Università di Trieste
Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di
Progettazione e riabilitazione sismica delle Strutture

Corso di
Modelli e metodi per la progettazione strutturale avanzata
Modulo 2: Costruzioni in zona sismica

ANALISI DINAMICA LINEARE

Prof. Ing. Natalino Gattesco

ANALISI LINEARE DINAMICA

L'analisi lineare dinamica consiste:

- nella determinazione dei modi di vibrare della costruzione (analisi modale);
- nel calcolo degli effetti dell'azione sismica, rappresentata dallo spettro di risposta di progetto, per ciascuno dei modi di vibrare individuati;
- nella combinazione di questi effetti.

Devono essere considerati tutti i modi con massa partecipante significativa. È opportuno a tal riguardo considerare tutti i modi con massa partecipante superiore al 5% e un numero di modi la cui massa partecipante totale sia superiore allo 85%.

Si deve tenere conto dell'eccentricità accidentale del centro di massa.

Per gli edifici, gli effetti di tale eccentricità possono essere determinati mediante l'applicazione di carichi statici costituiti da momenti torcenti di valore pari alla risultante orizzontale della forza agente al piano, determinata con l'analisi statica, moltiplicata per l'eccentricità accidentale del baricentro delle masse rispetto alla sua posizione di calcolo (5%).

ANALISI LINEARE DINAMICA

Quando la struttura non soddisfa i requisiti di regolarità e semplicità strutturale occorre effettuare un'analisi modale tenendo in conto tutti i modi di vibrare che possono dare un contributo significativo alla risposta della struttura, considerando la struttura come SPAZIALE.

L'analisi deve essere condotta ipotizzando che il sisma possa agire secondo una delle due direzioni principali della struttura (si tenga presente che il 1° modo di vibrare può non essere più molto significativo in caso di irregolarità strutturale).

Si ipotizzi di analizzare un sistema ad n gradi di libertà, privo di smorzamento in oscillazione libera, retto dalle equazioni:

$$\boxed{[M]\{\ddot{u}\}+[k]\{u\}=0}$$

Si faccia l'ipotesi che
$$\begin{cases} \{u(t)\}=\{\phi\}\sin\omega t \\ \{\ddot{u}(t)\}=-\omega^2\{\phi\}\sin\omega t \end{cases}$$

$\{\phi\}$ autovettore, rappresenta la funzione spostamento del sistema durante le oscillazioni

$\sin\omega t$ rappresenta il moto sincronizzato delle masse

Si ricerca se esiste una soluzione a questo tipo di problema dinamico

ANALISI LINEARE DINAMICA

Posto $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$ si può scrivere l'equazione del moto nella forma:

$$\boxed{([M]-\lambda[k])\{\phi\}=0}$$ Sistema lineare omogeneo

Affinchè $\exists\{\phi\}\neq 0$ (l'equazione sia valida $\forall\{\phi\}$) $\Rightarrow \boxed{det\|[M]-\lambda[k]\|=0}$

Questa equazione permette di ricavare λ e quindi ω

$\Rightarrow$ Se *n* è l'ordine delle matrici $[M]$ *e* $[k]$ si ottiene un'equazione secolare di Laplace in λ di grado *n* che fornisce gli *n* autovalori λ_i

$$\Rightarrow \omega_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\pi}{T_i}$$ i-esima pulsazione propria

Conoscendo $\boxed{\omega_i}$ dal sistema omogeneo posso infatti determinare i valori relativi degli spostamenti $\boxed{\{\phi_i\}}$ del sistema dovuti al modo in oggetto e che rappresentano la sua forma di vibrazione in corrispondenza di quel modo.

Questi vettori vengono detti «vettori forma modale» o autovettori.

MODI DI VIBRARE

- Sono in *n* pari al numero di gradi di libertà della struttura
- Ogni modo di vibrare è associato ad una pulsazione (o periodo)

$$\omega_1 \rightarrow \{u^{(1)}\}, \quad \omega_2 \rightarrow \{u^{(2)}\}, \quad \omega_3 \rightarrow \{u^{(3)}\}, \quad ecc.$$

Pulsazione naturale o fondamentale

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq ecc.$$

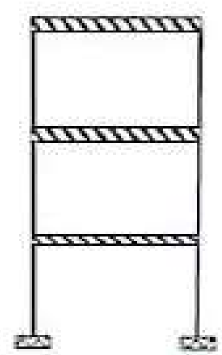
$$T_1 \geq T_2 \geq T_3 \geq ecc.$$

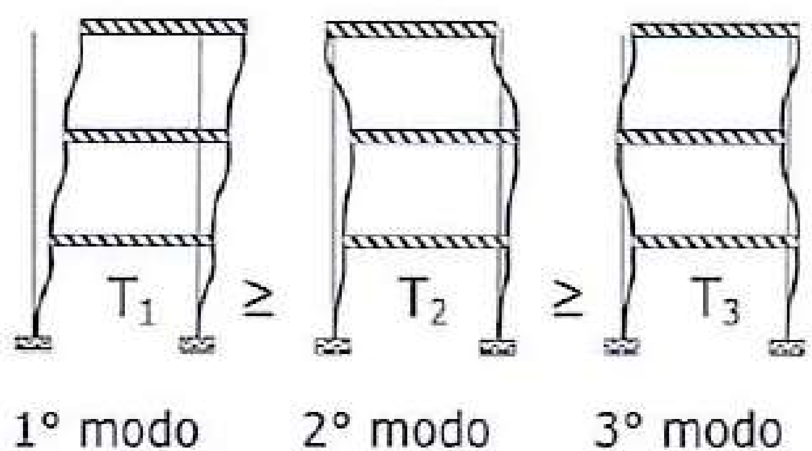
Periodo proprio o fondamentale

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&[M]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = 0\\ &\{u\} = \{u_i\} sin\omega_i t\end{aligned}}$$

Telaio di 3 piani,
3 modi di vibrare





PROPRIETA' FONDAMENTALE DEI MODI

Proprietà fondamentale dei modi di vibrare è l'ortogonalità degli autovettori rispetto alle matrici **[M]** e **[k]**

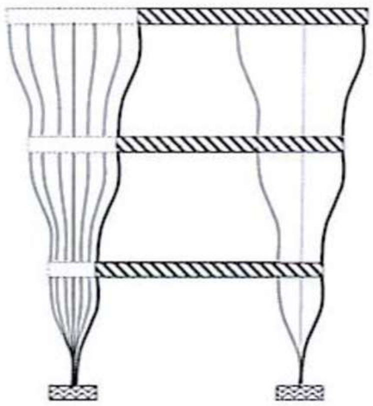
$$\{\phi_i\}^T[k]\{\phi_j\} = \begin{cases} 0 & se\ i \neq j \\ \neq 0 & se\ i = j \end{cases}$$

$$\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_j\} = \begin{cases} 0 & se\ i \neq j \\ \neq 0 & se\ i = j \end{cases}$$

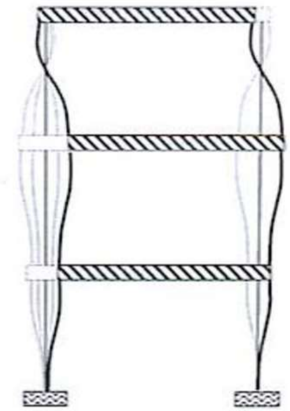
$\{\phi_i\} \perp \{\phi_j\}$ rispetto alle matrici **[M]** e **[k]**

Una vibrazione generica di una struttura è una combinazione dei modi di vibrare della struttura (dipende dalle condizioni iniziali)

Se le condizioni iniziali corrispondono ad un modo di vibrare allora la struttura vibrerà liberamente secondo il modo stesso.



1° modo



2° modo

SISTEMA FORZATO

Si consideri ora lo stesso sistema soggetto ad un sistema di forze $\{F\}$ che nel caso di forze sismiche si possono esprimere nella forma: $\{F\}=-\{m\}a_g$ con $\{m\}$ vettore delle masse in vibrazione [M][I]:

$$[M]\{\ddot{u}\}+[k]\{u\}=-\{m\}a_g(t)$$

dove, il secondo membro rappresenta le forze legate allo spostamento del terreno (termine di trascinamento).

Come appena visto, un sistema ad *n* gradi di libertà possiede n autovettori linearmente indipendenti. Un qualunque vettore di spostamenti $\{u\}$ del sistema si può pertanto esprimere come somma degli autovettori $\{\phi_n\}$ moltiplicati ciascuno per un'ampiezza $\{p_n\}$.

Indicata con [X] la matrice che ha come colonne i vettori rappresentativi dei modi di vibrare (cioè gli autovettori) si può ipotizzare la seguente trasformazione di coordinate:

$$\{u\}=[X]\{p\}$$

$\{p\}$ è detto vettore delle coordinate principali o modali

Se si premoltiplica l'equazione del moto per $[X]^T$ e si sostituiscono le coordinate

SISTEMA FORZATO

$$\boxed{[L]\{\ddot{p}\}+[N]\{p\}=-[X]^T\{m\}a_g}$$

con $[L]=[X]^T[M][X]$, $[N]=[X]^T[k][X]$ con [L] ed [N] matrici diagonali

Premoltiplicando per $[L]^{-1}$ si ha:

$$\boxed{\{\ddot{p}\}+[L]^{-1}[N]\{p\}=-[L]^{-1}[X]^T\{m\}a_g}$$

Posto che $[L]^{-1}[N]=\begin{pmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & .. & & \\ & & .. & \\ & & & \omega_n^2 \end{pmatrix}$ e indicato con $[\gamma]=[L]^{-1}[X]^T\{m\}$

Ricordando che $l_i=\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_i\}$, introdotto il coefficiente

$$\boxed{\gamma_i=\frac{\sum_{j=1}^{n} m_j\,\phi_j^{(i)}}{\sum_{j=1}^{n} m_j\,\phi_j^{(i)2}}}$$

Coefficiente di partecipazione modale relativo all'i-esimo modo di vibrare

SISTEMA FORZATO

Il coefficiente di partecipazione modale rappresenta il contributo relativo all'i-esima forma modale alla vibrazione globale. Normalmente si ha:

$$\boxed{\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3}$$

Essendo [M] una matrice diagonale, si può scrivere per esteso il sistema

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 = -\gamma_1 a_g(t) \\ \quad .... \\ \quad .... \\ \ddot{p}_n + \omega_n^2 p_n = -\gamma_n a_g(t) \end{cases}}$$

Nel caso di sistema smorzato, nell'equazione va aggiunto un termine $\boxed{[D]\{\dot{u}\}}$ per il quale si avrà un disaccoppiamento nel caso si possa porre: $[D] = d[M] + \mu[k]$

Ogni equazione risulta disaccoppiata e del tipo:

$$\boxed{\ddot{p}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{p}_i + \omega_i^2 p_i = -\gamma_i a_g(t)}$$

Ricordato che lo spettro in termini di spostamento $S_d = \dfrac{S_a}{\omega^2}$, si può porre $\boxed{p_{i,max} = \dfrac{S_a}{\omega_i^2}\gamma_i}$

SPOSTAMENTI E FORZE MODALI

$$\begin{cases} \{u\}^i = \{\phi_i\}\dfrac{S_a(\omega_i,\nu)}{\omega_i^2}\gamma_i \\ \{F\}^i = [k]\{u\}^i = \omega_i^2[M]\{u\}^i = [M]\{\phi_i\}S_a\gamma_i \end{cases}$$

poichè $\boxed{\{u\}^i = \{\phi_i\}p_i}$

si vede come attraverso l'analisi modale sia immediato conoscere la distribuzione degli spostamenti massimi $\{u\}^i$ associati al modo i-esimo e quindi anche degli effetti (momenti, sforzo normale, taglio) ad esso associati. Risultano inoltre note le forze equivalenti al modo in esame:

$$\boxed{F_j^i = m_j\phi_j^i S_a\gamma_i}$$

Si vede quindi come nel caso si consideri un solo modo di vibrare si abbia:

(a) $$\boxed{F_j = m_j\phi_j^1 \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\phi_i^{(1)}}{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\phi_i^{(1)2}} S_a}$$

Relazione leggermente diversa da quella proposta nell'analisi semplificata (statica lineare)

$$\boxed{F_j = m_j\phi_j^1 \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\phi_i^{(1)}} S_a}$$

Più cautelativa

MASSA PARTECIPANTE

Secondo l'EC8 e la NTC, bisogna utilizzare nell'analisi modale tutti i modi di vibrare che diano un contributo sulle forze di piano > del 5% delle forze complessive da mettere in gioco.

Questo concetto viene espresso in termini di massa modale effettiva o massa partecipante m_k del k-esimo modo, tale che:

(b) $\boxed{F_{bk} = m_k \, S_a(T_k)}$

con F_{bk} taglio alla base associato al modo k

$$NTC \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{nk} m_k \geq 85\% \sum_{i=1}^{n} m_i & \text{masse effettive} \\ m_k > 5\% \sum_{i=1}^{n} m_i & \text{modo non trascurato} \end{cases}$$

Dalle ultime due relazioni (a) e (b) si ottiene:

$$m_k \cancel{S_a} = \sum_{i=1}^{n} m_j \phi_j^{(k)} \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, \phi_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} m_i \, \phi_i^{(k)2}} \cancel{S_a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_k = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \, \phi_i^{(k)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i \, \phi_i^{(k)2}}}$$

STRUTTURA REALE CON MODI SUPERIORI

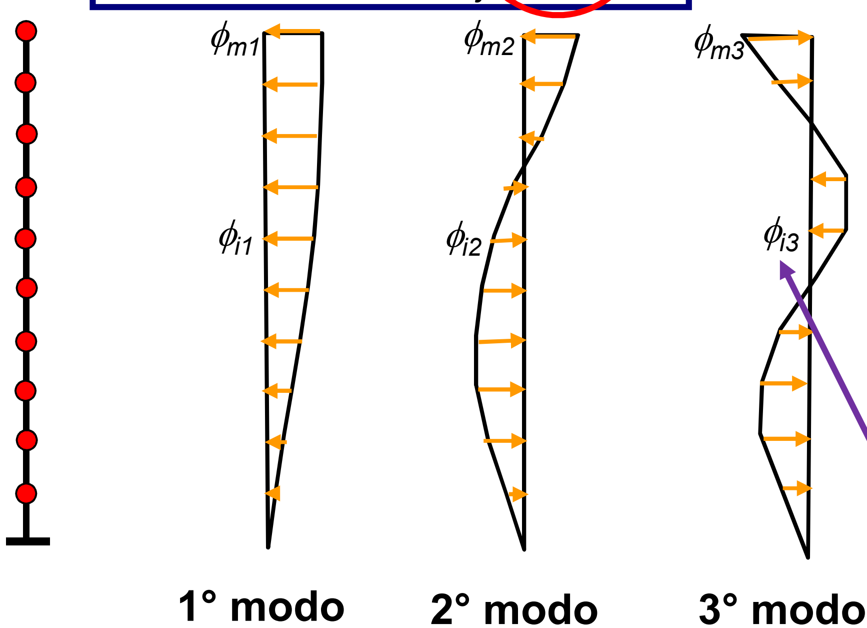
La risposta globale si ottiene sommando, con opportuni metodi, le risposte relative ai singoli modi

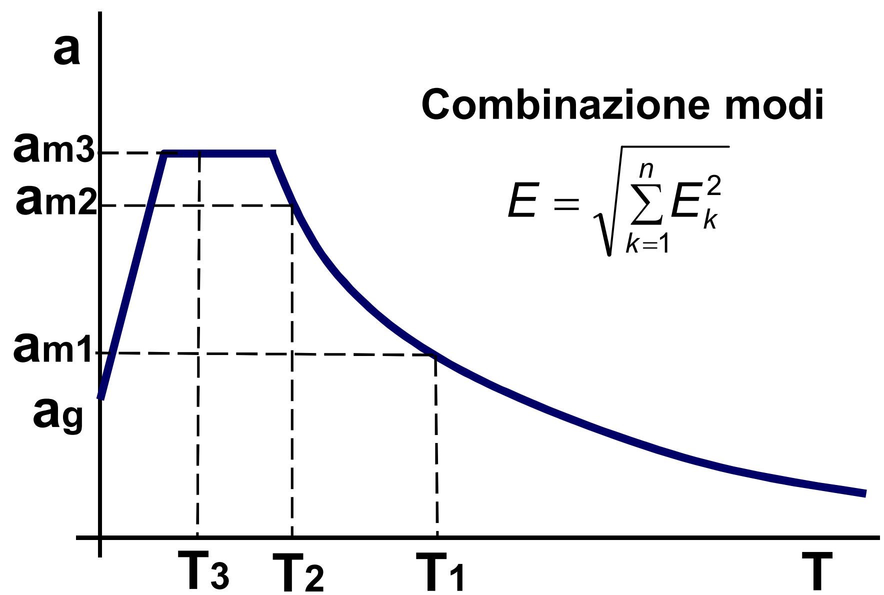
Siccome di norma la maggior parte della massa viene eccitata dai primi modi è sufficiente tener conto del solo contributo di questi.

$$F_{ik} = S_a(T_k)\,\phi_{ik}\,\frac{W_i}{g}\,\frac{\sum_{j=1}^{n}\phi_{jk}W_j}{\sum_{j=1}^{n}\phi_{jk}^2 W_j}$$

Fattore di partecipazione modale

In genere con i primi tre modi si eccita più dell'85% della massa





Spostamento di piano normalizzato

COMBINAZIONI MODALI

Poiché le max risposte modali non sono concomitanti, normalmente si usa la regola di combinazione quadratica SRSS (Square Root Sum of Squares) (EC8)

$$\boxed{E = E_x = \sqrt{\sum E_{x,i}^2}}$$

con E_x effetto complessivo dovuto all'azione sismica agente secondo una generica direzione x (forza, spostamento, caratteristica della sollecitazione, etc.)

con $E_{x,i}$ valore dell'effetto sismico dovuto all'i-esimo modo di vibrare

COMBINAZIONI MODALI

Quando i modi di vibrare hanno frequenze ravvicinate è necessario ricorrere ad una procedura di combinazione modale diversa.

Nella NTC è richiesta una legge di combinazione quadratica completa (CQC Complete Quadratic Combination), retta dalla relazione:

$$\boxed{E = \sqrt{\sum_j \sum_i \rho_{ij} E_i E_j}}$$

con E_i valore dell'effetto sismico dovuto all'i-esimo modo di vibrare

con ρ_{ij} coefficiente di correlazione tra il modo i e il modo j, calcolato con formule tipo:

$$\boxed{\rho_{ij} = \frac{8\xi^2 \beta_{ij}^{1.5}}{\left(1+\beta_{ij}\right)\left[\left(1-\beta_{ij}\right)^2 + 4\xi^2 \beta_{ij}\right]}}$$

ξ Smorzamento viscoso uguale per i modi i e j

β_{ij} rapporto tra l'inverso dei periodi di ciascuna coppia i-j di modi ($\beta_{ij} = T_j/T_i$)

COMBINAZIONI MODALI

Se si ipotizza smorzamento costante al variare dei modi ed assenza di correlazione tra gli stessi: β_{ij}=0 per i $\neq$j e β_{ij} =1 per i=j, si ricade nella formula quadratica semplificata SRSS.

La matrice dei coefficienti di correlazione è simmetrica e definita positiva. Nel metodo i valori dei massimi modali vanno introdotti con il proprio segno.

Se lo smorzamento viscoso dei modi i e j sono diversi, il coefficiente di correlazione ρ_{ij} si ricava con la relazione

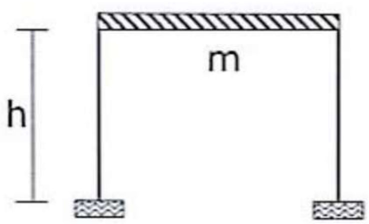
$$\boxed{\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{\xi_i \cdot \xi_i}\left(\beta_{ij}\,\xi_i + \xi_j\right)\beta_{ij}^{1.5}}{\left(1+\beta_{ij}^2\right)+4\,\xi_i\,\xi_j\beta_{ij}\left[\left(1+\beta_{ij}^2\right)^2+4\left(\xi_i^2+\xi_j^2\right)\beta_{ij}^2\right]}}$$

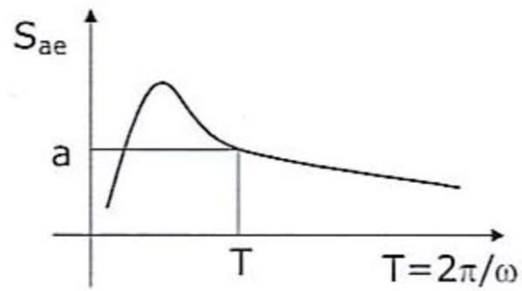
$\xi_{i,j}$ smorzamento viscoso dei modi i e j

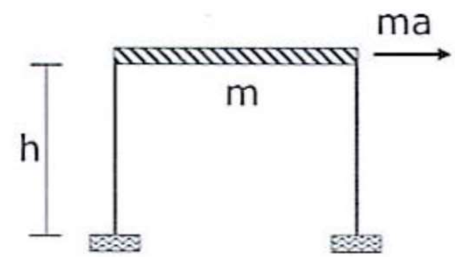
β_{ij} rapporto tra l'inverso dei periodi di ciascuna coppia i-j di modi (β_{ij} = T_j/T_i)

ESEMPIO: ANALISI STATICA

(1 grado di libertà)







Struttura (1 gdl):
noti ω (o T) e ξ

Calcolo dell'accel. a
mediante lo spettro
medio

Calcolo delle sollecit.
indotte dal sisma

DIMENSIONAMENTO
DI MASSIMA

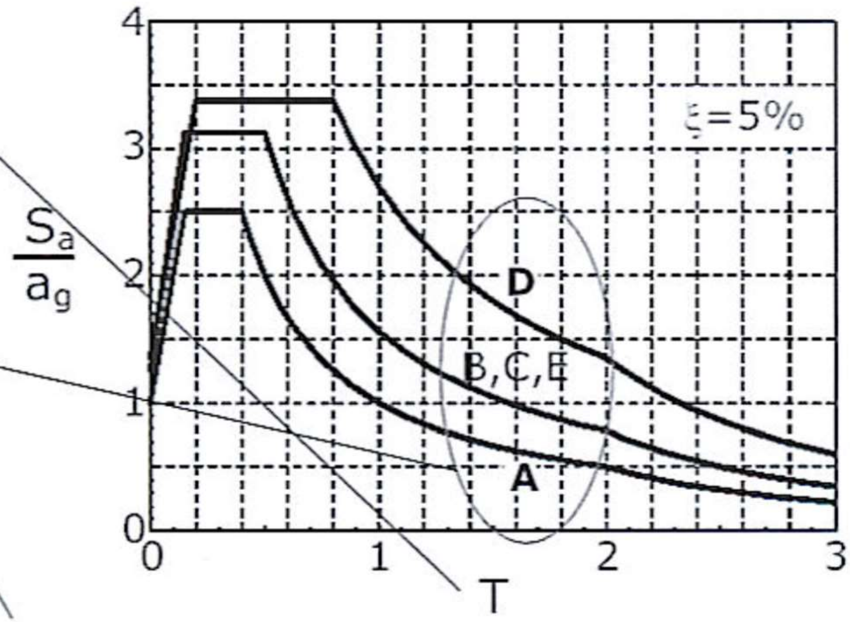
PROGETTO
DI DETTAGLIO

ESEMPIO: ANALISI STATICA

Periodo proprio

Tipologie del terreno di fondazione

Dipende dal terreno di fondazione



Accelerazione max del terreno

zona	a_g
1	0.35 g
2	0.25 g
3	0.15 g
4	0.05 g

$g = 9.81\ m/s^2$

$S_a(T, \xi) = a_g\, S\, (1 + (2.5\,\eta - 1)\, T/T_B)$ $\qquad 0 \leq T \leq T_B$ $\qquad \eta = \sqrt{\frac{10}{5+\xi}}$

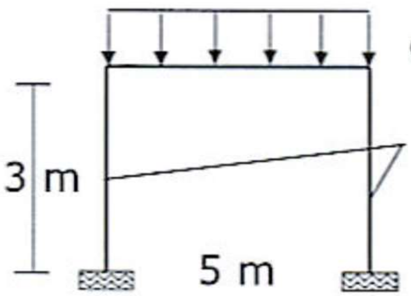
$S_a(T, \xi) = a_g\, S\, \eta\, 2.5$ $\qquad T_B \leq T \leq T_C$

$S_a(T, \xi) = a_g\, S\, \eta\, 2.5\, (T_C/T)$ $\qquad T_C \leq T \leq T_D$

$S_a(T, \xi) = a_g\, S\, \eta\, 2.5\, (T_C\, T_D/T^2)$ $\qquad T_D \leq T \leq 4$ sec

Dipende dallo smorzamento

ESEMPIO: ANALISI STATICA



q=40 kN/m

Pilastri 30x30 in c.a.

E (c.a.)=2000 kN/cm^2

I_{pil} =30^4/12=67500 cm^4

Rigidezza: $k = 2 \cdot 12\ EI_{pil}/h^3 = 24 \cdot 2000 \cdot 67500\ /\ 300^3$ = 120 kN/cm = 12000000 N/m

Massa: $m = W\ /\ g = 200\ /\ 9.81 \cong 20$ kN s^2/m = 20000 kg = 20 t

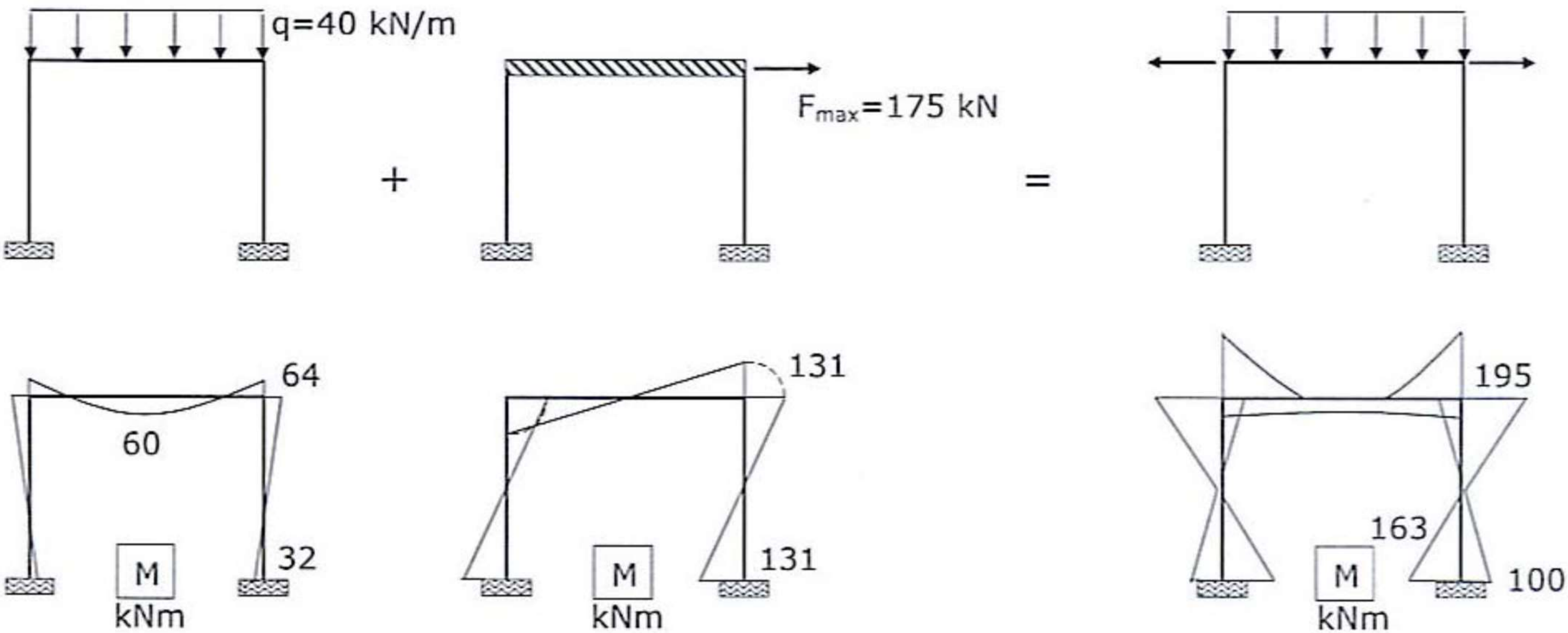
Periodo: $T = 2\,\pi\ /\ \omega\ = 2\,\pi\ \sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\,\pi\ \sqrt{\dfrac{20000}{12000000}}$ =0.26 s

$S_{ae}(T=0.26\ s) = a_g\ S\ \eta\ 2.5 = 0.35\ g \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2.5 = 0.875\ g$

Spettro elastico (da normativa)

$F_{max} = W\ S_{ae}/g = 200 \cdot 0.875 = 175$ kN

ESEMPIO: ANALISI STATICA



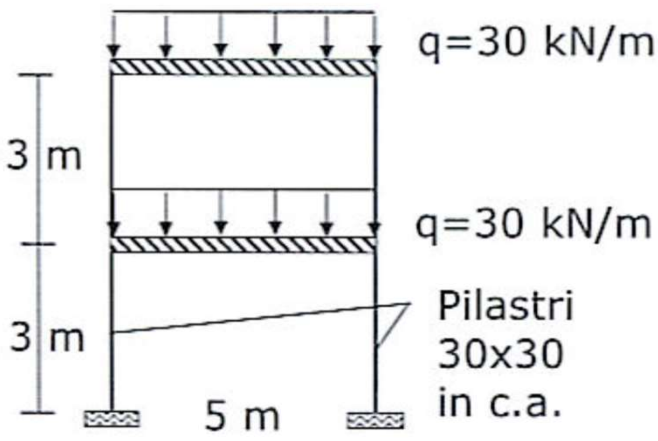
Carichi Verticali

Sisma con periodo di ritorno di 475 anni

Totale

ESEMPIO: ANALISI STATICA

Telaio 2 gradi di libertà



Periodo fondamentale: $T = 0.36$ s

Peso sismico di ogni piano: $W_1 = W_2 = 150$ kN

Peso sismico tot: $W = W_1 + W_2 = 300$ kN

$S_{ae}(T=0.36\ s) = a_g\ S\ \eta\ 2.5 = 0.875\ g$

0.35 g
(zona 1)

Quote dei due piani: $z_1 = 3$ m; $z_2 = 6$ m

<u>Azione tagliante totale alla base del fabbricato</u>

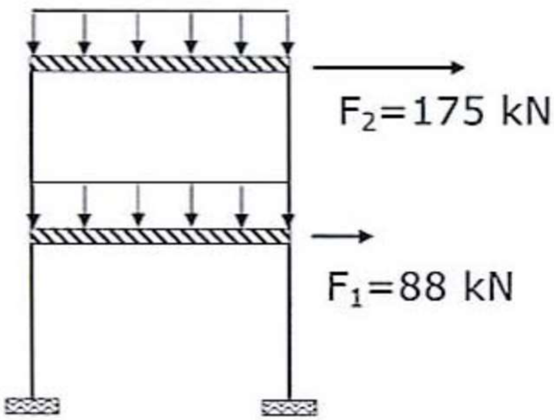
$F_{base} = S_{ae}\ \lambda\ W/g = 0.875 \cdot 1 \cdot 300 = 263$ kN

massa

λ: coefficiente che dipende dall'altezza della struttura

ESEMPIO: ANALISI STATICA

Telaio 2 gradi di libertà



Quote dei due piani: $z_1 = 3$ m; $z_2 = 6$ m

Forze di piano: $F_i = F_{base}\, z_i \dfrac{W_i}{\sum_j z_j W_j}$

$\Sigma_j\, z_j\, W_j = 3 \cdot 150 + 6 \cdot 150 = 1350$ kN m

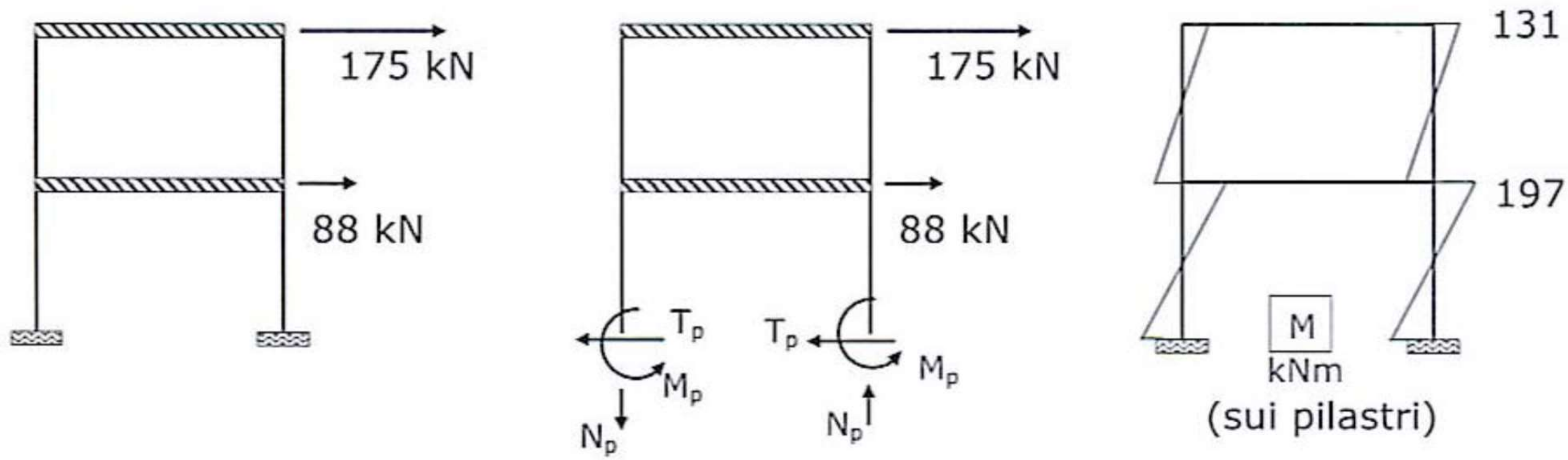
$$F_1 = 263 \cdot 3 \cdot \frac{150}{1350} = 88 \text{ kN}$$

$$F_2 = 263 \cdot 6 \cdot \frac{150}{1350} = 175 \text{ kN}$$

ESEMPIO: ANALISI STATICA

Telaio 2 gradi di libertà

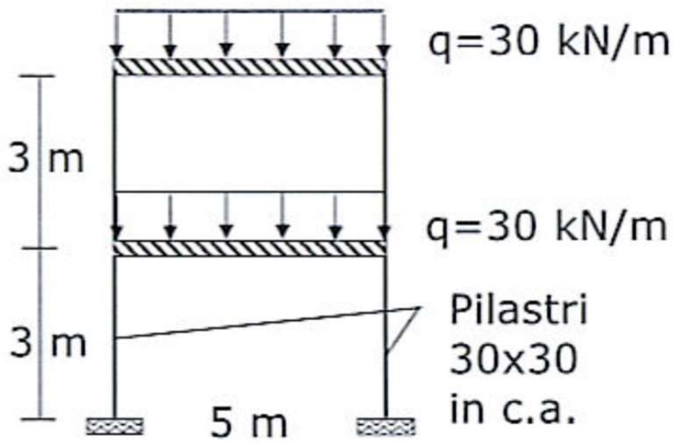
Sollecitazioni indotte dall'azione sismica

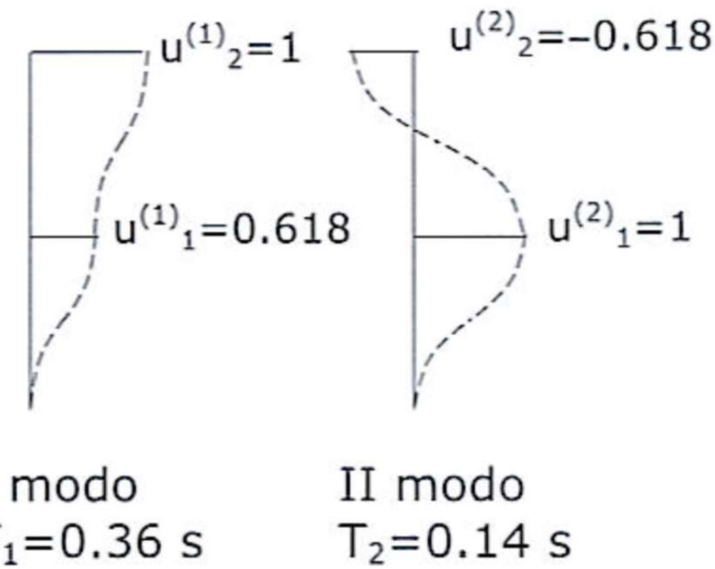


Momento al piede (M_p) = 197 kNm
Taglio al piede (T_p) = 132 kN
Sforzo normale al piede (N_p) = 184 kN

ESEMPIO: ANALISI MULTIMODALE

Telaio 2 gradi di libertà





<u>Coefficienti di partecipazione</u> γ_1, γ_2 :

$$\left(\gamma_r = \frac{\sum_j W_j u_j^{(r)}}{\sum_j W_j u_j^{(r)} u_j^{(r)}}\right)$$

$$\gamma_1 = \frac{150\cdot 1 + 150\cdot 0.618}{150\cdot 1^2 + 150\cdot 0.618^2} = 1.171, \qquad \gamma_2 = \frac{150\cdot 1 + 150\cdot(-0.618)}{150\cdot 1^2 + 150\cdot(-0.618)^2} = 0.276$$

ESEMPIO: ANALISI MULTIMODALE

Telaio 2 gradi di libertà

Ogni modo di vibrare (j) conduce un insieme di forze di piano (indice i) F^j_i

$F^j_i = \frac{1}{g} S_{ae}(T_j)\ W_i\ \gamma^{(j)}_i$ $\qquad\qquad$ $\gamma^{(j)}_i = u^{(j)}_i\ \gamma_j$ $\qquad$ coeff. di distribuzione

Nell'esempio:

$\gamma^{(1)}_1 = u^{(1)}_1\ \gamma_1 = 0.618 \cdot 1.171 = 0.724$, $\quad \gamma^{(1)}_2 = u^{(1)}_2\ \gamma_1 = 1 \cdot 1.171 = 1.171$

$\gamma^{(2)}_1 = u^{(2)}_1\ \gamma_2 = 1 \cdot 0.276 = 0.276$, $\quad \gamma^{(2)}_2 = u^{(2)}_2\ \gamma_2 = -0.618 \cdot 0.276 = -0.171$

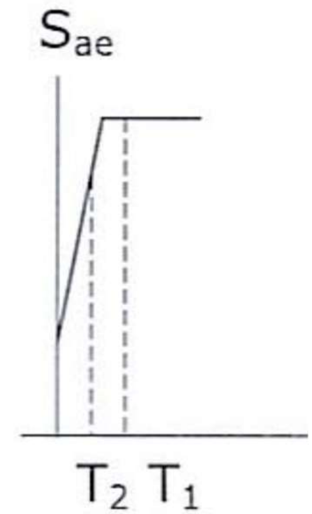
ESEMPIO: ANALISI MULTIMODALE

Telaio 2 gradi di libertà

<u>Spettri elastici</u>

$$S_{ae}(T_1) = S_{ae}(0.36\ s) = 0.35\ g \cdot \overset{S}{1} \cdot \overset{\eta}{1} \cdot 2.5 = 0.875\ g$$

$$S_{ae}(T_2) = S_{ae}(0.14\ s) = 0.35\ g \cdot 1 \cdot (1 + 0.14 \cdot 1.5/0.15) = 0.84\ g$$



<u>Forze di piano</u>

$$F^1{}_1 = S_{ae}(T_1)\ W_1\ \gamma^1{}_1/g = 0.875 \cdot 150 \cdot 0.724 = 95\ kN$$

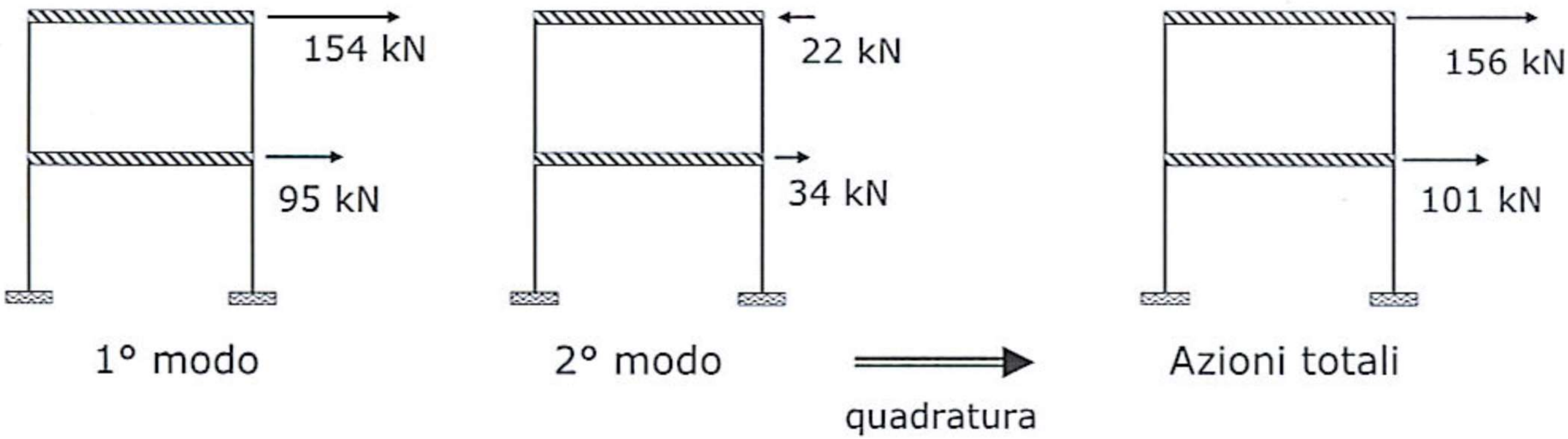
$$F^1{}_2 = S_{ae}(T_1)\ W_2\ \gamma^1{}_2/g = 0.875 \cdot 150 \cdot 1.171 = 154\ kN$$

$$F^2{}_1 = S_{ae}(T_2)\ W_1\ \gamma^2{}_1/g = 0.84 \cdot 150 \cdot 0.276 = 34\ kN$$

$$F^2{}_2 = S_{ae}(T_2)\ W_2\ \gamma^2{}_2/g = 0.84 \cdot 150 \cdot (-0.171) = -22\ kN$$

ESEMPIO: ANALISI MULTIMODALE

Telaio 2 gradi di libertà

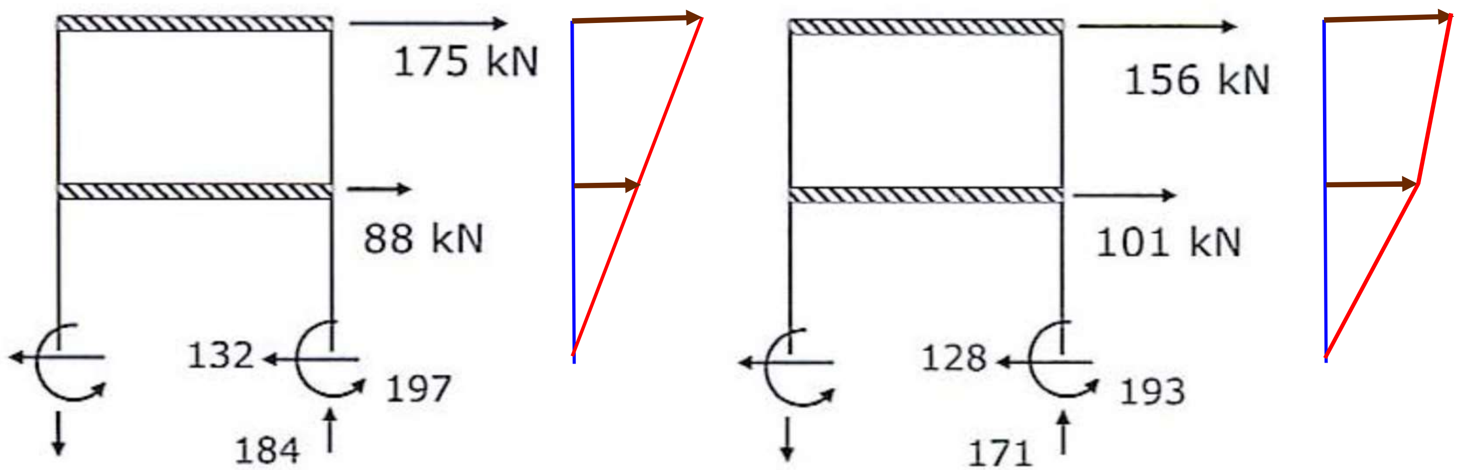


Le azioni totali si determinano per <u>quadratura</u>:

$$F_{tot} = \sqrt{(F_{1°\,modo})^2 + (F_{2°\,modo})^2}$$

ESEMPIO 2: CONFRONTO STA-MOD

Telaio 2 gradi di libertà



Analisi statica

Analisi dinamica

<u>In questo caso</u> l'Analisi statica si dimostra più cautelativa di quella dinamica

APPENDICE A: ORTOGONALITA' MODI DI VIBRARE

$([M]-\lambda[k])\{\phi\}=0 \leftarrow$ problema di auto-valori

Supponiamo di aver calcolato λ_i e λ_j e che

sia $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow$

$[M]\{\phi_i\}=\lambda_i[k]\{\phi_i\}$

$[M]\{\phi_j\}=\lambda_j[k]\{\phi_j\}$

Pre moltiplicando la 1° per $\{\phi_j\}^T$ e la seconda per $\{\phi_i\}^T$ si ha:

$$(**)\quad \begin{array}{l} \{\phi_j\}^T[M]\{\phi_i\}=\lambda_i\{\phi_j\}^T[k]\{\phi_i\} \\ \{\phi_i\}^T[M]\{\phi_j\}=\lambda_j\{\phi_i\}^T[k]\{\phi_j\} \end{array}$$

Effettuando la trasposta della prima si ha, essendo [M] e [k] simmetriche

$\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_j\}=\lambda_i\{\phi_i\}^T[k]\{\phi_j\}$

$\Rightarrow(\lambda_j-\lambda_i)\{\phi_i\}^T[k]\{\phi_j\}=0$ essendo $\lambda_j \neq \lambda_i$ per ipotesi

$\Rightarrow\{\phi_i\}^T[k]\{\phi_j\}=0$ (condizione di ortogonalità su $[k]$)

APPENDICE A: ORTOGONALITA' MODI DI VIBRARE

Dalla relazione $\left([k]-\frac{1}{\lambda}[M]\right)\{\phi\}=0$ si può con gli stessi passaggi dimostrare che

$\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_j\}=0$ (condizione di ortogonalità di vibrare su $[M]$)

Si ha invece $\{\phi_i\}^T[k]\{\phi_i\}\neq 0$ (>0 poiché k è definita positiva)

$\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_i\}\neq 0$

APPENDICE B: MATRICI [L] E [N] DIAGONALI

$$\{u\} = [X]\{P\} = \left[\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{Bmatrix}^{(1)} \cdots \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{Bmatrix}^{(n)} \right] \{P\} = \sum_i \{\phi_i\} P_i = \sum_i \{\phi\}^{(i)} P_i$$

$$[L] = [X]^T [M][X] = \begin{bmatrix} \phi_1^{(1)} & \rightarrow \\ \cdots & \\ \phi_n^{(1)} & \rightarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{(1)} & \cdots & \phi_n^{(1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & \end{bmatrix}$$

$$L_{ij} = \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_j\} \left\langle \begin{array}{l} = 0 \text{ se } i \neq j \\ = \{\phi_i\}^T m_i \{\phi_i\} \text{ se } i = j \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left[L_{ij} \right] \rightarrow \text{diagonale} \Rightarrow [L]^{-1} \text{ diagonale}$$

$$[N] = [X]^T [k][X] \text{ in modo analogo ad } [L]$$

$$N_{ij} = \{\phi_i\}^T [k] \{\phi_j\} \left\langle \begin{array}{l} = 0 \text{ se } i \neq j \\ = \{\phi_i\}^T k_i \{\phi_i\} \text{ se } i = j \end{array} \right.$$

APPENDICE B: MATRICI $[L]^{-1}[N]$ E $[\gamma]$ DIAGONALI

Il prodotto $[L]^{-1}[N]$ è una matrice diagonale il cui termine generico è

$$\frac{\{\phi_i\}^T [k]\{\phi_i\}}{\{\phi_i\}^T [M]\{\phi_i\}} = \frac{1}{\lambda_i} = \omega_i^2$$

Anche la matrice $[\gamma] = [L]^{-1}[x]^T\{m\}$ è diagonale e il termine generico è

$$\gamma_{ii} = \gamma_i = \frac{\{\phi_i\}^T \{m\}}{\{\phi_i\}^T [M]\{\phi_i\}} = \frac{\sum_j m_j \phi_j^{(i)}}{\sum_j m_j \phi_j^{(i)\,2}}$$