

ESERCIZI DI MECCANICA DEL CONTINUO

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile

Università di Trieste

Piazzale Europa 1, Trieste

Trieste, 18 giugno 2005

Indice

1	Esercizio sulla statica dei solidi	3
1.1	Equilibrio globale	4
1.2	Tensori degli sforzi	4
1.3	Componenti normale e tangenziale di tensione	6
1.4	Cambio di coordinate	6
1.5	Componenti del secondo tensore di Piola-Kirchhoff	7
1.6	Circonferenze di Mohr e direzioni principali di tensione . .	9
1.7	Verifica dei valori principali del tensore degli sforzi di Cauchy	10
1.8	Principio dei lavori virtuali	12
2	Esercizio sulla elasticità isotropa	13
3	Esercizio sul sistema di coordinate convected	17
3.1	Sistema generale convected	18
3.2	Spostamenti e deformazione	20

Capitolo 1

Esercizio sulla statica dei solidi

Con riferimento alla figura 1, sia dato il cubo $\mathcal{B}_0$, assunto di lato L , quale configurazione di riferimento, e sia data la configurazione $\mathcal{B}$ quale configurazione deformata.

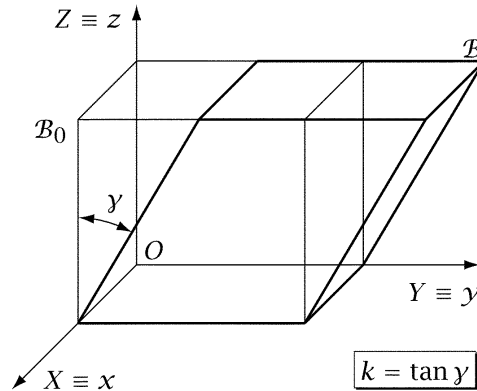


Figura 1

Come indicato nella figura 2, la configurazione deformata sia soggetta ad una tensione tangenziale τ uniforme sulle facce di normali gli assi z e y^* , con i versi di figura.

Ciò premesso:

1. Verificare l'equilibrio globale della configurazione deformata;
2. Determinare le rappresentazioni, nel sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, dei tensori degli

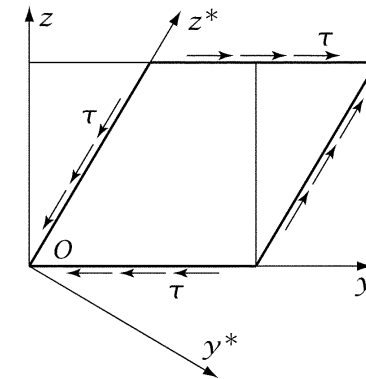


Figura 2

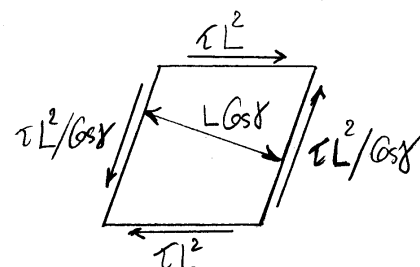
sforzi di Cauchy σ , primo di Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}$ e secondo di Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$;

3. Determinare le componenti normale e tangenziale di tensione sulla giacitura di normale z^* procedendo per equilibrio diretto;
4. Procedendo via cambiamento di coordinate da quelle $Oxyz$ a quelle Oxy^*z^* , verificare che sulla giacitura di normale y^* la tensione normale è nulla e quella tangenziale vale τ , come richiesto dal problema, e verificare inoltre il risultato del numero precedente;
5. Determinare le componenti del secondo tensore di Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$ utilizzando il loro significato fisico (componenti delle tensioni che agiscono sui push-forward delle giaciture coordinate relativamente alle normali di tali giaciture a meno degli stiramenti quadratici e cubico);
6. Disegnare le circonferenze di Mohr dei tensori degli sforzi di Cauchy σ e secondo di Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$, e deter-

minare le direzioni e i valori principali di tensione di entrambi;

7. Utilizzando sia il tensore degli sforzi di Cauchy σ che il primo tensore di Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}$ verificare che sulle giaciture principali del tensore degli sforzi di Cauchy σ la tensione è normale alla giacitura e verificare i valori delle tensioni principali;
8. Verificare che vale il principio dei lavori virtuali assumendo quale sistema di forze e tensioni equilibrate quello agente sulla configurazione deformata $\mathcal{B}$ e quale sistema di spostamenti e deformazioni congruente quello che si ottiene eseguendo un incremento $\delta\gamma$ dell'angolo γ a partire dalla configurazione deformata $\mathcal{B}$ (scrivere il lavoro interno nelle varie forme che prevedono l'utilizzazione sia del tensore degli sforzi di Cauchy σ che dei due tensori di Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}$ e $\mathbf{S}$).

1.1 Equilibrio globale



Sul corpo agiscono:

- 1) Una coppia antioraria $(\tau L^2 / \gamma) L \gamma = \tau L^3$;
- 2) Una coppia oraria $(\tau L^2) L = \tau L^3$.

1.2 Tensori degli sforzi

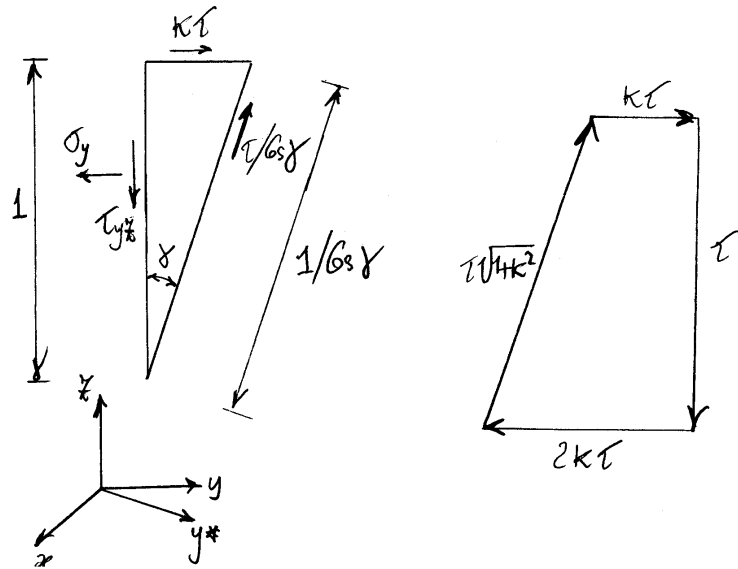
Tensori degli sforzi nel sistema $Oxyz$

Le colonne del tensore di Cauchy nel sistema $Oxyz$ rappresentano le componenti delle tensioni nelle giaciture di normale agli assi coordinati.

Sulla faccia di normale y risulta:

$$\sigma_y = 2K\tau \quad \text{e} \quad \tau_{yz} = \tau, \quad (1)$$

come si ottiene dall'equilibrio di un prisma di altezza unitaria e la cui base triangolare è illustrata nel seguito.



Dunque :

$$\underline{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k\tau & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Poiché il gradiente della deformazione risulta:

$$\underline{F} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{F}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ed inoltre :

$$J = \det \underline{F} = 1, \quad (4)$$

il primo tensore di Piola-Kirchhoff risulta:

$$\underline{P} = J \underline{\sigma} \underline{F}^{-T} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k\tau & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 1 \end{bmatrix},$$

ovverossia:

$$\underline{P} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k\tau & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Infine, il secondo tensore di Piola-Kirchhoff risulta:

$$\underline{S} = J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T} = \underline{F}^{-1} \underline{P} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k\tau & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix},$$

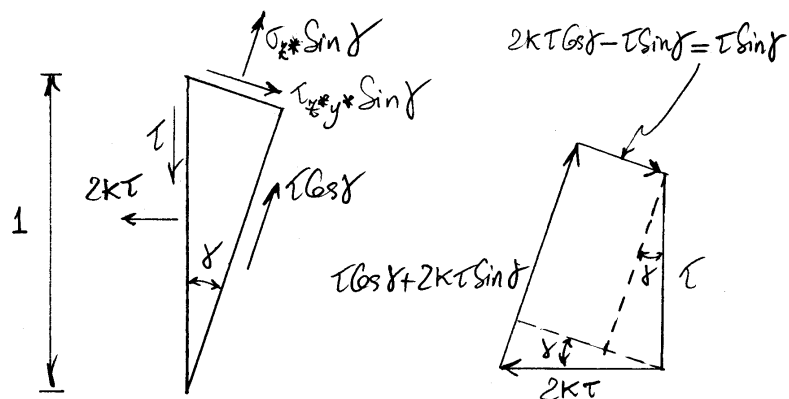
e cioè:

$$S \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

1.3 Componenti normale e tangenziale di tensione

Componenti normale e tangenziale di tensione sulla giacitura di normale $\hat{x}^*$

Consideriamo l'equilibrio di un prisma di altezza 1 e avente base triangolare.



Risulta:

$$\sigma_{x^*} = 2K\tau \quad \text{e} \quad \tau_{x^*y^*} = \tau. \quad (7)$$

La seconda delle (2) è in accordo con il teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali.

1.4 Cambio di coordinate

Cambio di coordinate $Oxyz \Rightarrow Oxy^*z^*$

Poiché l'asse z resta invariato, ci si può limitare all'analisi del caso piano $Oyz \Rightarrow Oy^*z^*$.

Il tensore rotazione che equivale alla rotazione $-\gamma$ (rotazione negativa perché oraria) vale:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Risulta quindi:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_{y^*} & \tau_{y^*z^*} \\ \tau_{y^*z^*} & \sigma_{z^*} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2K\tau & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \\
 \underline{\sigma^*} & \quad \underline{R^T} \quad \underline{\sigma} \quad \underline{R} \\
 &= \begin{bmatrix} \tau \sin \gamma & \tau \cos \gamma \\ 2K\tau \sin \gamma + \tau \cos \gamma & \tau \sin \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \tau \sin \gamma \cos \gamma - \tau \cos \gamma \sin \gamma & \tau \sin^2 \gamma + \tau \cos^2 \gamma \\ 2\tau \sin^2 \gamma + \tau \cos^2 \gamma - \tau \sin^2 \gamma & 2K\tau \sin^2 \gamma + \tau \cos \gamma \sin \gamma + \tau \sin \gamma \cos \gamma \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

e cioè:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{y^*} & \tau_{y^*z^*} \\ \tau_{y^*z^*} & \sigma_{z^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 2K\tau \end{bmatrix}.$$

In definitiva si ha:

$$\sigma_{y^*} = 0, \quad \sigma_{z^*} = 2K\tau, \quad \tau_{y^*z^*} = \tau \quad (9)$$

1.5 Componenti del secondo tensore di Piola-Kirchhoff

Ricordiamo che:

$$\begin{aligned}
 S_{ij} &= \underline{e}_i \cdot \underline{S} \underline{e}_j = \underline{e}_i \cdot (\underline{J} \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T}) \underline{e}_j = \\
 &= \underline{J} \underline{F}^{-T} \underline{e}_i \cdot \underline{\sigma} (\underline{F}^{-T} \underline{e}_j),
 \end{aligned}$$

e che:

$$\underline{F}^{-T} \underline{e}_i = \frac{1}{\underline{J}} \frac{dA_i}{dA_{0i}} \underline{n}_i = \frac{1}{\underline{J}} \lambda_i \underline{n}_i, \quad (10)$$

dove dA_i è l'area deformata e dA_{0i} l'area indeformata della giacitura indeformata di normale $\underline{e}_i$, mentre $\underline{n}_i$ è la normale alla giacitura deformata. Inoltre:

$$\begin{cases} \lambda_i = \frac{dA_i}{dA_{0i}}, & (\text{stiramento quadratico}), \\ \underline{J} = \frac{dV}{dV_0}, & (\text{stiramento cubico}), \end{cases} \quad (11)$$

Risulta quindi:

$$S_{ij} = \frac{\lambda_i \lambda_j}{\underline{J}} \underline{n}_i \cdot \underline{\sigma} \underline{n}_j. \quad (12)$$

Limitandosi alla sola parte piana (assi y e z), poiché risulta:

$$\underline{n}_y = \underline{e}_{y*} \equiv \begin{Bmatrix} \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{Bmatrix}, \quad \underline{n}_z = \underline{e}_z \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

$$\lambda_y = \frac{1}{\cos \gamma} = \sqrt{1+k^2}, \quad \lambda_z = 1, \quad J = 1, \quad (14)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} S_{yy} &= (1+k^2) [\cos \gamma \quad -\sin \gamma] \begin{bmatrix} 2k\tau & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{Bmatrix} \\ &= (1+k^2) [\tau \sin \gamma \quad \tau \cos \gamma] \begin{Bmatrix} \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{Bmatrix} = 0, \end{aligned}$$

$$S_{zz} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 2k\tau & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0,$$

$$S_{zy} = \frac{1}{\cos \gamma} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 2k\tau & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\cos \gamma} [\tau \quad 0] \begin{Bmatrix} \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{Bmatrix} = \tau.$$

Verifichiamo le (13):

$$\underline{n}_y = \frac{J}{\lambda_y} \underline{F}^{-T} \underline{e}_y = \cos \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{Bmatrix},$$

$$\underline{n}_z = \frac{J}{\lambda_z} \underline{F}^{-T} \underline{e}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

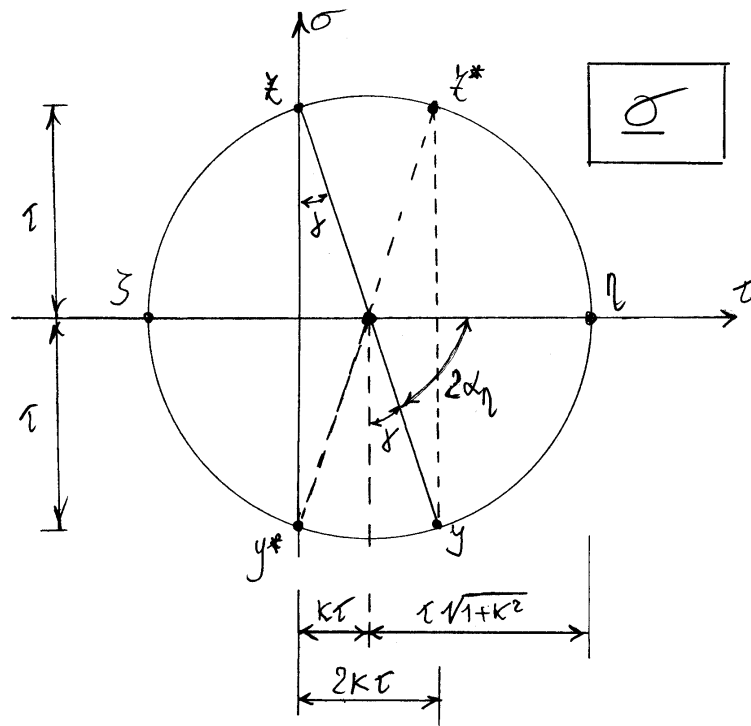
e le (14):

$$\begin{aligned} \lambda_y &= \sqrt{\underline{F}^{-T} \underline{e}_y \cdot \underline{F}^{-T} \underline{e}_y} \\ &= \left([0 \quad 1 \quad -k] \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -k \end{Bmatrix} \right)^{1/2} = \sqrt{1+k^2}, \end{aligned}$$

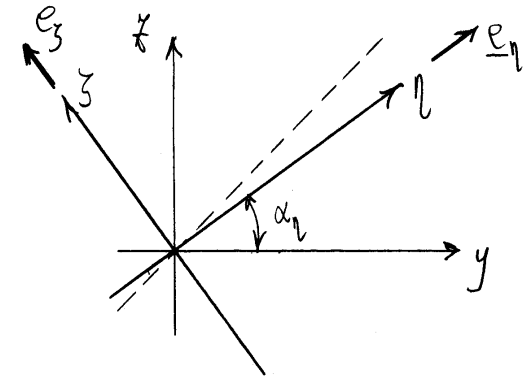
$$\lambda_z = \sqrt{\underline{F}^{-T} \underline{e}_z \cdot \underline{F}^{-T} \underline{e}_z} = \left([0 \quad 0 \quad 1] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \right)^{1/2} = 1.$$

1.6 Circonferenze di Mohr e direzioni principali di tensione

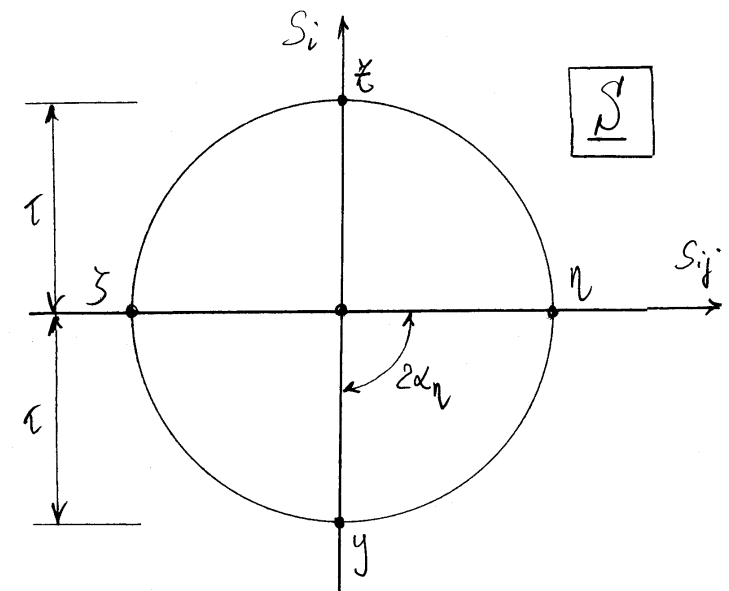
Circonferenze di Mohr e direzioni principali di tensione del tensore degli sforzi di Cauchy

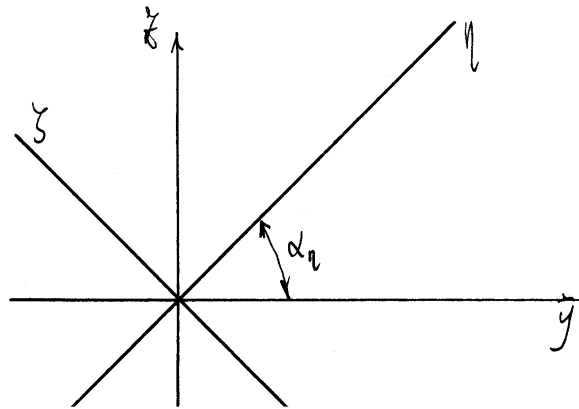


$$\begin{cases} \text{Raggio} = \frac{\tau}{\cos \delta} = \tau \sqrt{1+k^2} \\ \alpha_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = (k + \sqrt{1+k^2}) \tau \\ \sigma_3 = (k - \sqrt{1+k^2}) \tau \end{cases}$$



Circonferenze di Mohr e direzioni principali di tensione secondo tensore di Piola-Kirchhoff





$$\alpha_z = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} S_\eta = \tau \\ S_z = -\tau \end{cases}$$

1.7 Verifica dei valori principali del tensore degli sforzi di Cauchy

Riferendosi al solo piano $y\bar{x}$, le direzioni principali sono:

$$\underline{e}_\eta \equiv \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_z \equiv \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Risulta quindi:

$$\underline{\sigma}_{\underline{e}_\eta} \equiv \begin{Bmatrix} 2k \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \end{Bmatrix} \tau.$$

La tensione tangenziale $\tau_{z\eta}$ sulla giacitura di normale η risulta allora:

$$\begin{aligned} \tau_{z\eta} &= \underline{e}_z \cdot \underline{\sigma}_{\underline{e}_\eta} = \left\{ 2k \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \right\} \tau \\ &= (k \cos \gamma - \sin \gamma) \tau = 0, \end{aligned}$$

avendo considerato che:

$$\begin{cases} 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \cos \gamma, \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin \gamma. \end{cases}$$

Infine la tensione normale σ_η sulla giacitura di normale η risulta:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\eta} &= \underline{e}_{\eta} \cdot \underline{\sigma} \underline{e}_{\eta} = \left\{ 2K \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \right\} \tau = \\
 &= \left\{ K \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \right] + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \right\} \tau = \\
 &= \left\{ K + K \sin \gamma + \cos \gamma \right\} \tau = \\
 &= \left(K + \frac{\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma}{\cos \gamma} \right) \tau = (K + \sqrt{1+K^2}) \tau,
 \end{aligned}$$

avendo considerato che:

$$2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right).$$

Utilizzando il primo tensore di Piola-Kirchhoff, tenendo conto che:

$$\begin{aligned}
 \frac{dA_{0\eta}}{dA_{\eta}} \underline{N}_{\eta} &= \frac{1}{J} \underline{F}^T \underline{e}_{\eta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ K & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \end{Bmatrix} = \\
 &= \begin{Bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \\ K \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \end{Bmatrix}, \quad (16)
 \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{dA_{0\eta}}{dA_{\eta}} \underline{P} \underline{N}_{\eta} &= \begin{bmatrix} K \tau & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \\ K \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \end{Bmatrix} = \\
 &= \begin{Bmatrix} 2K \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \end{Bmatrix} \tau,
 \end{aligned}$$

in componenti Oyz . Occorre ruotare, per avere le componenti nel sistema $O\eta\zeta$, dell'angolo $\alpha_{\eta} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 2K \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \end{Bmatrix} \tau = \\
 &= \tau \begin{Bmatrix} 2K \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \\ -2K \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \end{Bmatrix} = \\
 &= \begin{Bmatrix} (K + \sqrt{1+K^2}) \tau \\ 0 \end{Bmatrix}.
 \end{aligned}$$

1.8 Principio dei lavori virtuali

Risulta:

$$\underline{\delta u} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ x \delta k \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ z \delta k \\ 0 \end{Bmatrix},$$

dove:

$$\delta k = \frac{\delta x}{\cos^2 x} = \delta x \sqrt{1+k^2}.$$

Inoltre:

$$\text{grad } \underline{\delta u} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \delta k \\ 0 & \frac{1}{2} \delta k & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\delta H} = \underline{\delta F} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\delta C} = \underline{F}^T \underline{\delta F} + \underline{\delta F}^T \underline{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta k \\ 0 & \delta k & 2k \delta k \end{bmatrix},$$

$$\underline{\delta E} = \frac{1}{2} \underline{\delta C} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \delta k \\ 0 & \frac{1}{2} \delta k & k \delta k \end{bmatrix}.$$

I lavori risultano:

$$L_{ve} = (\tau L^2)(L \delta k) = \tau L^3 \delta k,$$

$$L_{vi} = \int_{\mathcal{B}} \underline{\sigma} \cdot \underline{\delta \varepsilon} dV = \int_{\mathcal{B}} \left(\tau \frac{\delta k}{2} + \tau \frac{\delta k}{2} \right) dV = \tau L^3 \delta k,$$

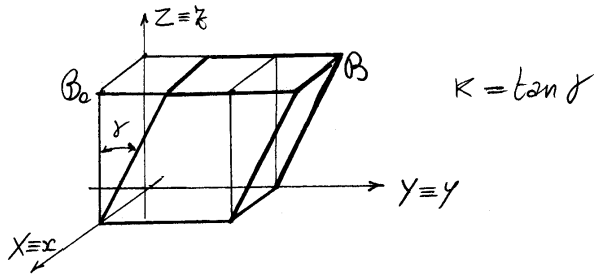
$$L_{vi} = \int_{\mathcal{B}_0} \underline{P} \cdot \underline{\delta F} dV_0 = \int_{\mathcal{B}_0} \tau \delta k dV_0 = \tau L^3 \delta k,$$

$$L_{vi} = \int_{\mathcal{B}_0} \underline{S} \cdot \underline{\delta E} dV_0 = \int_{\mathcal{B}_0} \left(\tau \frac{\delta k}{2} + \tau \frac{\delta k}{2} \right) dV_0 = \tau L^3 \delta k.$$

Capitolo 2

Esercizio sulla elasticità isotropa

Sia data una deformazione di scorrimento semplice di un



corpo elastico omogeneo ed isotropo:

- 1) Verificare che la forza di volume è nulla;
- 2) Calcolare gli invarianti principali di $\underline{C}$;
- 3) Calcolare il secondo tensore di Piola-Kirchhoff facendo uso della rappresentazione in termini di $\underline{I}$, $\underline{C}$ e $\underline{C}^{-1}$ e verificare che il risultato è analogo a quello ottenuto dalle altre due rappresentazioni;
- 4) Valutare il tensore degli sforzi di Cauchy in funzione delle componenti di $\underline{S}'$;

5) Valutare le componenti normale e tangenziale della tensione agente nella giacitura originariamente normale all'asse Y .

SCORRIMENTO SEMPLICE DI UN CORPO ELASTICO OMOGENEO ED ISOTROPO

Deformazione omogenea $\Rightarrow$ tensione omogenea?

Quindi:

$$\text{Div } \underline{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{f} = 0.$$

Invarianti principali di $\underline{C}$:

$$I_1 = \text{tr } \underline{C} = 3 + \kappa^2,$$

$$I_2 = \det \underline{C} \text{ tr } \underline{C}^{-1} = 3 + \kappa^2,$$

$$I_3 = \det \underline{C} = 1.$$

Secondo tensore di Piola-Kirchhoff:

$$\underline{S}' = \beta_0 \underline{I} + \beta_1 \underline{C} + \beta_2 \underline{C}^{-1},$$

dove β_0, β_1 e β_2 sono funzioni solo di κ^2 .

In componenti:

$$S_{xx} = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2,$$

$$S_{yy} = \beta_2 K^2 + S_{xx},$$

$$S_{zz} = \beta_1 K^2 + S_{xx},$$

$$S_{xy} = 0,$$

$$S_{xz} = 0,$$

$$S_{yz} = (\beta_1 - \beta_2) K = \mu K.$$

$\mu = \beta_1 - \beta_2$ rappresenta il modulo di elasticità

tangenziale generalizzato.

Effetto Poyniting:

$$S_{zz} - S_{yy} = \mu K^2 = S_{yz} K.$$

Tensore degli sforzi di Cauchy:

$$\underline{\sigma} = \frac{1}{J} \underline{F} \underline{S} \underline{F}^T = \frac{1}{J} (\beta_0 \underline{B} + \beta_1 \underline{B}^2 + \beta_2 \underline{I}).$$

Risult:

$$\underline{B}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+3K^2+K^4 & K(2+K^2) \\ 0 & K(2+K^2) & 1+K^2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\sigma} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & K \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & S_{yy} & S_{yz} \\ 0 & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & K & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & K \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & S_{yy} + K S_{yz} & S_{yz} \\ 0 & S_{yz} + K S_{zz} & S_{zz} \end{bmatrix},$$

e quindi:

$$\sigma_x = S_{xx},$$

$$\sigma_y = S_{yy} + K^2 S_{zz} + 2K S_{yz},$$

$$\sigma_z = S_{zz},$$

$$\tau_{xy} = 0,$$

$$\tau_{xz} = 0,$$

$$\tau_{yz} = S_{yz} + K S_{zz}.$$

Effetto Poynthing

$$\begin{aligned}\sigma_y - \sigma_z &= S_{yy} - S_{zz} + K S_{yz} + K (S_{yz} + K S_{zz}) \\ &= -K S_{yz} + K S'_{yz} + K \tau_{yz},\end{aligned}$$

cioè:

$$\sigma_y - \sigma_z = K \tau_{yz}$$

Calcoliamo ora le componenti normale σ e tangenziale $\underline{\tau}$ della tensione agente nella giacitura originaria = mente normale all'asse Y . Normale $\underline{N}$ alla giacitura indeformata e normale $\underline{n}$ alla giacitura deformata:

$$\underline{N} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{n} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{Bmatrix}.$$

Rapporto tra le aree A_0 indeformata e A deformata:

$$\frac{A}{A_0} = \frac{1}{\cos \gamma}.$$

Forza per unità di area indeformata:

$$\underline{t}^* = \underline{P} \underline{N} = \underline{F} \underline{S} \underline{N}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & K \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & S_{yy} & S_{yz} \\ 0 & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & S_{yy} + K S_{yz} & S_{yz} + K S_{zz} \\ 0 & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ S_{yy} + K S_{yz} \\ S_{yz} \end{Bmatrix}.$$

Forza per unità di area deformata:

$$\underline{t} = \underline{t}^* \frac{A_0}{A} = \underline{t}^* \cos \gamma.$$

Componente normale di tensione:

$$\begin{aligned}\sigma &= \underline{t} \cdot \underline{n} = G_s \gamma \underline{t}^* \cdot \underline{n} = \\ &= S_{xy} G_s^2 \gamma + (S_{yz} \sin \gamma - S_{yz} \sin \gamma) G_s \gamma \\ &= S_{xy} G_s^2 \gamma = \frac{S_{xy}}{1 + \kappa^2}.\end{aligned}$$

Componente tangenziale di tensione:

$$\begin{aligned}\underline{\tau} &= \underline{t} - \sigma \underline{n} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ S_{xy} G_s \gamma + S_{yz} \sin \gamma - S_{xy} G_s^3 \gamma \\ S_{yz} G_s \gamma + S_{xy} \sin \gamma G_s^2 \gamma \end{Bmatrix}.\end{aligned}$$

Capitolo 3

Esercizio sul sistema di coordinate convected

Sistema cartesiano ortogonale $OXYZ$

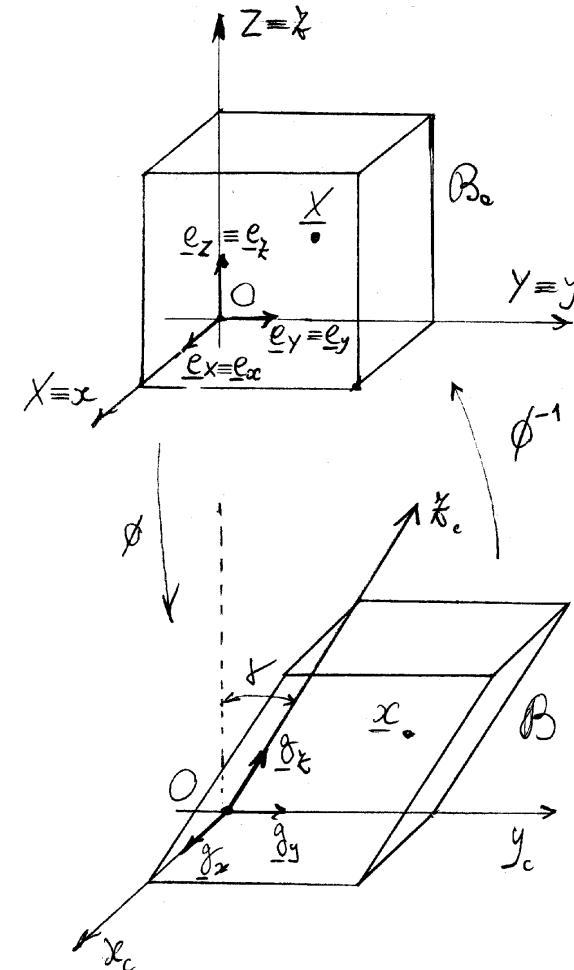
Base ortonormale $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$

(X, Y, Z) coordinate cartesiane ortogonali di $\underline{x}$ nel sistema $OXYZ$ (notazione indiciale X_i)

(x, y, z) coordinate cartesiane ortogonali di $\underline{x}$ nel sistema $OXYZ$ (notazione indiciale x_i)

La deformazione ϕ si rappresenta come segue:

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y + KZ \\ z = Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = x \\ Y = y - Kz \\ Z = z \end{cases}$$



3.1 Sistema generale convected

Il sistema generale convected assegna, ad un punto $\underline{x}$ della configurazione B deformata, le tre coordinate (x_c, y_c, z_c) (in notazione indiciale x_c^i) cartesiane ortogonali nel sistema $OXYZ$ del punto materiale $\underline{X}$ corrispondente di $\underline{x}$ nella deformazione:

$$x_c^i(\underline{x}) : \underline{x} \xrightarrow{\phi^{-1}} \underline{X} \xrightarrow{OXYZ} (x_c, y_c, z_c).$$

Inversamente:

$$\underline{x}(x_c^i) : (x_c, y_c, z_c) \xrightarrow{OXYZ} \underline{X} \xrightarrow{\phi} \underline{x}.$$

Rappresentando il punto $\underline{x}$ nel sistema $OXYZ$ si ottengono le funzioni $x_c^i(x_i)$ e $x_i(x_c^i)$:

$$\begin{cases} x_c = x \\ y_c = y - Kz \\ z_c = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_c \\ y = y_c + Kz_c \\ z = z_c \end{cases}$$

Le superfici coordinate hanno equazioni $x_c^i(\underline{x}) = \text{cost}$

e dunque le equazioni:

$$\begin{cases} x = \text{cost} & (\text{piano perpendicolare a } X) \\ y - Kz = \text{cost} & (\text{piano parallelo a } X \text{ inclinato di } \gamma \\ & \text{rispetto a } Z) \\ z = \text{cost} & (\text{piano perpendicolare a } Z) \end{cases}$$

rappresentano le superfici coordinate descritte per il tramite del sistema cartesiano ortogonale. In definitiva le coordinate convected sono in tal caso individuate dal sistema cartesiano obliquo $Oxeyz$ indicato in figura.

Le basi locali $\underline{g}_i$ rappresentano le tangenti alle linee coordinate:

$$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{x}}{\partial x_c^i},$$

ovverossia, in componenti cartesiane:

$$\underline{g}_i = \frac{\partial x_j}{\partial x_c^i} \underline{e}_j$$

e quindi:

$$\begin{cases} \underline{g}_x = \underline{e}_x \\ \underline{g}_y = \underline{e}_y \\ \underline{g}_z = K\underline{e}_y + \underline{e}_z \end{cases}$$

Nel sistema generale convected la deformazione ϕ si rappresenta come segue:

$$\begin{cases} x_c = X \\ y_c = Y \\ z_c = Z \end{cases}$$

Base duale

$$\underline{g}^i \cdot \underline{g}_j = \delta^i_j,$$

ovvero:

$$\left. \begin{aligned} \underline{g}^x \cdot \underline{e}_x &= 1 \\ \underline{g}^x \cdot \underline{e}_y &= 0 \\ \underline{g}^x \cdot (K\underline{e}_y + \underline{e}_z) &= 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow \underline{g}^x = \underline{e}_x$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{g}^y \cdot \underline{e}_x &= 0 \\ \underline{g}^y \cdot \underline{e}_y &= 1 \\ \underline{g}^y \cdot (K\underline{e}_y + \underline{e}_z) &= 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow \underline{g}^y = \underline{e}_y - K\underline{e}_z$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{g}^z \cdot \underline{e}_x &= 0 \\ \underline{g}^z \cdot \underline{e}_y &= 0 \\ \underline{g}^z \cdot (K\underline{e}_y + \underline{e}_z) &= 1 \end{aligned} \right| \Rightarrow \underline{g}^z = \underline{e}_z$$

Tensore metrico spaziale (componenti contravarianti):

$$\underline{g}^{ij} = \underline{g}^i \cdot \underline{g}^j \Rightarrow \underline{g} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+K^2 & -K \\ 0 & -K & 1 \end{bmatrix}$$

Tensore metrico spaziale (componenti covarianti):

$$\underline{g}_{ij} = \underline{g}_i \cdot \underline{g}_j \Rightarrow \underline{g} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & K \\ 0 & K & 1+K^2 \end{bmatrix}$$

Shifter (componenti miste):

$$I^i_J = \underline{g}^i \cdot \underline{e}_J \Rightarrow \underline{I} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}(x_c^j) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ k z_c \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ k z_c \\ 0 \end{Bmatrix}$$

cioè:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = k z_c \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{u} = k z_c \underline{g}_y = k z_c \underline{e}_y$$

Shifter inverso (componenti miste):

$$I^I_j = \underline{e}^I \cdot \underline{g}_j \Rightarrow \underline{I}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gradiente della deformazione

3.2 Spostamenti e deformazione

Campo materiale (componenti materiali):

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = k z \\ w = 0 \end{cases}$$

$$F^i_J = \frac{\partial x^i}{\partial X^J}, \quad F^{-1 I}_j = \frac{\partial X^I}{\partial x^j},$$

$$\underline{F} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{F}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Campo spaziale (componenti spaziali contravarianti):

$$\underline{u}^i(x_c^j) = I^i_I u^I(x^J(x_c^j))$$

Trasposto di $\underline{F}$:

$$\underline{F}^{T I}_i = \underline{G}^{I J} \underline{g}_{i j} F^j_J, \quad \underline{F}^T = (\underline{g} \underline{F} \underline{G})^T$$

$$\underline{F}^T \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1+\kappa^2 \end{bmatrix}.$$

Trasposto di $\underline{F}^{-1}$:

$$\underline{F}^{-T}{}^i{}_1 = g^{ij} G_{IJ} F^{-1}{}^J{}_j, \quad \underline{F}^{-T} = (\underline{G} \underline{F}^{-1} \underline{g})^T$$

$$\underline{F}^{-T} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\kappa^2 & -\kappa \\ 0 & -\kappa & 1 \end{bmatrix}.$$

Vettore area materiale (sistema materiale OXYZ):

$$\underline{A}_{0Y} = L^2 \underline{e}_Y, \quad \underline{A}_{0Y} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ L^2 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Vettore area spaziale (sistema spaziale convected):

$$\underline{A}_Y = (\det \underline{F}) \underline{F}^{-T} \underline{A}_{0Y},$$

ovvero:

$$\underline{A}_Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\kappa^2 & -\kappa \\ 0 & -\kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ L^2 \\ 0 \end{Bmatrix} = L^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1+\kappa^2 \\ -\kappa \end{Bmatrix},$$

il che significa:

$$\begin{aligned} \underline{A}_Y &= L^2 \{ (1+\kappa^2) \underline{g}_Y - \kappa \underline{g}_Z \} = \\ &= L^2 \{ \underline{e}_Y + \kappa^2 \underline{e}_Y - \kappa^2 \underline{e}_Y - \kappa \underline{e}_Z \} = \\ &= L^2 \{ \underline{e}_Y - \kappa \underline{e}_Z \}. \end{aligned}$$

Gradiente degli spostamenti

Essendo la base $\underline{g}_i$ indipendente dal punto i simboli di Cristoffel sono nulli. Si ottiene allora:

$$\underline{H} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{grad } \underline{u} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E' immediato verificare che $\underline{I} + \underline{H} = \underline{F}$ e che $\underline{I} \underline{F}^{-1} + \text{grad } \underline{u} = \underline{I}_x$, tenendo conto che in componenti, viste l'identità (tensore metrico) speciale si rappresenta con la matrice identità.

Tensori di Cauchy-Green

$$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1+\kappa^2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{C}^{-1} = \underline{F}^{-1} \underline{F}^{-T} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\kappa^2 & -\kappa \\ 0 & -\kappa & 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{B} = \underline{F} \underline{F}^T \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1+\kappa^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}^{-1} = \underline{F}^{-T} \underline{F}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\kappa^2 & -\kappa \\ 0 & -\kappa & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolo di $\underline{e}_{x_c}$

$$\underline{e}_{x_c} = \frac{1}{\sqrt{\underline{e}_{x_c} \cdot \underline{B}^{-1} \underline{e}_{x_c}}} - 1$$

Si ha:

$$\underline{e}_{x_c} = \sin \gamma \underline{e}_y + \cos \gamma \underline{e}_x,$$

e:

$$\underline{e}_{x_c} \cdot \underline{g}^x = 0$$

$$\underline{e}_{x_c} \cdot \underline{g}^y = \sin \gamma - \kappa \cos \gamma = 0$$

$$\underline{e}_{x_c} \cdot \underline{g}^z = \cos \gamma$$

e quindi $\underline{e}_{z_c}$ si rappresenta, nel sistema spaziale convected, come segue:

$$\underline{e}_{z_c} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos \gamma \end{Bmatrix} .$$

Ne risulta :

$$\underline{e}_z \cdot \underline{B}^{-1} \underline{e}_z = \cos^2 \gamma ,$$

da cui :

$$\varepsilon_{z_c} = \frac{1}{\cos \gamma} - 1 .$$