Lezione 12 marzo 2025

mercoledì 12 marzo 2025 09:15

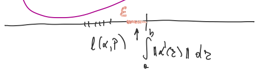
Visto $\underbrace{\int_a^b \|\alpha'(z)\|\,dz}_{} \geq \ell(\alpha,P) \quad \forall P$ partiz. di $[a,b]$

Oggi $= \sup\{\ell(\alpha,P) : P \text{ partizione}\}$

Precisamente: dimostriamo che $\forall\ \varepsilon > 0$

$\exists$ una partizione P t.c.

$$\ell(\alpha,P) > \int_a^b \|\alpha'(z)\|\,dz - \varepsilon$$



Fissiamo $\varepsilon > 0$

L'ipotesi del Teorema c'è $\alpha(t)$ sia $C^1 \Rightarrow \alpha'(t)$ è C^0

(vedremo che C^0 non basta)

$\alpha'(t)$ continua su $[a,b]$ compatto

Teorema di Heine – Cantor

$\Rightarrow$ $\alpha'(t)$ è UNIFORM. CONT. su $[a,b]$

(infatti: ogni componente $x_i'(t)$ è uniform. continua;

$\forall \varepsilon>0,\ \exists\ \delta_i>0$ t.c. $\forall t,s \quad |t-s|<\delta_i$, si ha $|x_i'(t)-x_i'(s)|<\varepsilon$

$\Rightarrow (x_i'(t)-x_i'(s))^2 < \varepsilon^2$

Se $\delta := \min_{i=1,\dots,n}\{\delta_i\}$, si ha $\sum_{i=1}^{n}(x_i'(t)-x_i'(s))^2 < n\cdot\varepsilon^2$

$\Rightarrow \|\alpha'(t)-\alpha'(s)\| < \sqrt{n}\cdot\varepsilon$)

Fissato ε, cons. $\dfrac{\varepsilon}{(b-a)}$.

$\Rightarrow \exists\ \delta>0$ t.c. $\forall\ t,s\in[a,b]$, se

$$|t-s|<\delta \Rightarrow \|\alpha'(t)-\alpha'(s)\| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$$

Scegliamo P partizione t.c.

$$\max_{i=1,\dots,k} |t_i - t_{i-1}| < \delta$$

$$\boxed{\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i}\alpha'(t)\,dt} = \int_{t_{i-1}}^{t_i}(\alpha'(t)-\alpha'(s)+\alpha'(s))\,dt, \quad \forall i,\ \forall s\in[t_{i-1},t_i]$$

$$= \int_{t_{i-1}}^{t_i}\alpha'(s)\,dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i}(\alpha'(t)-\alpha'(s))\,dt = \alpha'(s)\,(t_i-t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i}(\alpha'(t)-\alpha'(s))\,dt$$

$$\|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\| = \underbrace{\left\|\alpha'(s)(t_i-t_{i-1}) + \int (\alpha'(t)-\alpha'(s))\,dt\right\|}$$

Ricordo: $\forall\ u, v$ vettori di $\mathbb{R}^n$

$$\|u+v\| \geq \|u\| - \|v\|$$

Infatti: $\|u\| = \|u-v+v\| \leq \|u+v\| + \|-v\|$

$= \|u+v\| + \|v\|$

$\Rightarrow \|u+v\| \geq \|u\| - \|v\|$

$$\geq \|\alpha'(s)(t_i-t_{i-1})\| - \underbrace{\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\alpha'(t)-\alpha'(s))\,dt\right\|}_{\text{Lemma di ieri}}$$

$$\geq (t_i-t_{i-1})\|\alpha'(s)\| - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\boxed{\|\alpha'(t)-\alpha'(s)\|}}_{<\frac{\varepsilon}{(b-a)}}\,dt$$

per costruzione $t, s \in [t_{i-1}, t_i]$, $(t_i - t_{i-1}) < \delta$

$\Rightarrow |t-s| < \delta \Rightarrow$

$$\|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\| > (t_i-t_{i-1})\|\alpha'(s)\| - (t_i-t_{i-1})\cdot\frac{\varepsilon}{(b-a)}$$

$$\frac{\|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\|}{(t_i-t_{i-1})} > \|\alpha'(s)\| - \frac{\varepsilon}{(b-a)})$$

Integriamo rispetto a s

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\frac{\|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\|}{(t_i-t_{i-1})}}_{\text{non dip. da } s} ds > \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(s)\| ds - \frac{\varepsilon}{(b-a)}(t_i-t_{i-1})$$

$$\cancel{(t_i-t_{i-1})} \cdot \frac{\|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\|}{\cancel{(t_i-t_{i-1})}} > \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(s)\| ds - \frac{\varepsilon}{(b-a)}(t_i-t_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\| > \sum_{i=1}^{k} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(s)\| ds - \frac{\varepsilon}{(b-a)}(t_i-t_{i-1}) \right)$$

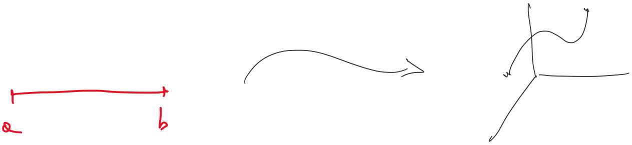
$$\Big(= l(\alpha, P) > \underbrace{\int_a^b \|\alpha'(s)\| ds}_{} - \frac{\varepsilon}{\cancel{(b-a)}} \cancel{(b-a)}$$

▨

OSS. : Se $\|\alpha'(t)\|$ su $[a,b]$ è COSTANTE

ad esempio se $\|\alpha'(t)\| = 1$ $\forall t \in [a,b]$, otteniamo

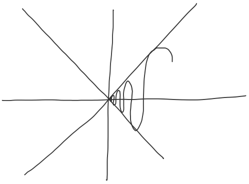
$$\int_a^b \|\alpha'(s)\| ds = \int_a^b 1 \, ds = b - a$$



OSS. : Nel Teorema di rettificabilità l'ipotesi C^1 è essenziale.
Infatti ∃ curve C^0 non rettificabili
(Do Carmo es. 3* 1° Capitolo)

Cons.: $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\alpha(t) = (t, \underbrace{t \sin \pi/t}) \quad \text{se } t \neq 0$$
$$= (0,0) \quad \text{se } t = 0$$



α non è derivabile in 0

e α non è rettificabile

Def.: Se $\|\alpha'(t)\| = 1$ $\forall\, t \in [a,b]$, la curva si dice **PARAMETRIZZATA RISP. LUNGHEZZA D'ARCO.**

Teorema: Ogni curva C^1 e REGOLARE può essere parametrizzata risp. lunghezza d'arco.

Cioè: $\forall\, \beta : \underset{=I}{[a,b]} \to \mathbb{R}^n$ C^1 e regolare

$\exists\, \alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\alpha(J) = \beta(I)$

J intervallo chiuso e $\boxed{\|\alpha'(t)\| = 1}\ \forall t \in J$

Dim. Cons. $s(t) = \displaystyle\int_a^t \overbrace{\|\beta'(\tau)\|}^{>0}\, d\tau$ è C^2

$s(t) : I \longrightarrow J \subseteq \mathbb{R}$, J chiuso e limitato

e oss. che $s(t)$ è MONOTONA STR. CRESC. $(s'(t) = \|\beta'(t)\| > 0)$

$\Longrightarrow$ $s(t)$ è invertibile

$\Longrightarrow$ $\exists\, t(s)$ inversa di s

$$t : J \longrightarrow I, \quad (C^2)$$

e $t'(s) = \dfrac{1}{s'(t)}$

Riparametrizzo β come segue:

$$\beta(t(s)) : J \xrightarrow{t(s)} I \xrightarrow{\beta} \mathbb{R}^n$$

$$\alpha(s) := \beta(t(s))$$

$$\alpha'(s) = \beta'(t(s)) \cdot t'(s) = \underbrace{\beta'(t(s)) \cdot \frac{1}{s'(t(s))}} = \beta'(t(s)) \cdot \frac{1}{\|\beta'(t(s))\|}$$

$$\|\alpha'(s)\| = \frac{\|\beta'(t(s))\|}{\|\beta'(t(s))\|} = 1 \qquad t'(s) = \frac{1}{s'(t(s))}$$

OSS.: In generale, trovare esplic. la funzione $t(s)$ è impossibile.

Esempio: rette affini in $\mathbb{R}^n$

Ripetiamo il procedimento della dim.

$$\beta(t) = \underbrace{P_0 + vt}_{t=a} \qquad P_0 \in \mathbb{R}^n \text{ punto}, \quad v \in \mathbb{R}^n \text{ vettore non nullo}$$

$$\beta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\beta'(t) = v$$

$$\|\beta'(t)\| = \|v\|$$

$$\boxed{s(t)} = \int_a^t \|v\|\, dz = \boxed{\|v\|(t-a)}, \quad s : I \longrightarrow J$$

$$J = [0, \|v\| \cdot (b-a)]$$

$$(t-a) = \frac{s(t)}{\|v\|}$$

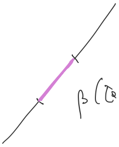
$$t = a + \frac{s(t)}{\|v\|} = t(s)$$

$$\alpha(s) = \beta(t(s)) = P_0 + v\left(a + \frac{s}{\|v\|}\right)$$

$$= \underbrace{P_0 + av}_{\in \mathbb{R}^n} + \underbrace{\frac{v}{\|v\|}}_{\text{versore}} \boxed{s}$$

$= \beta(a)$

è un altro punto della retta



$$\beta([a,b]) = \alpha([0, \|v\| \cdot (b-a)])$$

Domani: esempio CICLOIDE

Prossimo passo: proprietà geometriche della traccia di una curva.

Avremo bisogno **PRODOTTO VETT.** o **PRODOTTO ESTERNO** in $\mathbb{R}^3$

Notazione: $\mathcal{E}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Def.: Dati $u, v \in \mathbb{R}^3$

$$u = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

$$u \wedge v := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_2 \end{pmatrix}$$

$$\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Regola mnemonica : $u \wedge v =$ " $\det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ "

sviluppando con Laplace
risp. alla prima riga

OSS. : ① $\wedge$ è bilineare

② $\wedge$ è ANTISIMM. $u \wedge v = -v \wedge u$

$\forall\, v, u \in \mathbb{R}^3$

(in particolare $v \wedge v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

③ $(u \wedge v) \cdot w \;=\; \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$

PRODOTTO MISTO