Lezione 6 marzo 2025
giovedì 6 marzo 2025 10:13

Geo 3 mod B

Curve e sup. in $\mathbb{R}^3$ con CALCOLO DIFF.

Vedremo: nozione e proprietà LOCALI di curve e sup (vettor tg., curvatura, torsione, curvature principali, ...)

Anche GLOBALI: ad es, se conosciamo curvatura di Gauss di una sup chiusa compatta in $\mathbb{R}^3$ in ogni punto, possiamo dedurre il suo tipo topologico.

Cons. $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ (ovvero $\mathbb{R}^n$)

con PRODOTTO SC. STANDARD

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right\rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

e NORMA EUCLIDEA: $\left\|\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right\| := \sqrt{\sum x_i^2}$

e TOPOLOGIA EUCLIDEA

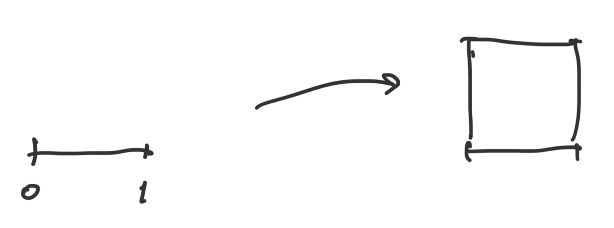
Def. Una curva PARAMETRIZZATA in $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ non costante con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo (solitamente aperto, non necess. limitato)

Le curve si dice:

- CONTINUA se α è continua, cioè $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$, $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ è continua $\iff$ $x_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sono continue $\forall i = 1, \dots, n$
- di classe C^k se α di classe C^k $\iff$ $x_i(t)$ di classe C^k
- DIFFERENZIABILE o LISCIA (SMOOTH) se α è C^∞ $\iff$ $x_i(t)$ di classe C^∞

Oss. La continuità può dare brutte sorprese; ad esempio, $\exists$ la CURVA DI PEANO

$$\alpha : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$$



con α continua e SURIETTIVA (non iniettiva, né differenziabile)

Def. α si dice REGOLARE se $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t)\\ x_2'(t)\\ \vdots\\ x_n'(t)\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ $\forall t \in I$. Se $t_0 \in I$ è tale che $\alpha'(t_0) = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ allora $\alpha(t_0)$ si dice PUNTO SINGOLARE di α.

Se $\alpha'(t) \neq \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$, tale vettore è chiamato VETTORE TANGENTE o VETTORE VELOCITÀ.

Def: Il sottoinsieme $\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ viene chiamato TRACCIA di α.

Esempio 1 Le curve più semplici sono le RETTE AFFINI in $\mathbb{R}^n$; esse possono essere date come intersezione di $n-1$ iperpiani affini, oppure con equazioni parametriche del tipo:

$$L: \begin{cases} x_1(t) = q_1 + \alpha_1 t \\ x_2(t) = q_2 + \alpha_2 t \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ x_n(t) = q_n + \alpha_n t \end{cases}$$

dove $Q = (q_1, \dots, q_n) \in L$ è un punto fissato della retta e $v = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ è un VETTORE DIREZIONE.

La retta L è la traccia della seguente curva parametrizzata:

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$\alpha(t) = (q_1 + \alpha_1 t, q_2 + \alpha_2 t, \dots, q_n + \alpha_n t).$$

è LISCIA e REGOLARE.

OSS.: Può succedere che 2 curve parametrizzate abbiano la stessa traccia, ma siano diverse:

$\alpha \neq \beta$, $\alpha(I) = \beta(I)$.

Nel caso delle rette affini: ogni $L \subseteq \mathbb{R}^n$ ammette infinite parametrizzazioni diverse (si può variare il punto $Q \in L$ e/o variare il vettore di direzione in $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\right)$).