Lezione 18 marzo 2025

martedì 18 marzo 2025 09:02

IDEA: vogliamo dare la nozione di CURVATURA ("misura di quanto la curva è ≠ retta")

e di TORSIONE ("misura di quanto la curva in $\mathbb{R}^3$ è ≠ curva piana")

Avremo bisogno del prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$:

Abbiamo visto la definizione e abbiamo visto che

$$\forall\, u, v, w \in \mathbb{R}^3 \qquad (u \wedge v) \cdot w = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \qquad \circledast$$

PRODOTTO MISTO

PROPR. ALG. del PRODOTTO VETTORIALE (detto anche PRODOTTO ESTERNO)

① $\wedge$ è bilineare: $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

② $\wedge$ è ANTISIMM: $u \wedge v = - v \wedge u$

③ $(u \wedge v) \cdot u \underset{\circledast}{=} 0 = (u \wedge v) \cdot v$

$\Longrightarrow \quad u \wedge v \perp u \quad$ e $\quad u \wedge v \perp v$

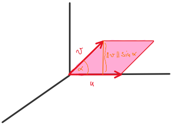
④ $u \wedge v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$ u e v sono LIN. DIPENDENTI

infatti: i minori 2×2 di $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ sono tutti nulli $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \leq 1$

(dimostrare per esercizio)

⑤ Se u e v sono linearmente indipendenti, si ha che $\| u \wedge v \| = A$ area del parallelogramma

individuato da u e v:



Dim. $A = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin\alpha$

$$A^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2\alpha$$
$$= \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2\alpha)$$

per def. di angolo convesso α si ha

$$\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}$$

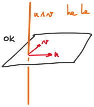
Confrontare A^2 e $\|u \wedge v\|^2$ (esercizio)

~ . ~ . ~

Prop. geo. di $u \wedge v$: direzione OK

norma OK

verso?



$u \wedge v$ ha la direzione determinata delle rette ortogonale al piano Span(u, v)

Def.: Date due basi ordinate di $\mathbb{R}^n$ $\{f_1, .., f_n\}$ e $\{g_1, .., g_n\}$, diciamo che hanno la STESSA ORIENTAZIONE se la matrice di cambio di base ha determinante $\det > 0$.

Oss. "Avere la stessa orientazione" è una relazione di equivalenza nell'insieme delle basi ORDINATE di $\mathbb{R}^n$.

Infatti: • $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}$ perché $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = I_n$ e $\det I_n = 1 > 0$ (proprietà riflessiva)

- se $\mathcal{B} \sim \mathcal{G}$, allora $\det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{G}}(Id_{\mathbb{R}^n}) > 0$;

ricordiamo che $M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^n}) = (M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{G}}(Id_{\mathbb{R}^n}))^{-1}$, e quindi

$$\det M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^n}) = \frac{1}{\det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{G}}(Id)} > 0 \Longrightarrow \mathcal{G} \sim \mathcal{B}$$

(PROPRIETÀ SIMMETRICA)

- se $\mathcal{B} \sim \mathcal{G}$ e $\mathcal{G} \sim \mathcal{H}$, si ha

$\det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{G}}(Id_{\mathbb{R}^n}) > 0$, $\det M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}(Id_{\mathbb{R}^n}) > 0$

quindi

$$\det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{H}}(Id_{\mathbb{R}^n}) = \det\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{G}}(Id) \cdot M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}(Id)\right) =$$

$$\underset{\text{Teo. BINET}}{=} \det \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{G}}(Id)}_{>0} \cdot \det \underbrace{M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}(Id)}_{>0} > 0$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B} \sim \mathcal{H}$ (PROPRIETÀ TRANSITIVA)

oss. È importante che le basi siano ORDINATE.

$\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$, $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_n\}$

$\det M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}}(Id_{\mathbb{R}^n}) > 0$: ricordo che le colonne di $M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}}(Id)$ sono formate dalle coordinate dei vettori di $\mathcal{F}$ nella base $\mathcal{G}$

$$Id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{R}^n_{\mathcal{G}}$$

se cons. $\mathcal{F}' = \{f_2, f_1, f_3, \dots, f_n\}$

$\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_n\}$

$\det M^{\mathcal{F}'}_{\mathcal{G}}(Id_{\mathbb{R}^n}) < 0$, perché $M^{\mathcal{F}'}_{\mathcal{G}}(Id)$ è ottenuta scambiando le prime 2 colonne di $M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}}(Id)$ e la funzione det è ANTISIMMETRICA sulle colonne.

$\Longrightarrow$ abbiamo 2 classi di equivalenza

Def.: La scelta di una classe di equiv. si chiama ORIENTAZIONE di $\mathbb{R}^n$.

oss. L'insieme delle basi ordinate di $\mathbb{R}^n$ si può identificare con l'insieme delle matrici invertibili $GL(n, \mathbb{R})$

nel modo seguente:

$$\{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ base ordinata di } \mathbb{R}^n\} \longrightarrow GL(n,\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : \det M \neq 0\}$$

$$\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\} \longrightarrow M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^n}) \quad \text{è una biiezione}$$

dove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica

Allora le due classi di equivalenza corrispondono ai 2 sottoinsiemi $GL^+(n,\mathbb{R}) = \{M : \det M > 0\}$ e $GL^-(n,\mathbb{R}) = \{M : \det M < 0\}$

Esercizio: $GL(n,\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{R})$ è APERTO nella topologia euclidea;

non è né connesso né compatto.

Ha 2 componenti connesse, precisamente $GL^+(n,\mathbb{R})$ e $GL^-(n,\mathbb{R})$.

OSS: u, v siano LIN. INDIP. e

cons. $u \wedge v$ è $\perp u$ & $\perp v$

$\Rightarrow \{u, v, u\wedge v\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$

PROP. $\mathcal{B} = \{u, v, u\wedge v\}$ ha la stessa orientazione della base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Dim.: La matrice di cambi di base

$$M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & (u\wedge v)_1 \\ u_2 & v_2 & (u\wedge v)_2 \\ u_3 & v_3 & (u\wedge v)_3 \end{pmatrix}$$

$$\det M = (u\wedge v)_1 \cdot (u_2 v_3 - u_3 v_2) - (u\wedge v)_2 (u_1 v_3 - u_3 v_1) + $$

$$+ (u\wedge v)_3 (u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$= (u\wedge v)_1 \cdot (u\wedge v)_1 + (u\wedge v)_2 \cdot (u\wedge v)_2 + (u\wedge v)_3 \cdot (u\wedge v)_3$$

$$= \|u\wedge v\|^2 > 0; \quad \text{oppure}$$

$$= \det {}^t M = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ (u\wedge v)_1 & (u\wedge v)_2 & (u\wedge v)_3 \end{pmatrix}$$

$$= (u\wedge v) \cdot (u\wedge v) > 0$$

* * *

Teoria LOCALE delle curve

Cons. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, I int. aperto

C^∞ e regolare (basta C^1)

$\Rightarrow$ α si può paramet. per lunghezza d'arco

Quindi supp. che sia così:

$$\|\alpha'(s)\| = 1 \qquad \forall s \in I$$

OSS.: $\|\alpha'(s)\|^2 = 1$

$$= \boxed{\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 1} \quad \forall s \in I$$

$$0 = \frac{d}{ds}\left(\alpha'(s) \cdot \alpha'(s)\right) = \alpha''(s) \cdot \alpha'(s) + \alpha'(s) \cdot \alpha''(s)$$

prodotto scalare

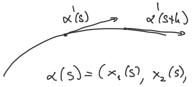
$$= \cancel{2}\, \alpha'(s) \cdot \alpha''(s) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha'(s) \cdot \alpha''(s) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha''(s) \perp \alpha'(s)$$

(eventualmente $\alpha''(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

SIGNIFICATO GEOMETRICO DI $\alpha''(s)$:



$$\alpha(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$$

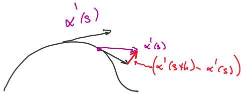
$$\alpha''(s) = \begin{pmatrix} x_1''(s) \\ x_2''(s) \\ x_3''(s) \end{pmatrix}$$

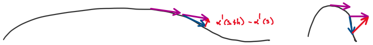
$$\text{"="} \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{\alpha'(s+h) - \alpha'(s)}}{h}$$

la norma di questo vettore ci dice di quanto è cambiata la direzione del vettore tangente

ovvero

$$= \begin{pmatrix} \lim_{h \to 0} \frac{x_1'(s+h) - x_1'(s)}{h} \\ \lim_{h \to 0} \frac{x_2'(s+h) - x_2'(s)}{h} \\ \lim_{h \to 0} \frac{x_3'(s+h) - x_3'(s)}{h} \end{pmatrix}$$





Def. α par. per lunghezza d'arco

$k(s) := \|\alpha''(s)\|$ CURVATURA di α in s

$k(s) \geq 0$

Esempio: Retta:

$\alpha(s) = P_0 + v \cdot s$ $\qquad P_0 \in \mathbb{R}^n$

$\|v\| = 1$

$\alpha'(s) = v$ costante

$\alpha''(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad k(s) \equiv 0$

Lemma: Se $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ per lungh. d'arco

e $k(s) \equiv 0 \quad \forall\, s \in I$

$\Rightarrow \quad \alpha(I) \subseteq$ retta

Dim. $k(s) = \|\alpha''(s)\| = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha''(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall\, s \in I$; fisso $s_0 \in I$

$$\Rightarrow \quad \alpha'(s) - \alpha'(s_0) = \int_{s_0}^{s} \alpha''(z)\, dz = 0$$

$\Rightarrow \quad \alpha'(s) = \alpha'(s_0)$ vett. f. è costante

$=: v$

$$\Longrightarrow \quad \alpha(s) - \alpha(s_0) = \int_{s_0}^{s} \alpha'(z)\,dz = \int_{s_0}^{s} v\,dz$$

$$= v\,(s - s_0)$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha(s) = \underbrace{\alpha(s_0) - s_0 v}_{\in \mathbb{R}^3} + v \cdot s$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha(I) \subseteq \text{retta}$$

Def. Un punto $\alpha(s_0) \in \mathbb{R}^3$ in cui $k(s_0) = 0$ si dice **PUNTO DI FLESSO** o **SINGOLARITÀ del 1° ORDINE**. (cioè $\alpha''(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

Def.: Se α è regolare e non ha punti di flesso, si dice **BIREGOLARE**.

Esempio di flesso: $f(x) = x^3$ ha flesso in $x=0$.

$\alpha(t) = (t, t^3)$

$\alpha'(t) = (1, 3t^2)$

$\alpha''(t) = (0, 6t) \qquad t=0 \qquad \alpha''(0) = (0,0)$

Esercizio: scrivere per. per lunghezza d'arco.

Ci concentriamo su $\mathbb{R}^3$:

TRIEDRO DI FRENET

α par. lungh. d'arco (PLA)

α sia BIREGOLARE

Def.: $T(s) := \alpha'(s)$ VERSORE TG

$$\boxed{n(s)} := \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{\alpha''(s)}{k(s)} = \boxed{\frac{T'(s)}{k(s)}}$$

VERSORE NORMALE di α in s

OSS: $T'(s) = k(s) \cdot n(s)$

OSS: Siccome $\|T(s)\| = 1 \implies$

$$T'(s) \perp T(s) \quad \forall s \quad \text{(esercizi)}$$

quindi $n(s) \perp T(s)$

Def.: Span $(T(s), n(s))$ = PIANO OSCULATORE ad α in s
è un piano vettoriale

Def.: $b(s) := T(s) \wedge n(s)$
VETTORE BINORMALE

risulta un versore

Def.: $\{T(s), n(s), b(s)\}$ base ORTON.

TRIEDRO DI FRENET in $\alpha(s)$

CURIOSITÀ: il triedro di Frenet nel cinema:

Film IL DIRITTO DI CONTARE (HIDDEN FIGURES)
2016, regia T. Melfi