

PUNTO MATERIALE VINCOLATO

- Punto vincolato a giacere sullo spazio $Q \subseteq \mathbb{R}^3$.

- Q è detto SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI.

- Q è PARAMETRIZZATO da COORDINATE LIBERE

$$\{q_1, \dots, q_m\}$$

$m = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \uparrow & \uparrow & \leftarrow \text{tutto } \mathbb{R}^3 \\ \text{curva} & \text{superficie} & \end{matrix}$

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1, \dots, q_m)$$

- m è detto "numero di gradi di libertà".

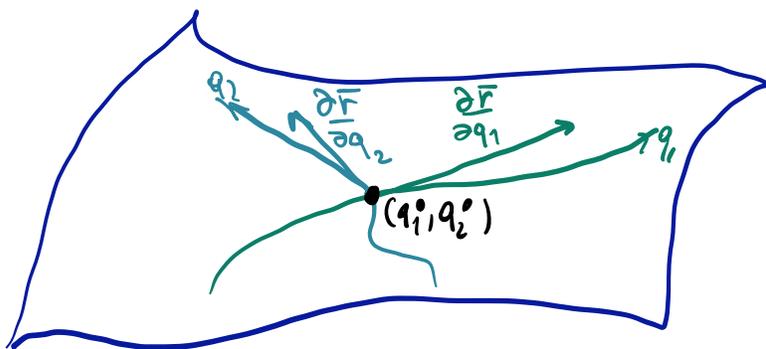
- Se vincolo varia nel tempo: $\bar{r} = \bar{r}(q_1, \dots, q_m; t)$.

Es: Base dell'ascensore:

$$\bar{r}(q_1, q_2; t) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ vt \end{pmatrix}$$

v : velocità di ascesa di ascensore

- $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}(q_1^0, \dots, q_m^0), \dots, \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_m}(q_1^0, \dots, q_m^0)$ sono vett. tg alle linee coordinate nel pto (q_1^0, \dots, q_m^0) , e formano

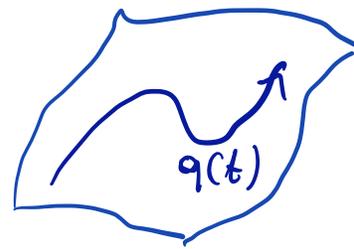


una base in lo

sp. tg $T_p Q$

con P individuato dalle coordinate q_1^0, \dots, q_m^0 .

- Il moto è descritto da n funzioni $q_1(t), \dots, q_n(t)$ la cui immagine è una **TRAJETTORIA** che giace su Q .



Siccome $Q \subseteq \mathbb{R}^3$, la traiettoria è anche una curva di \mathbb{R}^3 parametrizzata da funz. $\bar{r}(t)$ (che è qlo che vogliamo sapere per determinare il moto del pto materiale).

Le funz. $\bar{r}(t)$ sono ottenute componendo le funz. $q_1(t), \dots, q_n(t)$ con le funz. $\bar{r}(q_1, \dots, q_n)$, ottenendo

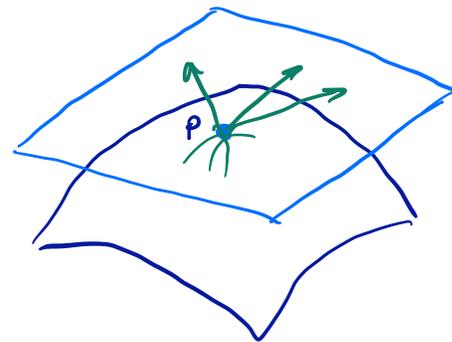
$$\bar{r}(t) = \bar{r}(q_1(t), \dots, q_n(t))$$

$$t \xrightarrow{\bar{r}(t)} \mathbb{R}^3$$

$$t \xrightarrow{q_1(t), \dots, q_n(t)} Q \xrightarrow{\bar{r}(q_1, \dots, q_n)} \mathbb{R}^3$$

- La **VELOCITA'** del pto materiale è un vettore \bar{v} di \mathbb{R}^3 ; se il pto è vincolato su Q , tale vettore sarà **TANGENTE** a Q .

⇒ Data una qualsiasi traiettoria che passa per $P \in Q$, la velocità sarà uno dei vett. di $T_P Q$.

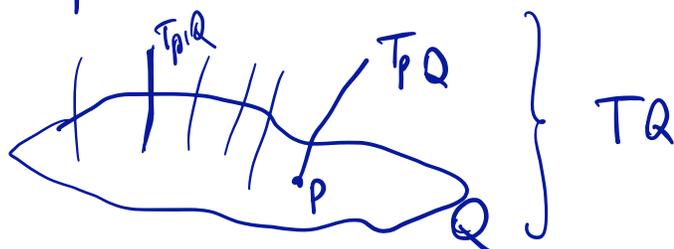


→ $T_P Q = \{ \text{spazio delle possibili velocità che un pto vincolato a } Q \text{ può avere in } P \in Q \}$

- Lo **STATO** di una particella è determinato dalle sue **POSIZIONE** e dalle sue **VELOCITA'**.

- Possiamo considerare l'insieme TQ dato dall'unione di tutti i $T_p Q$ con $P \in Q$. Esso è detto **FIBRATO TANGENTE** di Q .

Ha la forma e fibre: sopra ogni pto di Q ho un'intero sp. vettoriale



(Vedi libro di Arnold per una definizione)

Un pto di TQ è parametrizzato da $2n$ coord:

$$(q_1, \dots, q_n; u_1, \dots, u_n)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{indiv. viduati pto } P \in Q}$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{coeff. di } \bar{u} \in T_p Q}$

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}$$

Tali coordinate mi danno quindi una possibile **POSIZIONE** e una possibile **VELOCITA'** della particella vincolata a Q
 \Rightarrow mi danno un possibile **STATO** della particella.

$\rightarrow TQ$ è chiamato **SPAZIO DEGLI STATI**.

NOTAZIONE : decidiamo di usare il simbolo \dot{q}_k invece di u_k per indicare il secondo gruppo di coordinate di un pto in TQ .

[Qui "•" è un simbolo che ci permette di distinguere tra q_h e \dot{q}_k .]

↳ Le coord. su TQ saranno quindi:

$$(q_1, \dots, q_m; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

Dati questi $2n$ numeri dobbiamo essere in grado di dire lo STATO delle particelle, cioè la sua posizione \bar{r} e la sua velocità \bar{v} in \mathbb{R}^3 .

• Per la POSIZIONE sappiamo come:

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1, \dots, q_m)$$

• Per la VELOCITÀ ?

Prendiamola larga; consideriamo il moto $\bar{r}(t) = \bar{r}(q_1(t), \dots, q_m(t))$

La velocità al tempo t è dato da

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h}(q_1(t), \dots, q_m(t)) \dot{q}_h(t)$$

↑
vett. base di T_pQ

qui "•" vuol dire derivata rispetto a t

→ $\bar{v}(t)$ è un vettore di T_pQ dove P è il pto di Q toccato dal moto al tempo t .

Abbiamo quindi la funt. che a un pt in TQ associa \bar{v} :

$$\bar{v}(\underbrace{q_1, \dots, q_m}_{\text{coord su } Q}; \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m}_{\text{coord su } T_p Q}) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k}(q_1, \dots, q_m) \dot{q}_k$$

- Il moto $\bar{r}(t)$ in Q determina un moto su TQ dato dalle funzioni

$$(q_1(t), \dots, q_m(t); \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_m(t))$$



Queste sono proprio le derivate di $q_k(t)$ rispetto a t e mi dicono come variano le coord. su $T_p Q$ al variare di t (notazione \bar{v} consistente).

- Se il vincolo \bar{v} è mobile

$$\begin{aligned} \bar{v}(t) &= \frac{d}{dt} \bar{r}(t) = \frac{d}{dt} \bar{r}(q_1(t), \dots, q_m(t), t) = \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k}(q_1(t), \dots, q_m(t), t) \dot{q}_k(t) + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}(q_1(t), \dots, q_m(t), t) \end{aligned}$$

Quindi lo stato della particella è dato da

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1, \dots, q_m; t)$$

$$\bar{v} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k}(q_1, \dots, q_m, t) \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}(q_1, \dots, q_m, t)$$

SISTEMI VINCOLATI DI N PTI MATERIALI

N pti materiali sono individuati da $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N$
→ ho bisogno di $3N$ coord. Cartesiane

Notazione: $\bar{w} = (w_1, \dots, w_{3N}) = (\underbrace{x_1, y_1, z_1}_{\bar{r}_1}, \underbrace{x_2, y_2, z_2}_{\bar{r}_2}, \dots, \underbrace{x_N, y_N, z_N}_{\bar{r}_N})$
 $w_j \quad j=1, \dots, 3N$

$\bar{w} \in \mathbb{R}^{3N} \rightarrow$ un pto di \mathbb{R}^{3N} mi da una configurazione di N pti

Def. Si dice che un sist. di N pti $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N$ è soggetto

• π VINCOLI OLONOMI ($0 < \pi < 3N$), se

l'insieme delle configurazioni accessibili soddisfa

π equazioni delle forme

$$f^{(s)}(\bar{w}, t) = 0 \quad s=1, \dots, \pi \quad (\neq)$$

dove $f^{(1)}, \dots, f^{(\pi)}$ sono funtz. regolari e indep., cioè

$$\text{rk} \left(\frac{\partial f^{(s)}}{\partial w_j} \right) = \pi \quad \forall \text{ confj. accessibile, cioè che soddisfa } (\neq)$$

↑
"ranko"

↕
 $\nabla f^{(1)}, \dots, \nabla f^{(\pi)}$ sono lin. indep.

⇒ \forall tempo t , resta definita una varietà $Q \subset \mathbb{R}^{3N}$ di d'u.
 $n = 3N - \pi$

Q è chiamato SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI

n è detto NUMERO DI GRADI DI LIBERTA'

Possiamo introdurre (almeno localm.) una parametrizzazione di Q , cioè esprimere le w_i in funzione di n parametri q_h detti **COORDINATE LIBERE**

(Teorema delle funz. implicite ci assicura che possiamo esprimere r variabili in funz. delle rimanenti: $3N - r \rightarrow$ es. di una parametrizzazione)

$$w_j = w_j(q_1, \dots, q_n, t) \quad j=1, \dots, 3N$$

h.c.

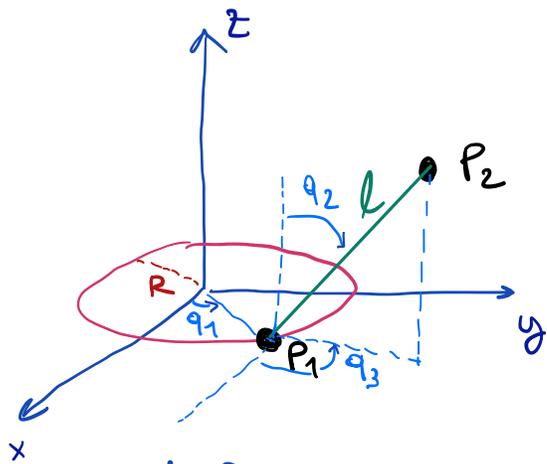
$$rk \left(\frac{\partial w_j}{\partial q_h} \right) = n \iff \frac{\partial w}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial q_n} \text{ sono l'n. i'ndip.}$$

$$j=1, \dots, 3N \\ h=1, \dots, n$$

↑
rett. t_j alle linee coordinate relative a q_1, \dots, q_n

(Ci sono infinite parametrizzazioni possibili; data una parametr. con q_1, \dots, q_n , possiamo fare una trasform. di coord. e passare a $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n$)

ESEMPIO



Reazioni vincolari:

$$x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0 \quad f^{(1)}$$

$$z_1 = 0 \quad f^{(2)}$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0 \quad f^{(3)}$$

$$N = 2 \quad r = 3 \quad \rightarrow \quad m = 3N - r = 3$$

$$\nabla f^{(1)} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2y_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f^{(3)} = \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2) \\ 2(y_1 - y_2) \\ 2(z_1 - z_2) \\ 2(x_2 - x_1) \\ 2(y_2 - y_1) \\ 2(z_2 - z_1) \end{pmatrix}$$

→ LINEARI. INDIPENDENTI

Descrizione parametrica:

$$x_1 = R \cos q_1$$

$$y_1 = R \sin q_1$$

$$z_1 = 0$$

$$x_2 = R \cos q_1 + l \sin q_2 \cos q_3$$

$$y_2 = R \sin q_1 + l \sin q_2 \sin q_3$$

$$z_2 = l \cos q_2$$

$$\leftarrow \bar{w} = \bar{w}(q_1, q_2, q_3)$$

Base coord. di $T_p Q$:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial q_1} = \begin{pmatrix} -R \sin q_1 \\ R \cos q_1 \\ 0 \\ -R \sin q_1 \\ R \cos q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial q_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ l \cos q_2 \cos q_3 \\ l \cos q_2 \sin q_3 \\ -l \sin q_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial q_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -l \sin q_2 \sin q_3 \\ l \sin q_2 \cos q_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SISTEMA DI N PUNTI MATERIALI VINCOLATI

Configurazioni date da

$$\bar{w} = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_{3N}) = (\underbrace{x_{11}, y_{11}, z_{11}}_{\bar{r}_1}, \underbrace{x_{21}, y_{21}, z_{21}}_{\bar{r}_2}, \dots, \underbrace{x_{N1}, y_{N1}, z_{N1}}_{\bar{r}_N})$$

$\hookrightarrow w_j \quad j=1, \dots, 3N$

Vincoli dati da

$$f^{(s)}(\bar{w}, t) = 0 \quad s=1, \dots, r \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{I gradi di libert\`a sono} \\ m = 3N - r \end{array}$$

La forma parametrica dei vincoli \`e descritta da

$$w_j = w_j(q_1, \dots, q_m; t) \quad j=1, \dots, 3N \quad (*)$$

I parametri q_1, \dots, q_m sono chiamati *coordinate libere*.

Le funzioni soddisfano (per una buona parametrizzazione)

$$\text{rk} \left(\frac{\partial w_j}{\partial q_k} \right) = m \quad \begin{array}{l} j=1, \dots, 3N \\ k=1, \dots, m \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_m} \text{ sono linearmente indipendenti}$$

\downarrow

$\frac{\partial \bar{w}}{\partial q_l}(q_1, \dots, q_m, t)$ formano una base per lo spazio tangente $T_p Q$
con $p \in Q$ individuato dalle coordinate (q_1, \dots, q_m) al tempo t .

Un moto in Q \`e descritto dalle funzioni $q_h(t) \quad h=1, \dots, m$

Il cambiamento di stato all'avanzare del tempo \`e dato dalle funzioni

$$(q_1(t), \dots, q_m(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_m(t))$$

Le velocità delle singole particelle, lungo un moto, sono

$$\bar{v}_i(t) = \dot{\bar{r}}_i(t) = \frac{d}{dt} \bar{r}_i(q_1(t), \dots, q_m(t)) = \sum_h \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \dot{q}_h(t)$$

↑
vincolo fisso

Cioè la funz. $\bar{v}_i(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \equiv \sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}(q_1, \dots, q_m) \dot{q}_k$
valutata sul moto.

Il vettore $\sum_h \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h}(q_1, \dots, q_m)$ è un vett. $3N$ -d'im dato dalle
velocità delle N particelle $\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_N \end{pmatrix}$.

→ Lo stato del sistema è dato da $(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_N) = \left(\bar{w}(q), \sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h}(q) \dot{q}_h \right)$ } cioè lo stato è determinato da un pto $(q, \dot{q}) \in TQ$

Se il vincolo è **MOBILE**, allora è dato in forma parametrica da

$$\bar{w} = \bar{w}(q_1, \dots, q_m, t) \leftarrow \text{funz. di } m+1 \text{ variab.}$$

Le velocità sono ora lungo un moto

$$\bar{v}_i(t) = \sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(q_1(t), \dots, q_m(t), t) \dot{q}_h(t) + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(q_1(t), \dots, q_m(t), t)$$

cioè è la funzione

$$\bar{v}_i(q, \dot{q}, t) \equiv \sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(q_1, \dots, q_m, t) \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(q_1, \dots, q_m, t)$$

valutata sul moto $q(t)$.

↑
pezzo extra dovuto al moto del vincolo