quad (51)$$

Dalle (50) e (47) risulta che  $\vartheta_C \rightarrow \pi/4$  e  $\vartheta_B \rightarrow \pi/4$  per  $k \rightarrow 0$ . Ne consegue che gli assi individuati da  $\vartheta_C$  e  $\vartheta_B$  si corrispondono nella deformazione. Si ricordi anche che ad assi principali dei tensori di Cauchy-Green  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{B}$  che si corrispondono nella deformazione è associato lo stesso autovalore.

Tenendo conto che gli angoli  $\vartheta_C$  e  $\vartheta_B$  soddisfano rispettivamente le relazioni (47) e (50), risulta:

$$\tan(\pi - 2\vartheta_C) = -\tan 2\vartheta_C = \frac{2}{k} = \tan 2\vartheta_B. \quad (52)$$

Questa relazione, più la circostanza che  $\vartheta_C$  e  $\vartheta_B$  sono angoli compresi tra  $0$  e  $\pi/2$ , impone che sia  $\pi - 2\vartheta_C = 2\vartheta_B$  e infine:

$$\vartheta_C = \frac{\pi}{2} - \vartheta_B. \quad (53)$$

Indicando con  $\eta_0$  e  $\eta$  gli assi principali individuati rispettivamente dagli angoli  $\vartheta_C$  e  $\vartheta_B$  e con  $\zeta_0$  e  $\zeta$  i restanti due assi, la situazione è quella illustrata in fig. 3.

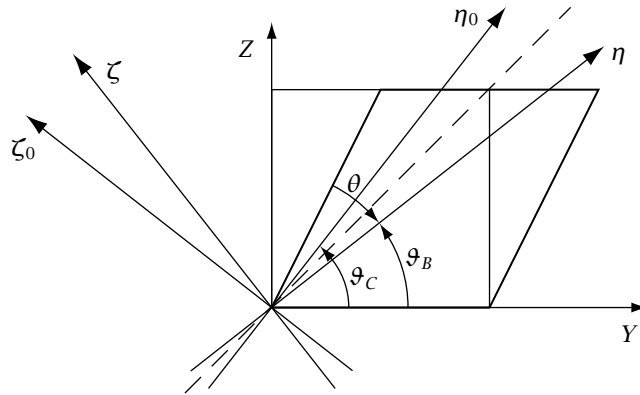


Figura 3: Direzioni principali materiali e spaziali sul piano  $YZ$

## 6 Decomposizione polare

Si vuole ora determinare la decomposizione polare del gradiente della deformazione  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}. \quad (54)$$

dove  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  sono i tensori rispettivamente destro e sinistro di stretch tali che  $\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$  e  $\mathbf{V}^2 = \mathbf{B}$ , mentre  $\mathbf{R}$  è il tensore rotazione che ruota le direzioni principali di  $\mathbf{C}$  in quelle di  $\mathbf{B}$ . Si ricordi a questo proposito che le direzioni principali dei tensori destro e sinistro di stretch  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  coincidono rispettivamente con quelle dei tensori destro e sinistro di Cauchy-Green  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{B}$ .

Da quanto visto al §5, consegue che il tensore rotazione  $\mathbf{R}$  corrisponde ad una rotazione  $\theta$  attorno all'asse materiale  $X$  (fig. 3) pari a

$$\theta = \vartheta_B - \vartheta_C, \quad (55)$$

rotazione senz'altro negativa, cioè oraria, per via delle due disuguaglianze (48) e (51). Utilizzando la relazione (53) e tenendo conto della disuguaglianza (51), la (55) diventa

$$\theta = 2\vartheta_B - \frac{\pi}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta \leq 0\right). \quad (56)$$

Tenendo conto dell'intervallo di variazione di  $\theta$  e che inoltre l'angolo  $\vartheta_B$  deve soddisfare la relazione (50) si ottiene:

$$\begin{cases} \tan \theta = \tan \left(2\vartheta_B - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan 2\vartheta_B} = -\frac{k}{2} \\ \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{2}{\sqrt{4 + k^2}} \\ \sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = -\frac{k}{\sqrt{4 + k^2}} \end{cases}. \quad (57)$$

Dalle (57) discendono immediatamente il tensore rotazione  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4 + k^2}} \begin{bmatrix} \sqrt{4 + k^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k \\ 0 & -k & 2 \end{bmatrix}, \quad (58)$$

e i tensori destro e sinistro di stretch  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^T \mathbf{F} \equiv \frac{1}{\sqrt{4 + k^2}} \begin{bmatrix} \sqrt{4 + k^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k \\ 0 & k & 2 + k^2 \end{bmatrix}, \quad (59)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{F} \mathbf{R}^T \equiv \frac{1}{\sqrt{4 + k^2}} \begin{bmatrix} \sqrt{4 + k^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 + k^2 & k \\ 0 & k & 2 \end{bmatrix}. \quad (60)$$

Si calcolano infine, sul piano  $YZ$ , gli autovalori del tensore destro di stretch  $\mathbf{U}$ , che hanno il significato di stretches principali. L'equazione caratteristica risulta:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{4 + k^2}} - \lambda & \frac{k}{\sqrt{4 + k^2}} \\ \frac{k}{\sqrt{4 + k^2}} & \frac{2 + k^2}{\sqrt{4 + k^2}} - \lambda \end{bmatrix} = 0, \quad (61)$$

da cui si ottiene:

$$\lambda^2 - \sqrt{4+k^2}\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (\sqrt{4+k^2} \pm k) \quad (62)$$

Poichè gli autovalori del tensore destro di stretch  $\mathbf{U}$  coincidono con le radici quadrate degli autovalori del tensore destro di Cauchy-Green  $\mathbf{C}$ , deve valere, quale conseguenza della proprietà (38), l'analogia relazione:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2}, \quad (63)$$

di immediata verifica:

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{2}{\sqrt{4+k^2}-k} = \frac{2(\sqrt{4+k^2}+k)}{(\sqrt{4+k^2}-k)(\sqrt{4+k^2}+k)} = \lambda_1. \quad (64)$$

Si determina ora la direzione principale associata all'autovalore  $\lambda_1$ . Se  $\eta$  è la corrispondente direzione principale individuata dall'angolo  $\vartheta$  (fig. 2), un corrispondente autovettore ha componenti 1 lungo l'asse  $Y$  e  $\tan \vartheta$  lungo l'asse  $Z$ . Deve dunque risultare:

$$\frac{2}{\sqrt{4+k^2}} - \frac{1}{2} (\sqrt{4+k^2} + k) + \frac{k}{\sqrt{4+k^2}} \tan \vartheta = 0, \quad (65)$$

e quindi:

$$\tan \vartheta = -\frac{2}{k} + \frac{4+k^2}{2k} + \frac{\sqrt{4+k^2}}{2} = \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{4+k^2}}{2} > 0. \quad (66)$$

L'angolo  $\vartheta$  individua quindi l'asse principale situato nel primo quadrante e quindi coincide con  $\vartheta_C$  (fig. 3). Nel riferimento principale materiale  $OX\eta_0\zeta_0$  i tensori destri di stretch  $\mathbf{U}$  e di Cauchy-Green  $\mathbf{C}$  hanno conseguentemente le rappresentazioni:

$$\mathbf{U} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} (\sqrt{4+k^2} + k) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} (\sqrt{4+k^2} - k) \end{bmatrix}, \quad (67)$$

$$\mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} (2 + k^2 + k\sqrt{4+k^2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} (2 + k^2 - k\sqrt{4+k^2}) \end{bmatrix}. \quad (68)$$

Queste sono anche, rispettivamente, le rappresentazioni nel riferimento principale spaziale  $OX\eta\zeta$  dei tensori sinistri di stretch  $\mathbf{V}$  e di Cauchy-Green  $\mathbf{B}$ .

Infine, dagli stretches principali (62) conseguono le seguenti dilatazioni principali:

$$\epsilon_{\eta_0} = \lambda_1 - 1 = \frac{1}{2} \{ \sqrt{4+k^2} + (k-2) \} > 0, \quad (69)$$

$$\epsilon_{\zeta_0} = \lambda_2 - 1 = \frac{1}{2} \{ \sqrt{4+k^2} - (k+2) \} < 0. \quad (70)$$

Ne consegue che le linee materiali dirette come  $\eta_0$  ruotano sulle linee spaziali  $\eta$  allungandosi, mentre le linee materiali dirette come  $\zeta_0$  ruotano sulle linee spaziali  $\zeta$  accorciandosi.