# Lezione 11 marzo 2025

martedì 11 marzo 2025 09:05

Visto: def. curva parametrizzata:

sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

- $\alpha$ liscia se è $\mathcal{C}^\infty$
- $\alpha$ regolare se $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in I$

- $\alpha(I)$ TRACCIA : $\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\alpha$ è SEMPLICE se $\alpha$ è iniettiva

Esempi : ② ELICA CIRCOLARE

$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

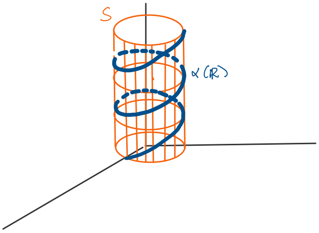
$\alpha(t) = (a \cos t, \ a \sin t, \ b t) \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t = a^2 \Rightarrow$ la traccia

$a$ e $b$ non entrambi nulli $\qquad \alpha(\mathbb{R}) \subseteq S$

con $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2\}$ : i piani orizzontali $z = \text{cost}$ intersecano $S$ sempre lungo il cerchio $x^2 + y^2 = a^2$

CILINDRO CIRCOLARE RETTO



- Se $b = 0 \Rightarrow \alpha(I) \subseteq$ piano $z = 0$

  $(a \cos t, \ a \sin t, \ 0)$

- Se $b \neq 0$, la terza coordinata di $\alpha(t)$ varia in modo iniettivo (poiché $t \rightarrow bt$ è iniettiva)

oss. : $\alpha(t)$ è :
- $\mathcal{C}^\infty$
- Regolare

  $\alpha'(t) = (-a \sin t, \ a \cos t, \ b) \neq (0, 0, 0)$

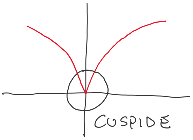
- Semplice se $b \neq 0$

## ③ CUBICA CUSPIDATA

$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ , $\alpha(t) = (t^3, t^2)$

$\alpha(\mathbb{R})$ $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \iff \boxed{x^2 - y^3 = 0}$

Esercizio: se $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ verifica $x^2 - y^3 = 0$, allora $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $x = t_0^3$ e $y = t_0^2$.



$y = x^{2/3}$
$= (\sqrt[3]{x})^2$

- $\alpha$ è $\mathcal{C}^\infty$ sì
- $\alpha$ è regolare? $\alpha'(t) = (3t^2, 2t) = (0,0) \iff t = 0$
  $\alpha(t) = (t^3, t^2)$

  Non è regolare
- $\alpha$ è semplice? $\alpha(t) = (t^3, t^2)$

  sì, perché $t \to t^3$ è iniettiva.

## ④ CUBICA NODATA

$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4) = (t(t^2-4), t^2 - 4)$

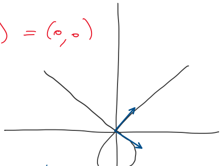
$\alpha'(t) = (3t^2 - 4, 2t) = (0,0)$ mai

$\iff \begin{cases} 3t^2 - 4 = 0 \\ 2t = 0 \end{cases} \iff t = 0$

$\Rightarrow$ $\alpha$ è REGOLARE e $\mathcal{C}^\infty$

- $\alpha$ è semplice? NO, ad esempio

  $\alpha(2) = (2 \cdot 0, 0) = (0,0)$
  $\alpha(-2) = (0,0)$



vettore velocità (tg): in $t_0$

è : $\alpha'(t_0) = \begin{pmatrix} 3t_0^2 - 4 \\ 2t_0 \end{pmatrix}$

$\alpha'(-2) = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\alpha'(2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

⑤ I grafici di funzioni sono tracce di curve parametrizzate:

$f : I \to \mathbb{R}$

cons. il grafico $\Gamma_f \subseteq I \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\Gamma_f = \{ (t, f(t)) \}$ è la traccia della curva parametrizzata

$\alpha(t) = (t, f(t))$ $\quad$ $\alpha$ è $C^\infty \Leftrightarrow f$ è $C^\infty$

$\alpha$ regolare: $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha$ semplice: sì ($t \to t$ è iniettiva)

Analog.: se $f : I \to \mathbb{R}^{n-1}$

$f(t) = (f_1(t), \dots, f_{n-1}(t))$

il suo grafico $\Gamma_f \subseteq I \times \mathbb{R}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$

e posso cons.: $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$

$\alpha(t) = (t, f_1(t), \dots, f_{n-1}(t))$

$\alpha(I) = \Gamma_f$

⑥ Cons. $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\quad$ $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ $\quad$ $\beta(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$

Sono 2 curve param. diverse; hanno stessa traccia $\alpha(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{R}) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$

però hanno velocità diverse:

$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ , $\beta'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}$

$t = \pi$ , $\alpha(\pi) = (-1, 0)$ , $\beta(\pi) = (1, 0)$

Def.: $\|\alpha'(t)\|$ si dice VELOCITÀ SCALARE
$\alpha'(t) \in \mathbb{R}^n$

Def.: Se $\alpha'(t_0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, definiamo la RETTA TANGENTE AFFINE in $P_0 = \alpha(t_0) \in \mathbb{R}^n$:

$t_{P_0}$ : $\boxed{P_0 + \alpha'(t_0) \cdot t}$ SCRITTURA VETTORIALE

questa scrittura si traduce nelle eq. parametriche
$$\begin{cases} y_1 = x_1(t_0) + x_1'(t_0) \cdot t \\ \vdots \\ y_n = x_n(t_0) + x_n'(t_0) \cdot t \end{cases}$$

dove $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

Def.: $s(t) := \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(\tau)\| \, d\tau$ LUNGHEZZA D'ARCO DI $\alpha$ MISURATA DA $t_0$

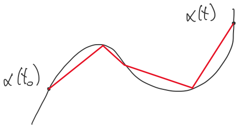
$t_0 \in I$

OSS.: Se $\alpha$ è regolare $\Rightarrow$ $s(t)$ è $C^\infty$

~. ~. ~

RELAZIONE TRA LUNGH. D'ARCO e MISURA

Idea: cons. una POLIGONALE INSCRITTA a $\alpha(I)$ e valutiamo la sua lunghezza.



Sia $I = [a, b]$

Cons. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, e sia

$$P = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k = b\}$$

una PARTIZIONE di $I$

$$t_0 < t_1 < \dots < t_k$$

e definiamo $\ell(\alpha, P) := \sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$

LUNGH. DELLA POLIGONALE INSCRITTA ad $\alpha$

**Def**: Cons. $\sup \{ \ell(\alpha, P) \mid P \text{ partizione di } I \}$

Se sup è $< +\infty$, $\alpha$ si dice **RETTIFICABILE**

**Teorema**: Se $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è di classe $C^1$

$\Longrightarrow$ $\alpha$ è RETTIFICABILE e

$$\sup \{ \ell(\alpha, P) \mid P \text{ partiz.} \} = \int_a^b \|\alpha'(z)\| \, dz$$

**Dim.**: Dimostriamo dapprima che $\ell(\alpha, P) \le \int_a^b \|\alpha'(z)\| \, dz$

$\forall$ $P$ partizione

Siccome $\|\alpha'(z)\|$ è continua su $[a,b]$ compatto essa è limitata per Teo. Weierstrass $\Rightarrow \int_a^b \|\alpha'(z)\| dz < +\infty$

$\Rightarrow$ avremo che $\alpha$ è rettificabile.

Avremo bisogno del seguente:

**LEMMA**: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ continua, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$

Allora

$$\left\| \int_a^b f(z) \, dz \right\| \le \int_a^b \|f(z)\| \, dz$$

dove $\int_a^b f(z) dz = \left( \int_a^b f_1(z) dz, \int_a^b f_2(z) dz, \dots, \int_a^b f_m(z) \, dz \right)$

Dim. Poniamo

$$v := \frac{\int_a^b f(z)\,dz}{\left\|\int_a^b f(z)\,dz\right\|} \Longrightarrow \|v\| = 1$$

$$\boxed{\left\|\int_a^b f(z)\,dz\right\|} = \left(\int_a^b f(z)\,dz\right) \overset{\text{PROD. SCAL. STANDARD in } \mathbb{R}^m}{\cdot} v = \frac{\left\|\int_a^b f(z)\,dz\right\|^2}{\left\|\int_a^b f(z)\,dz\right\|}$$

$\int_a^b$ è LINEARE

$$= \int_a^b \underline{(f(z)\cdot v)}\,dz \le \int_a^b \underline{\|f(z)\|\cdot \overset{=1}{\|v\|}}\,dz = \boxed{\int_a^b \|f(z)\|\,dz}$$

DISEG. DI CAUCHY SCHWARZ

e MONOTONIA DI $\int_a^b$

## Dim. del Teorema

Fissiamo una partizione $P = \{t_0, \dots, t_k\}$

$\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

$$\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| = \sqrt{(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}))^2 + \dots + (x_n(t_i) - x_n(t_{i-1}))^2}$$

Teo. Fond. Calc. Int.

$$= \sqrt{\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} x_1'(z)\,dz\right)^2 + \dots + \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} x_n'(z)\,dz\right)^2}$$

$$= \left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha'(z)\,dz\right\| \underset{\text{Lemma}}{\le} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(z)\|\,dz$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| \le \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(z)\|\,dz = \int_a^b \|\alpha'(z)\|\,dz$$

$$= \ell(\alpha, P)$$

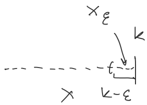
per additività di $\int$ su sottointervalli

∎

Dovrei : $\int_a^b \|\alpha'(z)\|\,dz = \sup\{\ell(\alpha, P)\}$

Richiamo: $k = \sup X \Longleftrightarrow$ • $k \ge x \quad \forall x \in X$

• $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon \in X$

t.c. $x_\varepsilon > k - \varepsilon$