Rappresentazione della Superficie Terrestre

Prof. Ing. Raffaela Cefalo

Dipartimento di Ingegneria e Architettura – Università di Trieste

Introduzione

- L’insieme delle attività dell’uomo sulla Terra dedicate alla realizzazione di strutture ed infrastrutture, all’analisi e alla sistemazione del territorio ed agli spostamenti sul territorio richiede di poter disporre di una rappresentazione che permetta di conoscere in maniera sintetica e metricamente valida la superficie fisica terrestre.

Questa rappresentazione è nella maggior parte dei casi una ***carta*** ad una scala opportuna:

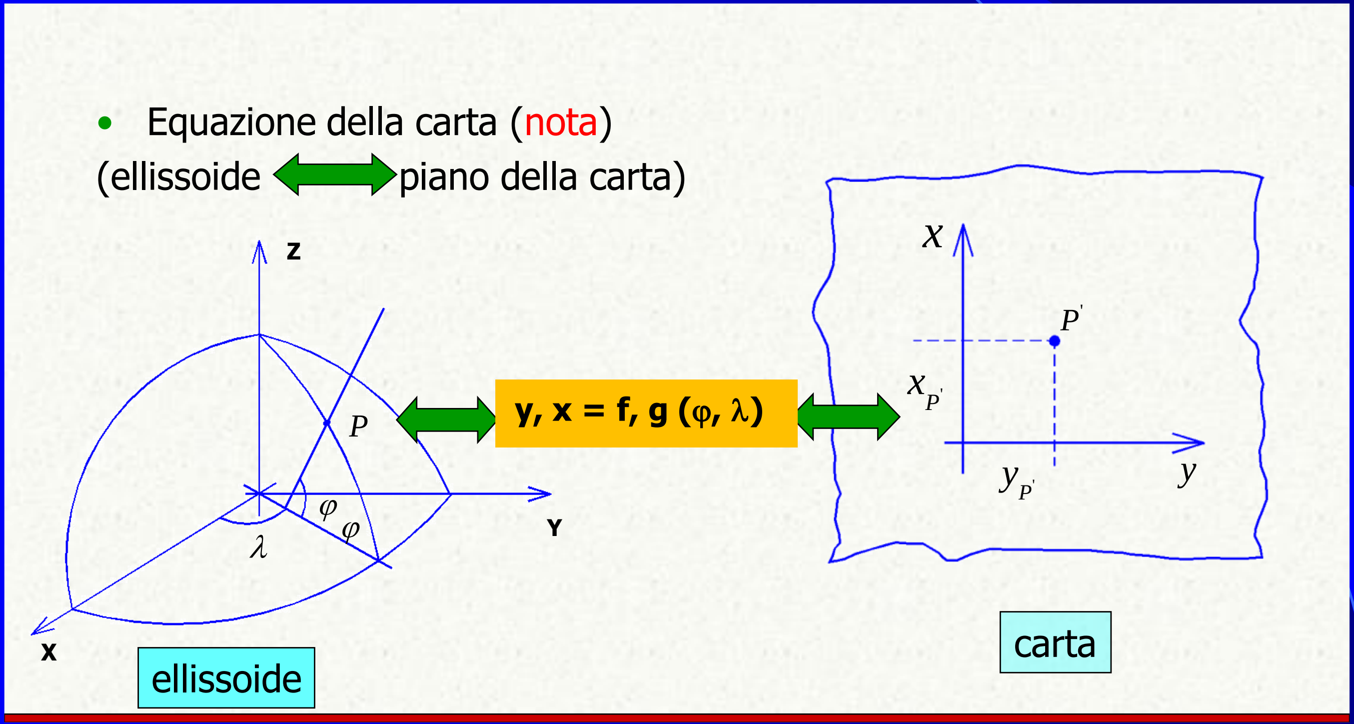
la carta è quindi una rappresentazione grafica ed in scala del terreno

essa può essere in formato numerico – carta digitale o numerica.

Cartografia

La **Cartografia** è l'arte della rappresentazione della superficie terrestre sul piano, secondo norme e segni convenzionali. Per rappresentare la terra o una sua porzione sul piano è necessario eseguire una trasformazione che consenta il passaggio dai punti della superficie terrestre ai punti corrispondenti su una *superficie di riferimento*, che andrà poi a sua volta rappresentata sulla superficie della carta.

Dalla superficie di riferimento alla superficie cartografica



La **rappresentazione della superficie fisica terrestre** è un’operazione piuttosto complessa, dato che:

- la superficie da rappresentare non è piana
- la superficie fisica del terreno ha una forma molto irregolare
- le dimensioni dell’oggetto da rappresentare eccedono in maniera decisa le normali capacità di misura dell’uomo.

Superficie di Riferimento

A ciascun punto del terreno deve essere associato un punto (ed uno solo) sulla superficie di riferimento che deve possedere le seguenti caratteristiche:

- deve essere molto prossima alla superficie terrestre;
- la sua rappresentazione matematica deve essere abbastanza semplice;
- si deve poter stabilire una corrispondenza biunivoca fra i suoi punti e quelli della superficie terrestre;
- si deve poter istituire su di essa una geometria per eseguire calcoli geodetici in modo semplice.

Proiezione sulla Superficie di Riferimento

Il modo più semplice per "mappare" un punto della superficie terrestre su una superficie di riferimento è quello di proiettarlo su di essa tramite la direzione della verticale, materializzabile con un filo a piombo

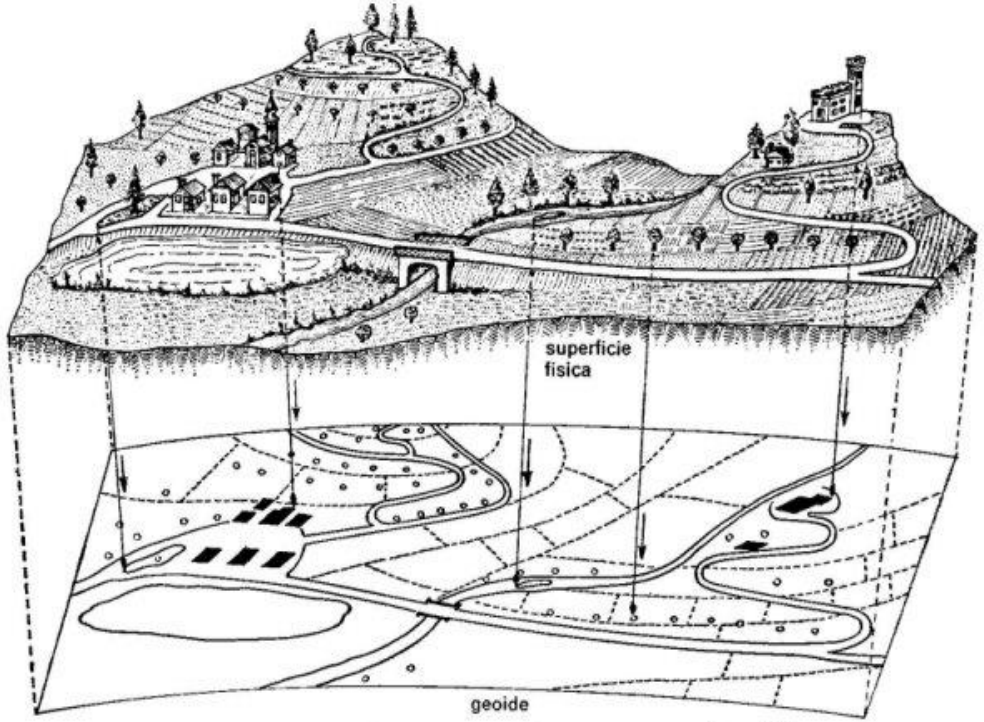


Fig. 1. Superficie fisica del terreno, geoide e rappresentazione del terreno.

Geoide

La superficie che risulta normale in ogni suo punto alla direzione della verticale prende il nome di **geoide**.

Questa superficie coinciderebbe con il livello medio della superficie del mare, opportunamente prolungata sotto le terre emerse, qualora l'acqua dei mari fosse caratterizzata da temperatura e densità uniformi e fosse priva di perturbazioni legate a correnti, venti e maree.

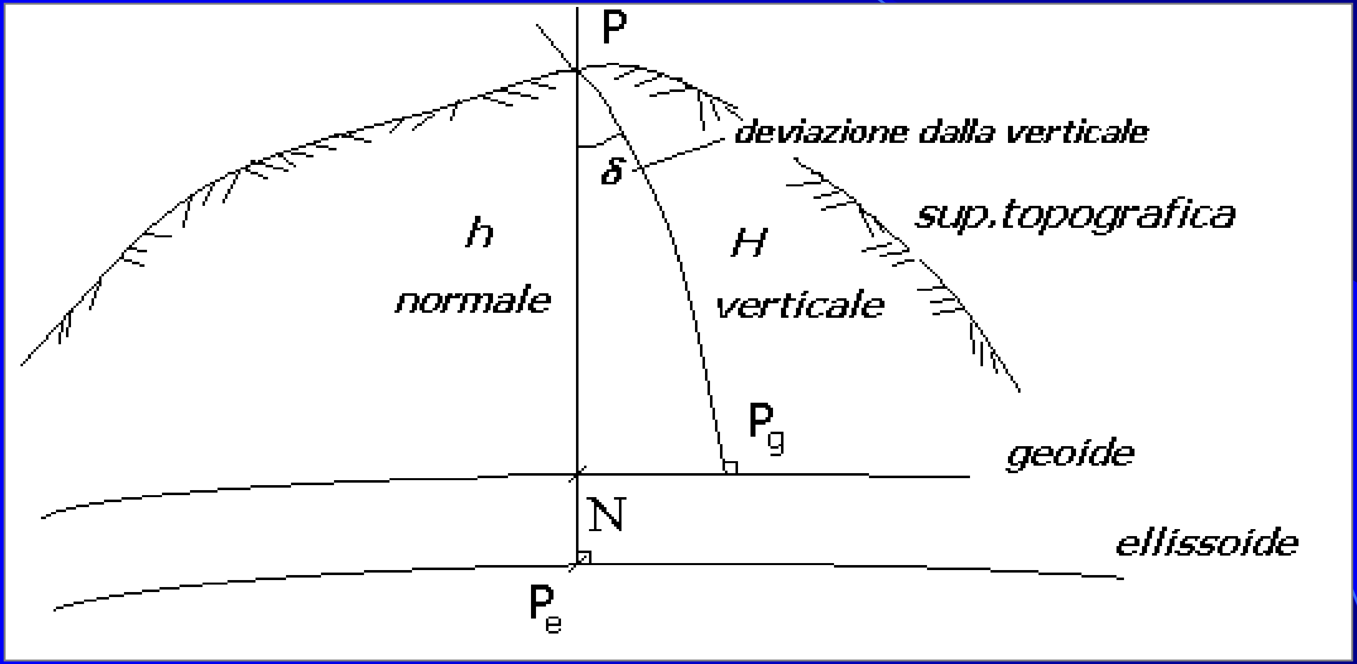
- https://www.youtube.com/watch?v=55yjz_ntRSc

Geoide

Il geoide si definisce come superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre.

La direzione della verticale coincide con quella delle linee di forza del campo gravitazionale terrestre.

Quota ortometrica



La distanza (data da un tratto di linea di forza) fra un punto P sulla superficie terrestre ed il punto corrispondente Pg proiettato sul geoide si chiama **quota** (ortometrica).

Rilievo e Rappresentazione della Superficie fisica terrestre

Con riferimento alla Fig. 1 si può trarre un procedimento di rilievo e rappresentazione della superficie terrestre, che è in parte puramente teorico (in quanto presuppone la superficie fisica ridotta ad una sottile pellicola ed il geoide concretamente esistente e percorribile sotto di essa):

a) data l'irregolarità e complessità della superficie fisica questa deve essere individuata mediante la determinazione della posizione di un sufficiente numero di punti, numero che è funzione anche della scala della rappresentazione;

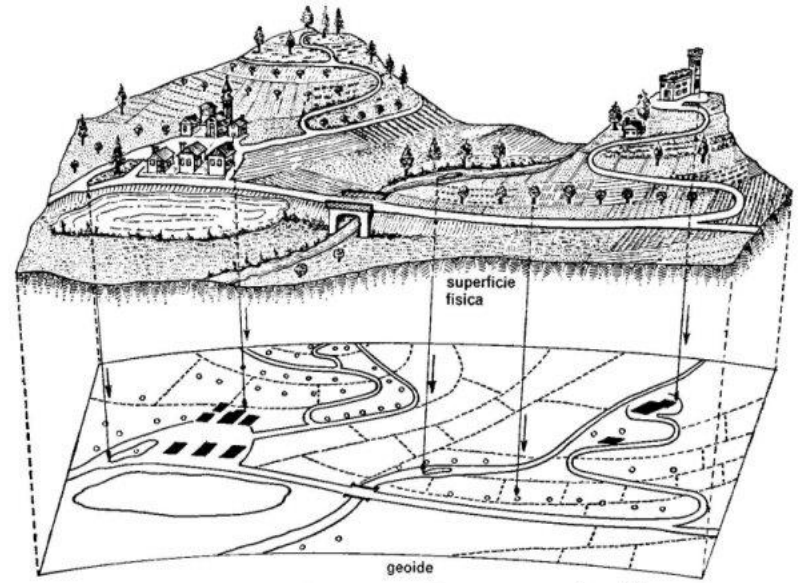


Fig. 1. Superficie fisica del terreno, geoide e rappresentazione del terreno.

b) ogni punto andrebbe proiettato sul geoide secondo la verticale ed ogni proiezione andrebbe segnalizzata; vanno determinate le quote;

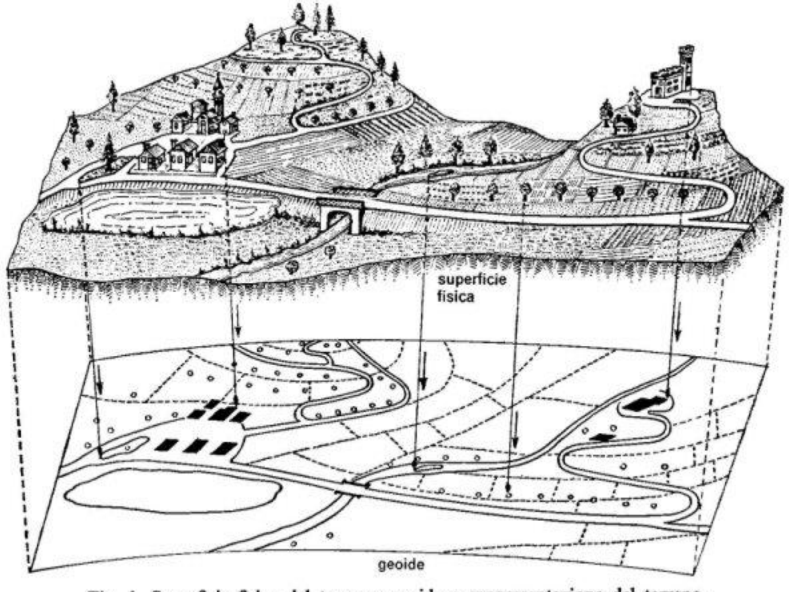


Fig. 1. Superficie fisica del terreno, geoide e rappresentazione del terreno.

c) percorrendo il geoide si dovrebbero misurare angoli e distanze fra le proiezioni dei punti in modo da determinarne la posizione relativa;

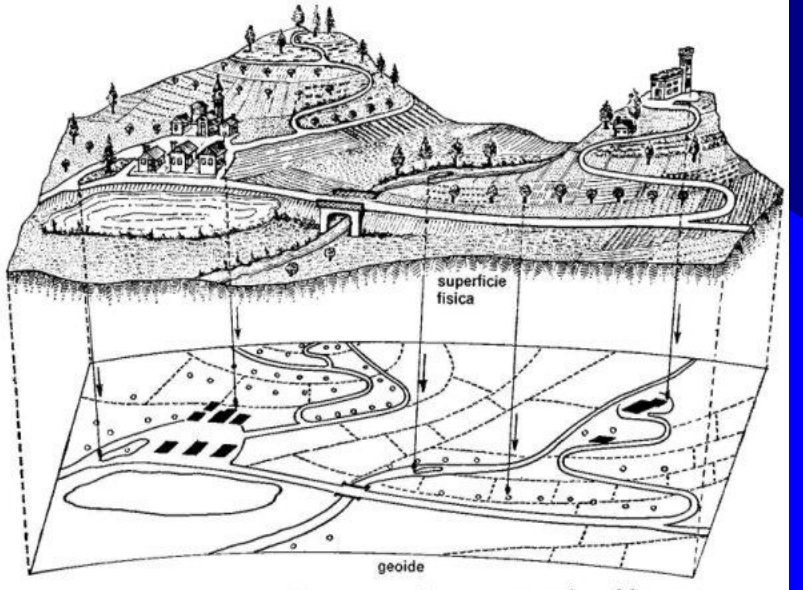
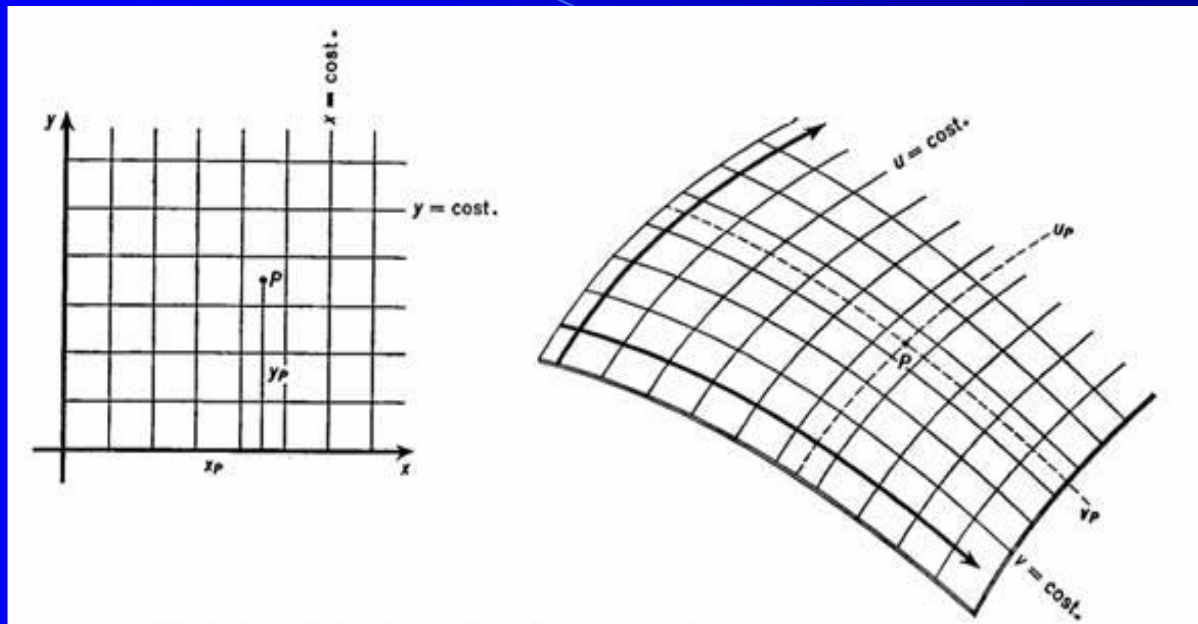


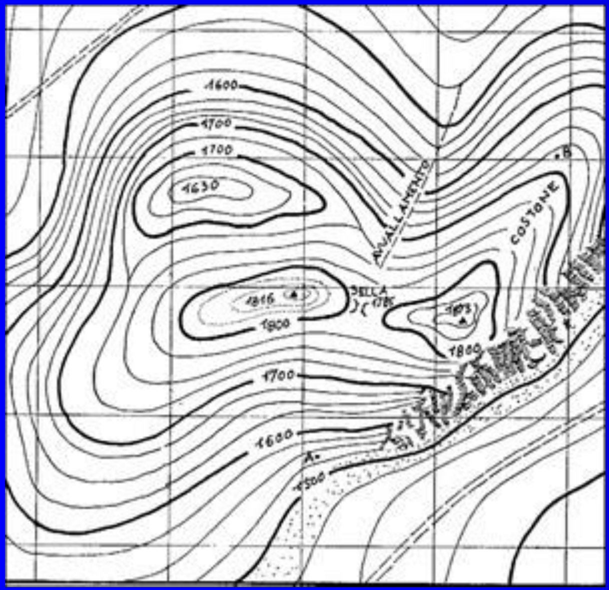
Fig. 1. Superficie fisica del terreno, geoide e rappresentazione del terreno.

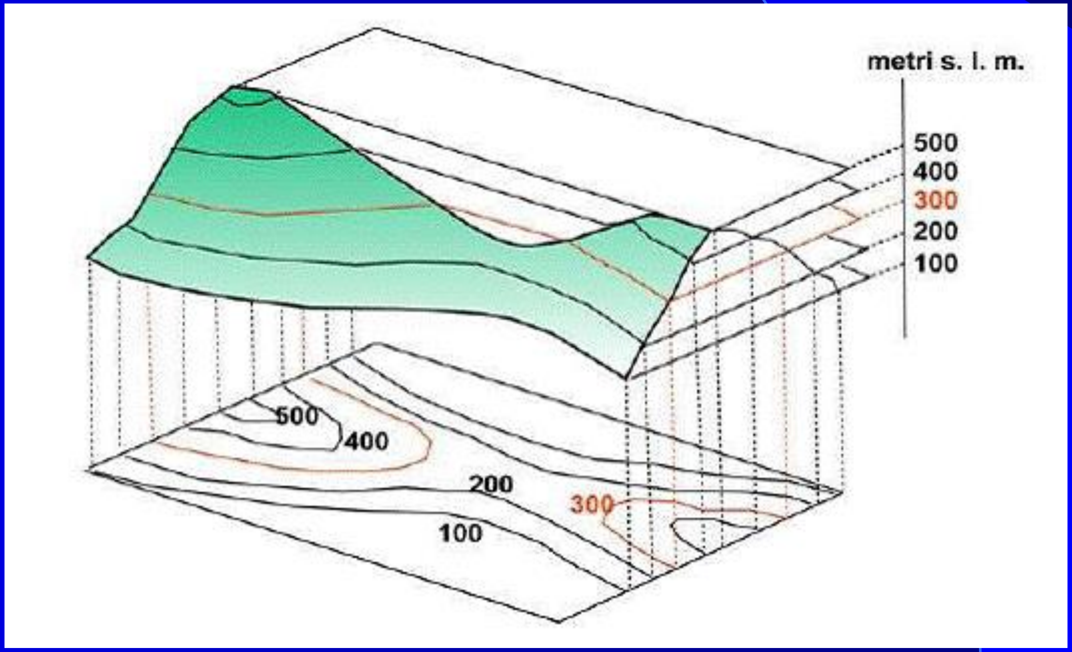


d) sulla base degli elementi misurati occorre determinare la posizione dei punti proiettati mediante coordinate curvilinee sulla superficie di riferimento; è necessario conoscere l’equazione della superficie di riferimento, definire su di essa un sistema di coordinate curvilinee, ed eseguire dei calcoli che permettano, sulla base delle misure fatte, di ricavare le coordinate curvilinee dei punti proiettati;

e) si può a questo punto costruire in scala la porzione di geoide interessata dal rilievo, riportare su questa, in scala, il sistema di coordinate curvilinee, e quindi la posizione di ciascun punto mediante le sue coordinate curvilinee, note.

Congiungendo opportunamente con linee i punti proiettati si evidenziano le particolarità del rilievo; accanto a ciascun punto si scrive anche la quota ottenendo così una rappresentazione completa del terreno; unendo i punti di eguale quota si ottengono le *curve di livello*;





Rappresentazione piana

f) per passare dalla rappresentazione su supporto curvo ad una rappresentazione piana si ricorre ad una rappresentazione cartografica, stabilendo per ciascun punto una corrispondenza biunivoca fra le coordinate curvilinee u e v e le coordinate cartesiane ortogonali x e y:

$$x = f\,(u, v)$$

$$y = g\,(u, v)$$

queste relazioni rappresentano le equazioni della carta.

- La rappresentazione piana che si ottiene è deformata rispetto quella disegnata sul supporto curvo.
- Le operazioni descritte ai punti b) e c) non possono essere eseguite in pratica dato che in effetti le operazioni di misura debbono svolgersi sulla superficie fisica, il problema viene però superato in quanto i metodi di misura di angoli e distanza fra punti della superficie fisica sono tali da fornire angoli e distanze quali si sarebbero misurati sul geoide.

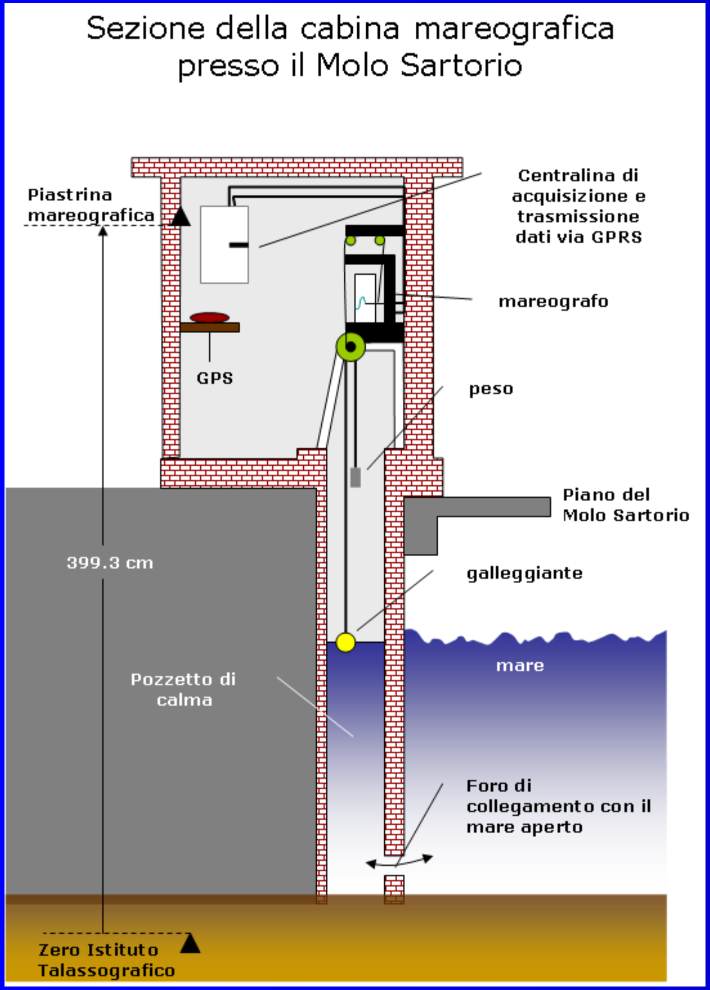
Anche la misura diretta di una quota è impossibile, ma i metodi di misura utilizzati permettono di misurare *dislivelli*, ovvero differenze di quota fra i punti della superficie fisica.

Le quote vengono allora definite collegando i punti mediante operazioni di livellazione che permettono di determinare le differenze di quota: è sufficiente che fra i punti collegati ve ne sia uno si quota nulla, ovvero sul geoide, oppure di quota nota per ricavare le quote di tutti gli altri punti.

- Il geoide è una buona approssimazione della superficie terrestre. Purtroppo esso non è facilmente esprimibile dal punto di vista analitico, in quanto bisognerebbe conoscere il valore della densità in ciascun punto della terra, il che non è possibile.

- Per questo motivo si adotta in molti casi come superficie di riferimento l'**ellissoide** di rotazione che, analiticamente, è esprimibile in forma semplice.

Mareografo di Trieste



La stazione mareografica della U.O.S. di Trieste dell'Istituto di Scienze Marine del CNR, è situata in una cabina sul lato NE del Molo Sartorio, che dal 2004 è inclusa nella rinnovata sede dello Yacht Club Adriaco.

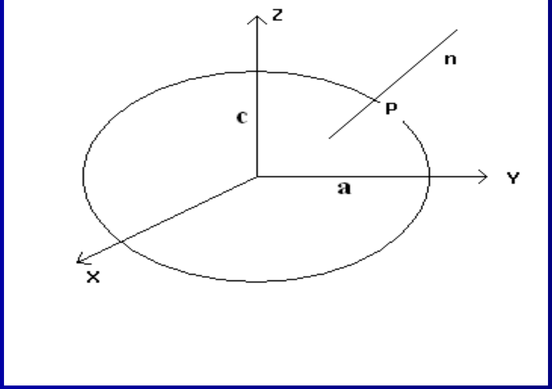
Attualmente la stazione è dotata di quattro mareografi a galleggiante: due OTT digitali mod. Thalimedes, un OTT ed un PAGAN analogici.
Uno dei due Thalimedes è attualmente collegato alla centrale operativa della Protezione Civile regionale del Friuli Venezia Giulia e trasmette i dati di livello del mare raccolti ogni 30 minuti.
Il secondo Thalimedes è inserito nella rete meteomarina dell'ISMAR Trieste; vengono registrate le altezze puntuali del livello del mare rilevate ogni minuto, mentre la trasmissione dei dati via GPRS (General Packet Radio Service), con protocollo di trasmissione TCP/IP (Transmission Control Protocol e Internet Protocol), avviene ogni 5 minuti.

Le registrazioni analogiche su carta vengono raccolte a cadenza settimanale in occasione delle calibrazioni periodiche effettuate mediante un idrometro a contatto elettrico con fettuccia metrica. In questo modo sono misurate le altezze del livello rispetto alla piastrina mareografica, per un confronto simultaneo di queste ultime con quelle registrate dagli strumenti.


CNR - ISMAR Trieste
Rete di monitoraggio meteomarino
Stazione mareografica
TRIESTE MOLO SARTORIO
GLOSS sea level station n. 331
ISMAR
Consiglio Nazionale delle Ricerche
Istituto di Scienze Marine – TRIESTE
www.ts.ismar.cnr.it
Global Sea Level
Observing System
www.gloss-sealevel.org


ISTITUTO GEOGRAFICO
CAPOSALDO
DI
LIVELLAZIONE

Ellissoide



- Ellissoide
  - solido biassiale di rotazione con semiasse equatoriale a e semiasse polare c

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

  - schiacciamento $\alpha = \frac{a - c}{a}$
  - eccentricità

$$e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

Rappresentazione

Una volta scelta la superficie di riferimento per ottenere la rappresentazione della superficie fisica occorrerà:

a) definire l'equazione della superficie di riferimento

b) definire su di essa un sistema di coordinate curvilinee u e v

Rappresentazione

c) definire la natura degli angoli e delle distanze da misurare sulla superficie fisica
d) definire i calcoli che permettono di dedurre dalle misure le coordinate curvilinee dei punti
e) specificare le equazioni della carta per le rappresentazioni cartografiche che si vogliono utilizzare, definendo le deformazioni che queste comportano.

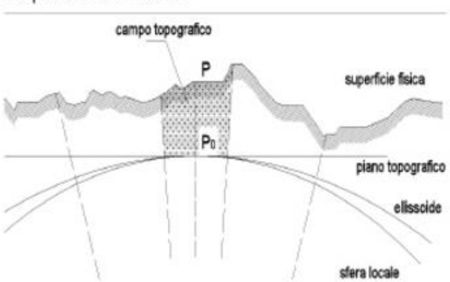
Semplificazioni

- Possono essere introdotte alcune semplificazioni dato che, dal punto di vista planimetrico, una piccola porzione di geoide si discosta poco da un piano tangente condotto per il punto centrale - **CAMPO TOPOGRAFICO (r ≅15 km);**
- inoltre porzioni di geoide limitate a un paio di centinaia di km si discostano poco da una calotta sferica di raggio opportuno - **CAMPO GEODETICO (intorno r ≅100 km).**

Campo topografico e campo geodetico

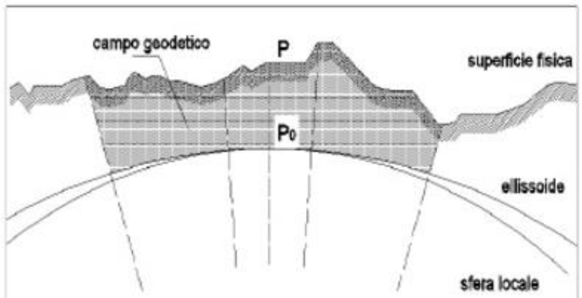
Campo topografico

- È l'intorno del punto considerato avente un raggio di 10-15 km in cui è possibile sostituire, per fini planimetrici, alla sfera locale il piano tangente nel punto stesso;
- Ai fini altimetrici già per distanze dell'ordine delle centinaia di metri, l'errore che si commetterebbe assumendo il piano topografico quale superficie di riferimento sarebbe paragonabile alla sensibilità del metodo di misura dei dislivelli e non è quindi accettabile



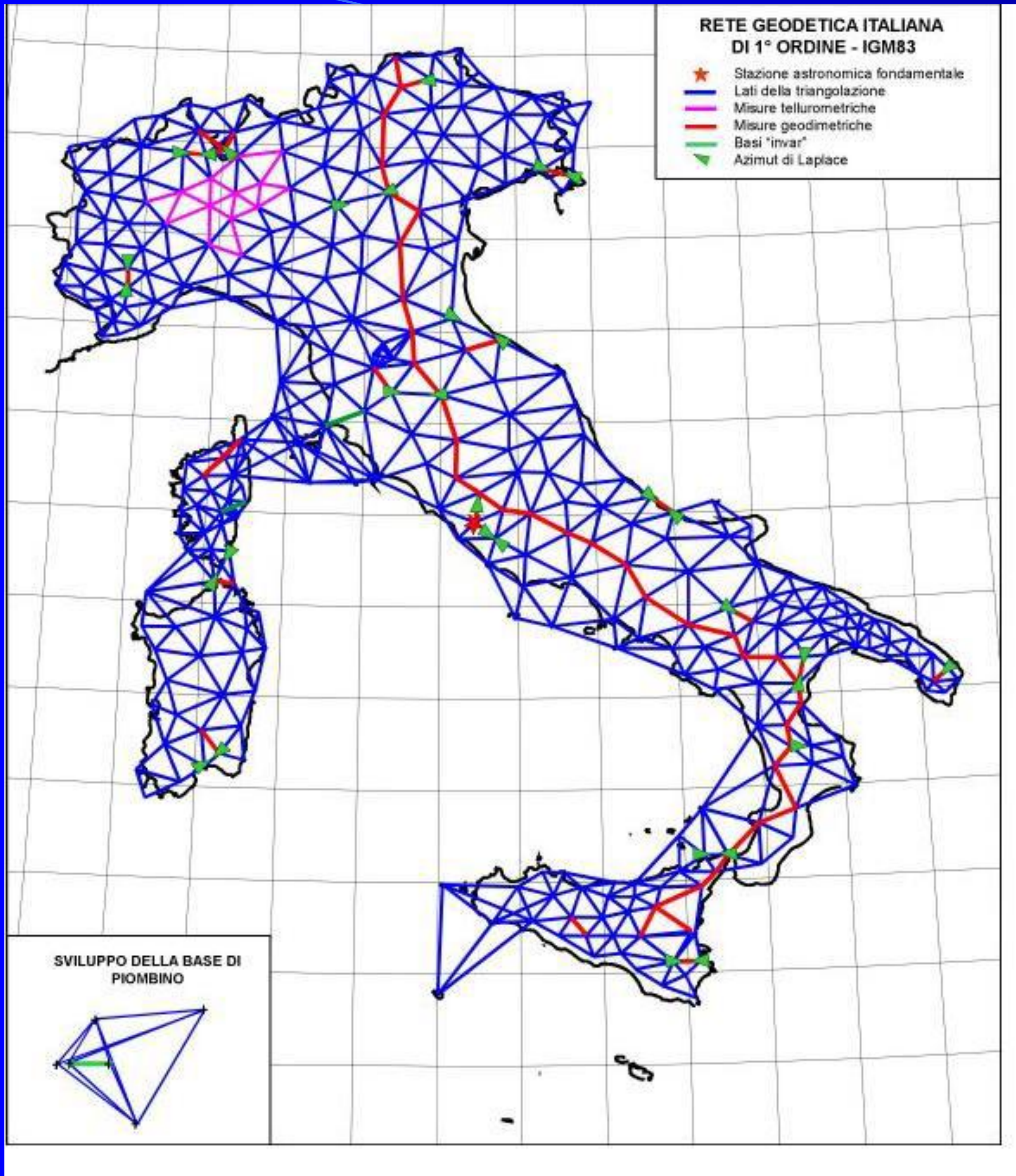
Campo geodetico

- È l'intorno, valutato ai fini planimetrici, del punto considerato avente raggio di circa 100 km, in cui è consentito approssimare la superficie ellissoidica con una superficie sferica detta **sfera locale**, in quanto l'errore insito nell'approssimazione è dello stesso ordine di grandezza di quelli di misura;
- Relativamente alle operazioni altimetriche per distanze superiori a 20 km occorre riferirsi all'ellissoide

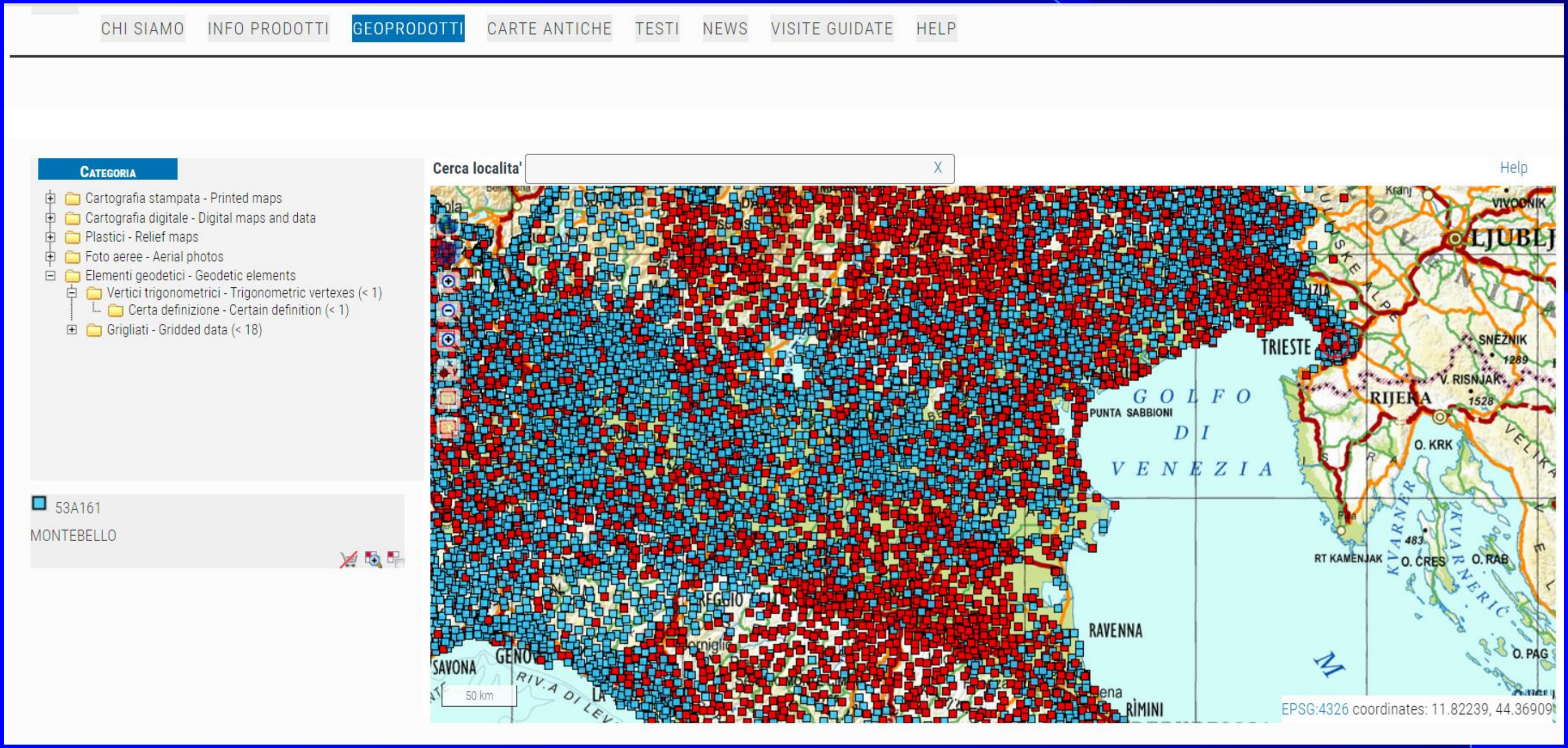


Semplificazioni

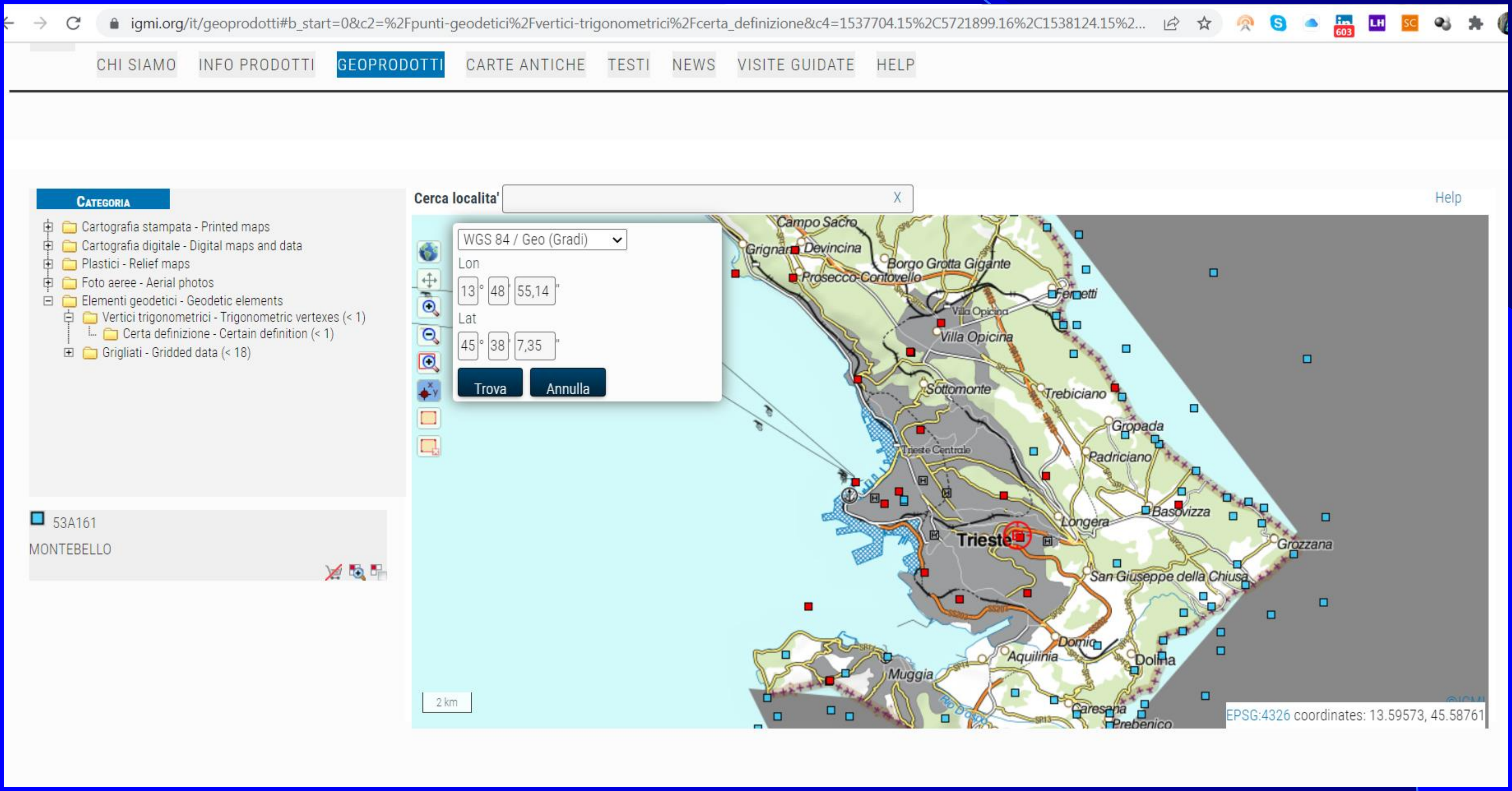
Inoltre una grossa semplificazione deriva dal fatto che la totalità dei punti necessari a definire una carta possono essere distinti in due grandi classi: punti di inquadramento e punti di dettaglio. I punti di inquadramento rappresentano una piccola percentuale del totale

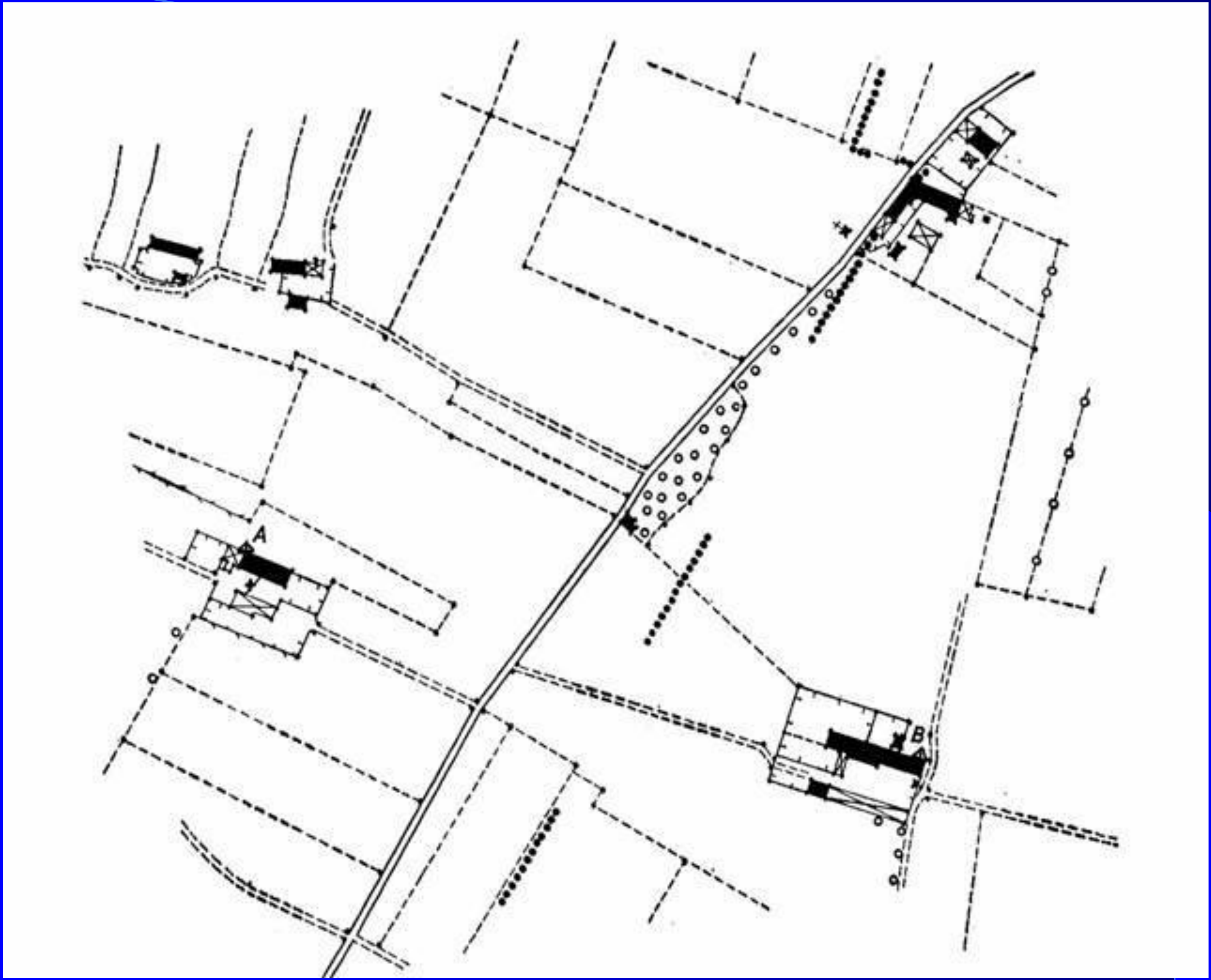

RETE GEODETICA ITALIANA
DI 1° ORDINE - IGM83
Stazione astronomica fondamentale
Lati della triangolazione
Misure tellurometriche
Misure geodimetriche
Basi "invar"
Azimut di Laplace
SVILUPPO DELLA BASE DI
PIOMBINO

Geoprodotti IGM



Geoprodotti IGM




A
B

Sistemi locali

- I metodi tradizionali di posizionamento geodetico hanno come sistema di riferimento l'*ellissoide* per la planimetria ed il *geoide* per le quote
  geoide: superficie equipotenziale normale in ogni punto al vettore di gravità

- determinazioni planimetriche: ellissoide locale (φ, λ)

- determinazioni altimetriche: geoide *(H)*

Ellissoide terrestre

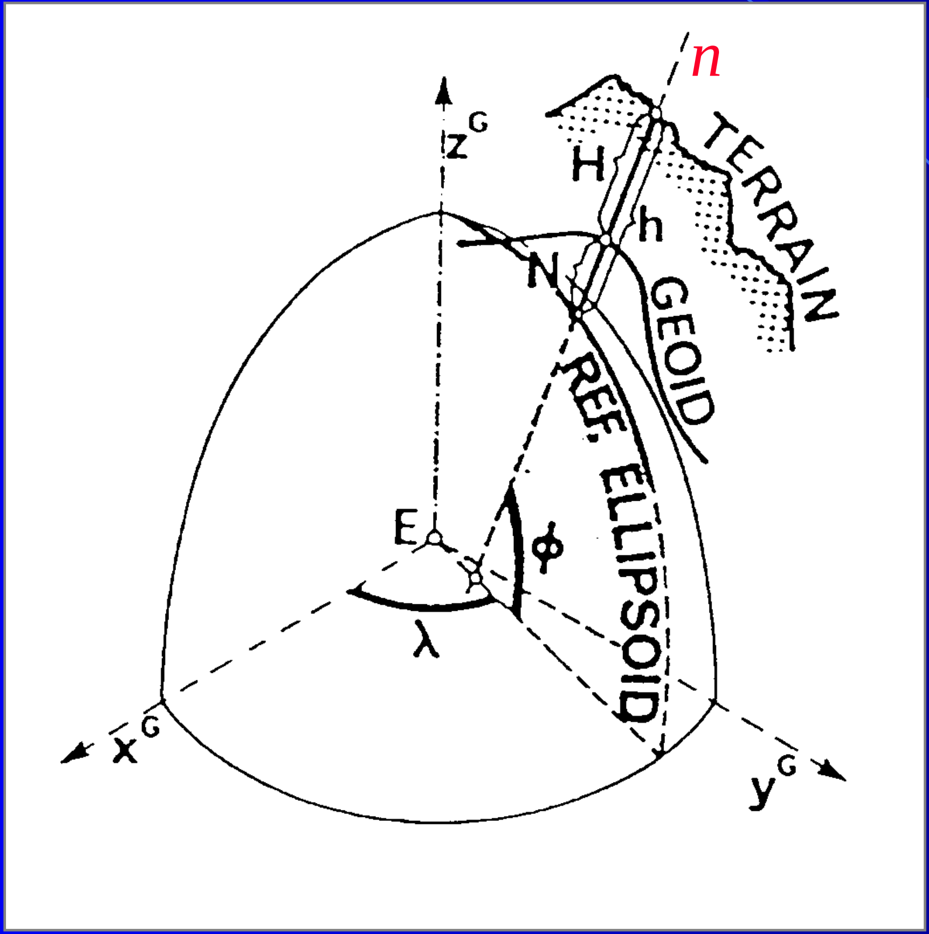
- Assunto come riferimento l'ellissoide biassiale ne sono stati ricavati i parametri a e α, in base a:
  - misure geometriche (misure di archi di meridiano e parallelo), misure di gravità, studi accurati delle traiettorie dei satelliti artificiali

- Diversi geodeti hanno determinato i valori di questi parametri:
  - Bessel (1841) $a = 6377397\ m$ $\alpha = 1/299.2$
  - Clarke (1880) $a = 6378243\ m$ $\alpha = 1/293.5$
  - Helmert (1906) $a = 6378140\ m$ $\alpha = 1/298.3$
  - Hayford (1909) $a = 6378388\ m$ $\alpha = 1/297$

- Nel 1924 furono adottati universalmente quali parametri dell’ellissoide di riferimento i valori proposti da Hayford: l’ellissoide così dimensionato è da allora indicato come

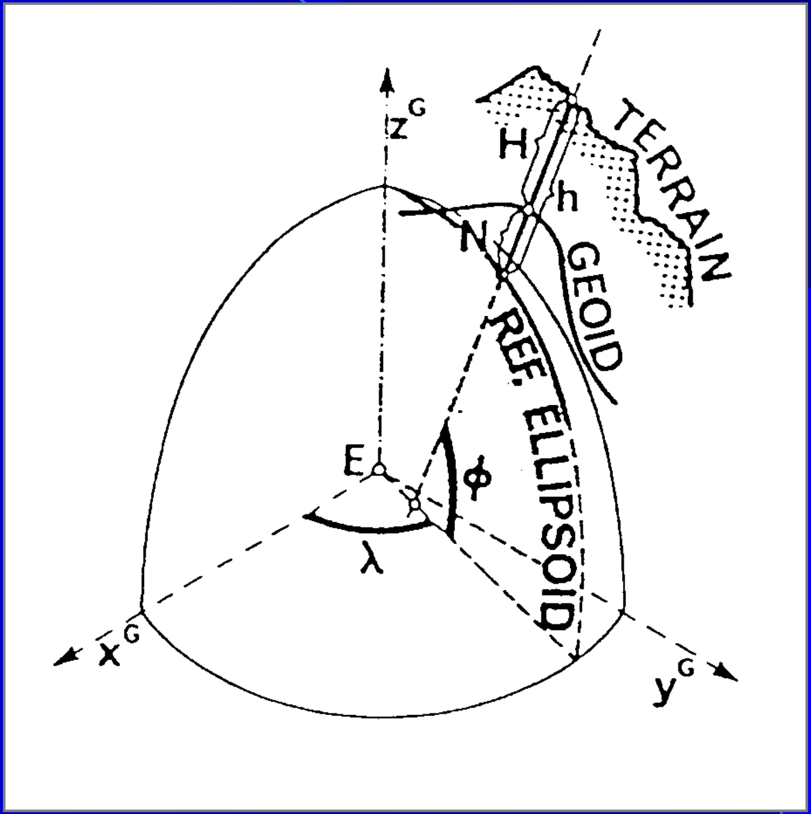
  ellissoide internazionale

Coordinate ellissoidiche



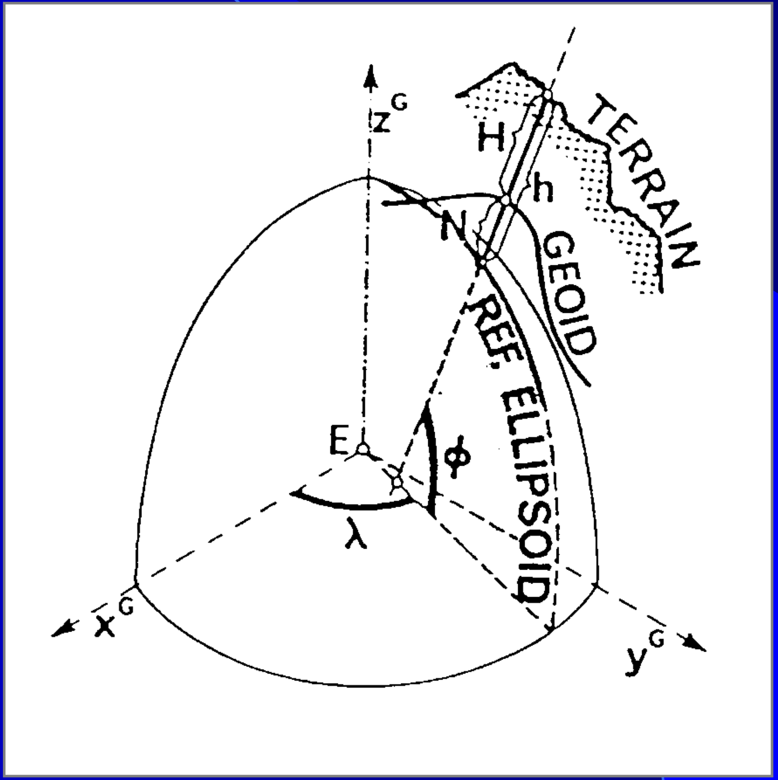
Coordinate ellissoidiche

- *latitudine φ*
  - la normale n all'ellissoide in un punto P forma con la direzione dell'asse polare un angolo il cui complemento è la *latitudine ellissoidica* φ di P



Coordinate ellissoidiche

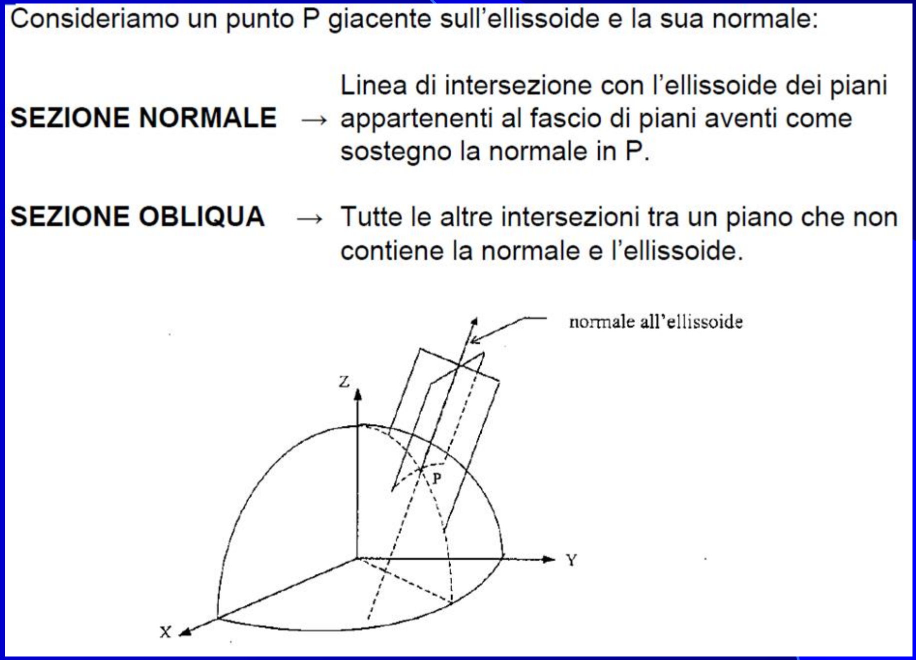
- *longitudine λ*
  - il punto P determina con l'asse polare un piano che, con un altro piano di riferimento per il meridiano di Greenwich e l'asse polare, forma un diedro la cui sezione retta è la *longitudine ellissoidica λ* di P



Sezioni normali

– sezioni normali:

- si consideri un punto P sulla superficie e la normale all’ellissoide *n*; tutti i piani passanti per n intersecano l’ellissoide secondo delle linee piane chiamate *sezioni normali*
- le sezioni normali hanno nel punto P raggi di curvatura diversi in dipendenza dell’angolo che la sezione normale forma con un piano di riferimento

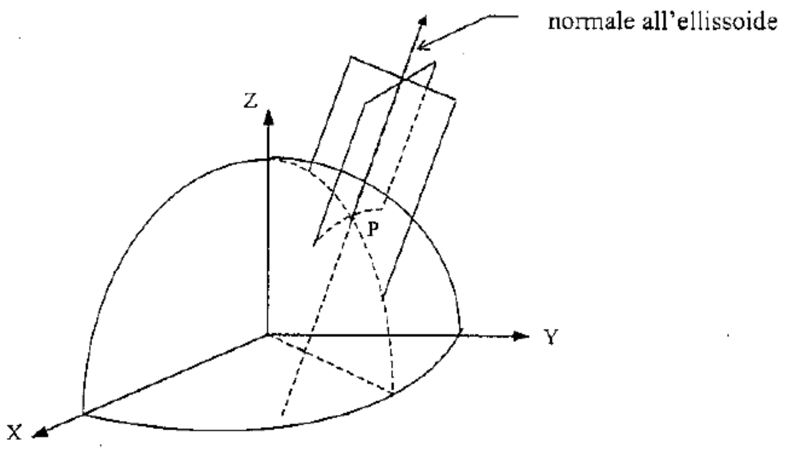


Sezioni normali

Consideriamo un punto P giacente sull'ellissoide e la sua normale:

SEZIONE NORMALE → Linea di intersezione con l'ellissoide dei piani appartenenti al fascio di piani aventi come sostegno la normale in P.

SEZIONE OBLIQUA → Tutte le altre intersezioni tra un piano che non contiene la normale e l'ellissoide.

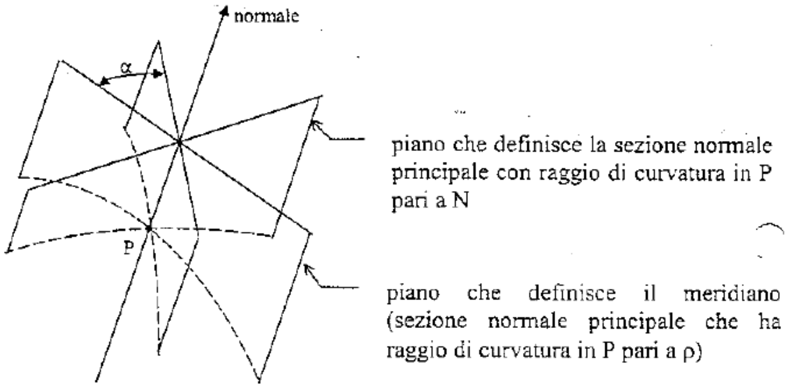


Sezioni normali principali

Le sezioni normali in P hanno raggio di curvatura variabile a seconda dell'angolo che formano con il piano che definisce la sezione normale MERIDIANO.

SEZIONI NORMALI PRINCIPALI

- Meridiano per P
- Ortogonale al meridiano per P → piano che contiene la tangente al parallelo per P



Raggi di curvatura principali

ρ → raggio minimo

N → raggio massimo

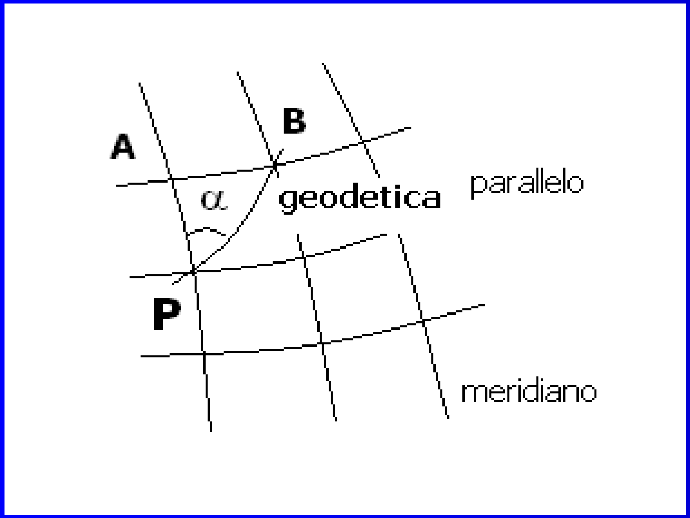
Raggi di curvatura

i raggi di curvatura delle sezioni normali in un punto dell'ellissoide variano con continuità da un minimo ρ ad un massimo N - *raggi principali di curvatura* - *raggio del meridiano e raggio della sezione normale principale (gran normale)*

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

Linea geodetica

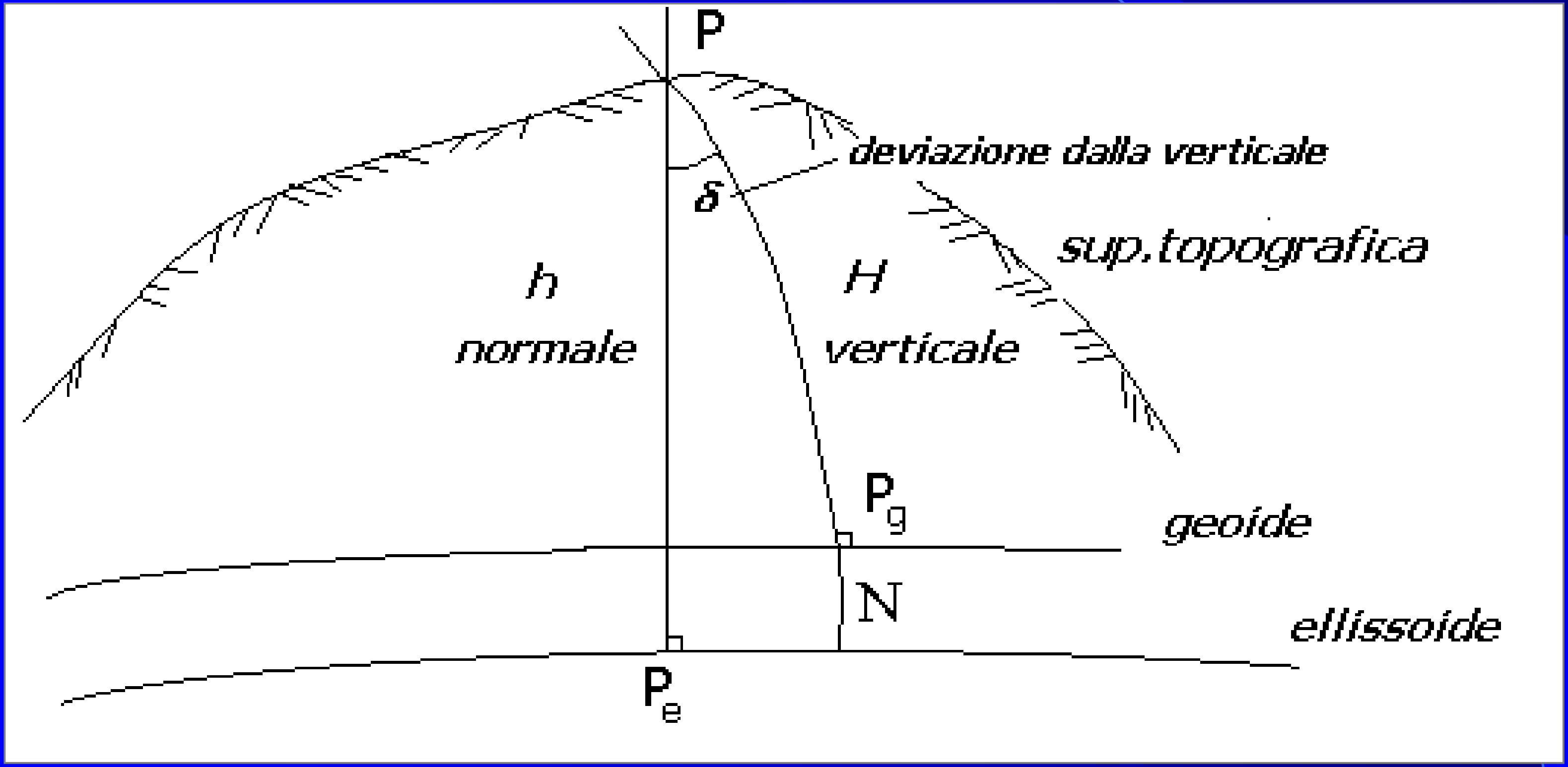


Consideriamo le linee che congiungono due punti sulla superficie di riferimento, la lunghezza della linea compresa fra due punti rappresenta la distanza misurabile fra questi.

Fra due punti su una superficie curva possono essere tracciate infinite linee di natura geometrica diversa occorre definire quella linea che, tra tutte le possibili, abbia la minore lunghezza, questa linea prende il nome di **linea geodetica**.

- Se due punti non sono troppo distanti la geodetica che li unisce è unica e rappresenta il percorso di minore lunghezza.
- Le rette sono le geodetiche del piano e sulla sfera gli archi di geodetica sono archi di cerchio massimo.
- Se si considerano due linee uscenti da un punto P l'angolo fra queste sarà l'angolo fra le tangenti alle linee uscenti da P.

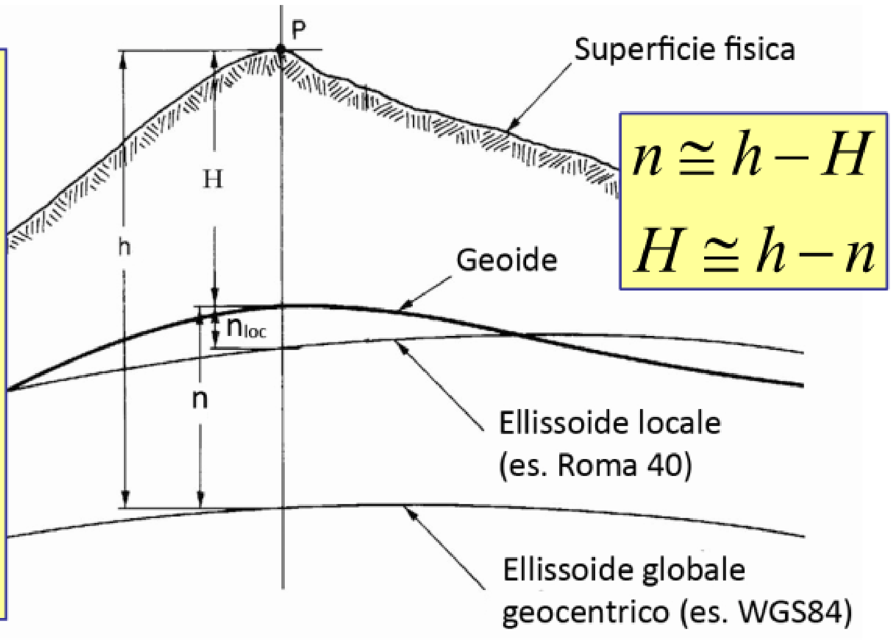
Ondulazione geoidica N



Altezza ellissoidica e Quota ortometrica

Altezza ellissoidica h: Distanza di un punto dall'*ellissoide* misurata lungo la normale ellissoidica. Ha solo un significato geometrico.

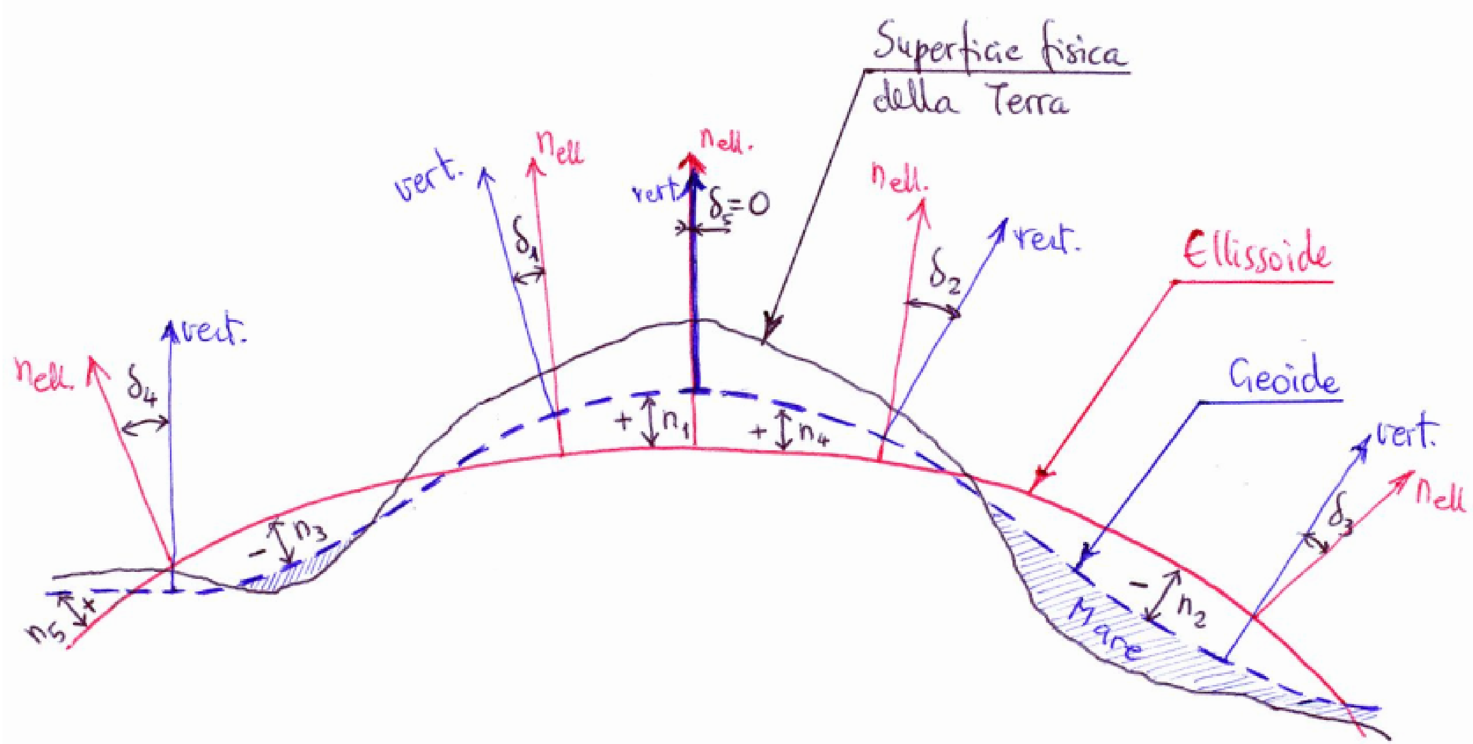
Quota ortometrica H: Distanza di un punto dal *geoide* misurata lungo la linea di forza passante per il punto. Ha un significato fisico (valore del potenziale della gravità) per cui viene utilizzata in tutte le applicazioni ingegneristiche e nella cartografia. E' anche detta "quota sul livello medio del mare"



$$n \cong h - H$$

$$H \cong h - n$$

A. Stoppini, Università di Perugia - Dispense del Corso



Nella figura sono esemplificati, per un'immaginaria area della Terra comprendente mari e terre emerse, gli scostamenti del geoide rispetto a un assegnato ellissoide di riferimento:

ONDULAZIONI GEOIDICHE n : sono **scostamenti altimetrici** tra il geoide e l'ellissoide; si misurano in metri e risultano positive o negative a seconda che la superficie geoidica si trovi a un livello di potenziale gravitazionale maggiore o minore rispetto all'ellissoide. Con riferimento alla figura, le ondulazioni n_1, n_4 e n_5 sono positive, le n_2 ed n_3 sono negative. Il valore assoluto delle ondulazioni dipende dal modello e dall'ellissoide di riferimento adottati, ma può raggiungere e superare i 100 metri. A titolo di esempio, l'ondulazione del geoide nella zona di Perugia è di circa +45 metri (il valore esatto varia a seconda del modello di geoide utilizzato).

Equazione del geoide

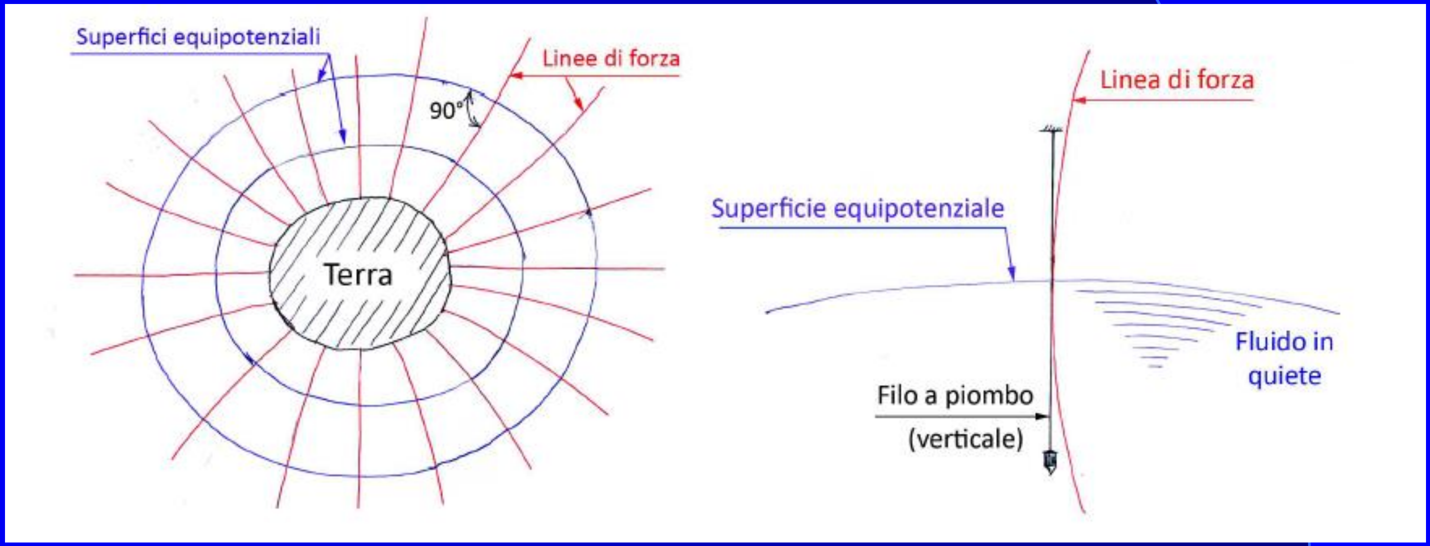
La **verticale** è la direzione della forza di **gravità**.

La gravità costituisce un campo di forza ***conservativo***, ammette quindi un ***potenziale***

Linee di forza: linee tangenti in ogni punto alla direzione delle forze → linee gobbe → ***verticali***

La direzione della gravità in un punto è **tangente** alla linea verticale che passa per quel punto.

Il luogo dei punti che hanno lo stesso potenziale costituisce una ***superficie equipotenziale***.

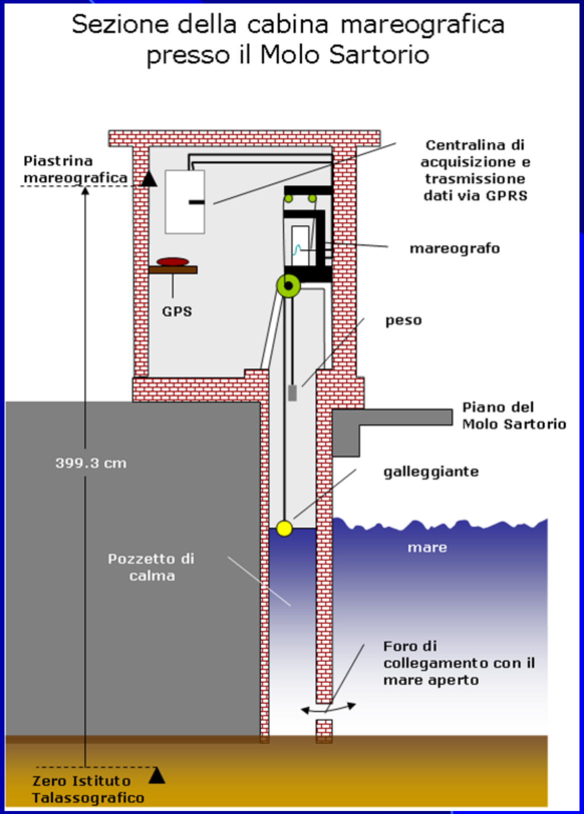


∞ superfici equipotenziali del campo di gravità
(in dipendenza degli ∞ valori che il potenziale può assumere);

Le superfici equipotenziali sono normali alle linee di forza del campo gravitazionale → una ***superficie equipotenziale***, opportunamente scelta, definisce il ***geoide***.

Il geoide è quindi la superficie equipotenziale della gravità che passa per un *determinato punto* della superficie terrestre, a cui si attribuisce una quota nulla.

È individuato determinando il livello medio del mare in un punto di posizione planimetrica stabilita.



Si riferisca il corpo terrestre ad un sistema di coordinate cartesiane OXYZ

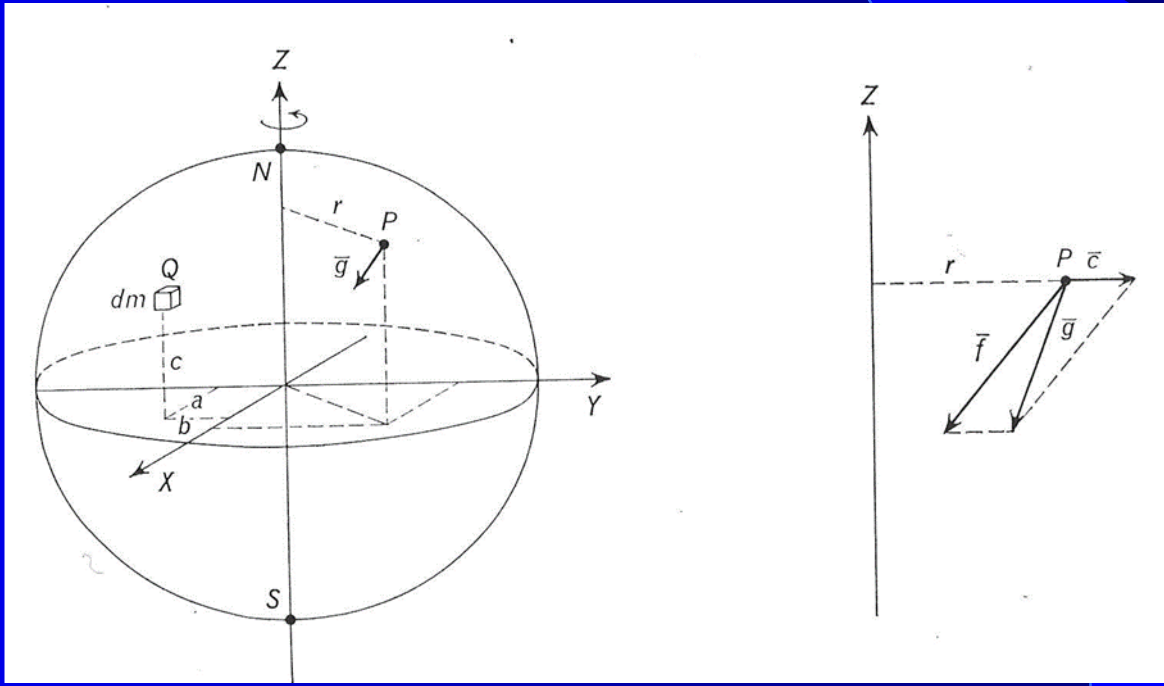
origine O coincidente con il baricentro della Terra

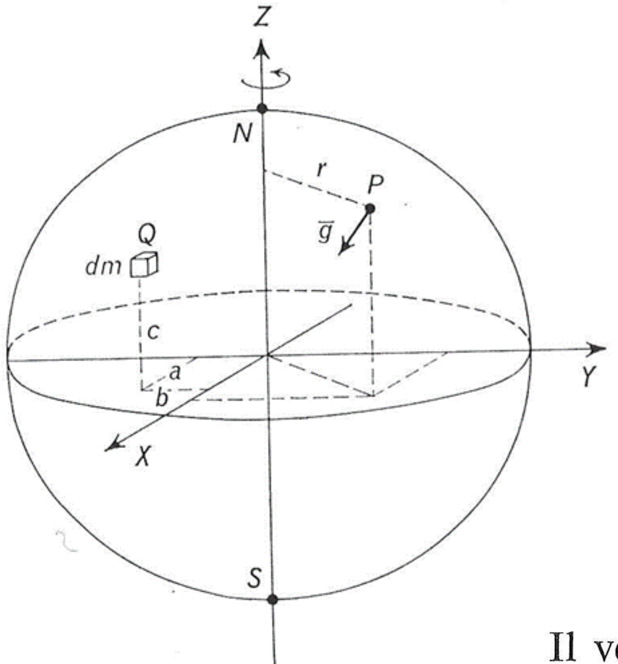
asse Z coincidente con l'asse di rotazione terrestre

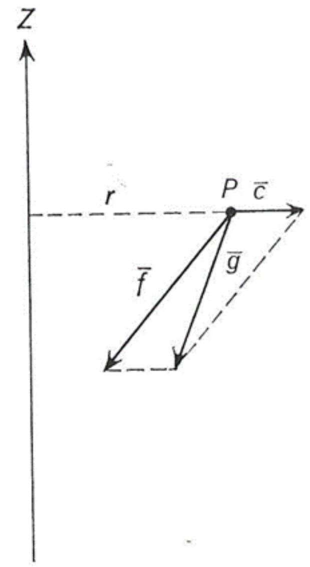
assi X e Y coincidenti con gli assi principali di inerzia

Il vettore gravità $\bar{g}$ in un punto generico P è una funzione della posizione del punto, ovvero delle tre coordinate che lo individuano

$$\bar{g} = \bar{g}(X, Y, Z)$$







Il vettore gravità $\bar{g}$ in un punto generico P è una funzione della posizione del punto, ovvero delle tre coordinate che lo individuano

$$\bar{g} = \bar{g}\,(X, Y, Z)$$

e si può considerare composto da due forze:

a) la forza $\bar{f}$ di attrazione newtoniana, che è la risultante di tutte le forze elementari che ogni elemento di massa della Terra esercita sull'unità di massa posta in P,

b) la forza centrifuga su l'unità di massa $\bar{c} = \omega^2 \bar{r}$ (da ricordare che il punto P si ritiene collegato alla Terra) dovuta alla rotazione della Terra intorno all'asse polare Z, rotazione che avviene con la velocità angolare $\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ rad/sec; il vettore $\bar{r}$ ha ovviamente un modulo $r = (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}$ (distanza del punto P dall'asse di rotazione) ed è diretto secondo la normale dal punto P all'asse Z verso l'esterno della Terra.

Potenziale di gravità

Il potenziale W in un punto è una funzione della posizione del punto

$$W = W(X, Y, Z)$$

per la quale si verifica che

$$\frac{\partial W}{\partial X} = g_X, \qquad \frac{\partial W}{\partial Y} = g_Y, \qquad \frac{\partial W}{\partial Z} = g_Z$$

che sinteticamente si esprimono con la

$$\bar{g} = \operatorname{grad} W$$

ovvero le derivate parziali del potenziale danno le componenti g_X, g_Y, g_Z della gravità secondo i tre assi; in generale indicando con dP uno spostamento infinitesimo si ha

$$dW = \bar{g} \times dP$$

cioè la derivata del potenziale secondo una direzione dP dà la componente del vettore gravità in quella direzione; in particolare se la direzione individuata da dP è tangente alla superficie equipotenziale passante per P risulta $dW = 0$ cioè $\bar{g} \times dP = 0$ da cui si deduce l'ortogonalità di $\bar{g}$ rispetto alla superficie equipotenziale.

Il potenziale W è la somma del potenziale V relativo alla forza di attrazione universale, e del potenziale v relativo alla forza centrifuga (i potenziali possono essere sommati perché sono funzioni scalari).

Il potenziale v è di immediata deduzione

$$v(X, Y) = \frac{1}{2}\,\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}\,\omega^2 (X^2 + Y^2)$$

Per il potenziale V si consideri (fig. 6) un elemento di massa dm della Terra posto nel punto Q di coordinate generiche a, b, c; se $\delta(a, b, c)$ è la densità in tale punto si ha

$$dm = \delta(a, b, c)\, da\, db\, dc$$

Questo elemento di massa determina sulla massa unitaria posta in P una forza di attrazione di modulo

$$dF = G\,\frac{dm}{(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2} = G\,\frac{dm}{l^2} \qquad (l = PQ)$$

e diretta da P verso Q; la costante G di attrazione universale in unità MKS vale $6{,}67 \cdot 10^{11}$.

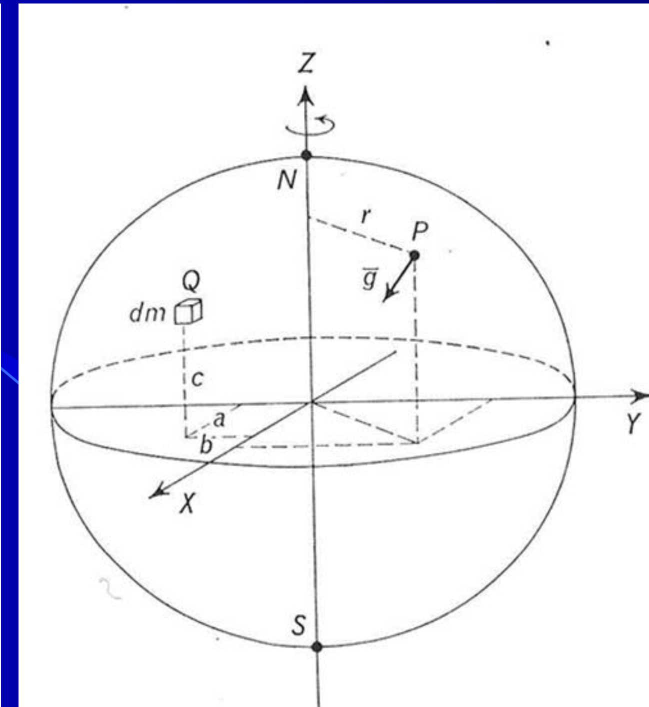
Il potenziale dV dovuto alla massa dm vale

$$dV = \frac{G\,\delta(a, b, c)\, da\, db\, dc}{[(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{Gdm}{l}$$

ed il potenziale dovuto a tutte le masse della Terra

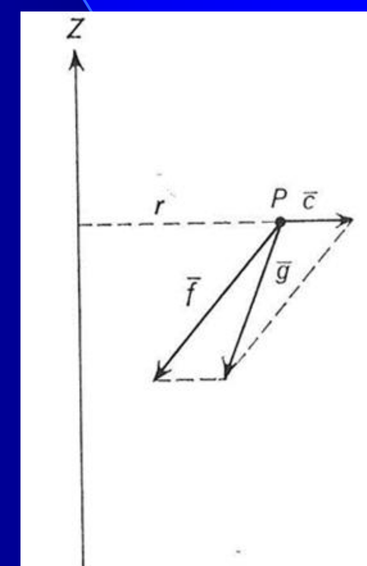
[2] $$V(X, Y, Z) = G\iiint \frac{dm}{l}$$

ove l'integrale è esteso a tutto il volume della Terra.



$$G = 6.67430 \times 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

G = costante di gravitazione universale



Si noti che V risulta funzione di X, Y, Z dato che le variabili di integrazione sono a, b, c. Il geoide ha quindi come equazione

[3] $$V(X, Y, Z) + v(X, Y) = \text{cost.}$$

2-2. *Superfici che approssimano il geoide: sferoide, ellissoide.*

Per eseguire l'integrazione a secondo membro della [2] occorrerebbe conoscere la densità in ogni punto della Terra, cioè la funzione $\delta(a, b, c)$; la conoscenza dei valori di δ nell'interno della Terra è piuttosto vaga e i dati attendibili sono globali, si sa infatti che la densità media è di 5,52 gr/cm³ mentre in superficie è di 2,67 gr/cm³ e necessariamente molto più alta nel nucleo; le indagini fatte forniscono dati abbastanza attendibili sulla variazione della densità dalla superficie sino al nucleo, ma sono dati comunque insufficienti per una dettagliata conoscenza della distribuzione delle masse; ne deriva che è impossibile determinare rigorosamente l'equazione [3].

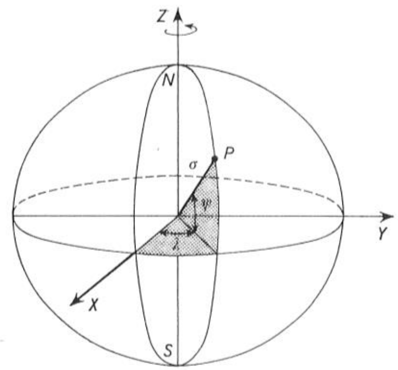


Fig. 7. Coordinate polari geocentriche.

L'integrale [2] viene allora sviluppato in serie di funzioni sferiche dopo aver introdotto in luogo delle coordinate cartesiane le coordinate polari σ, ψ, λ (v. fig. 7) legate alle coordinate cartesiane dalle relazioni

[4] $$X = \sigma \cos\psi \cos\lambda, \quad Y = \sigma \cos\psi \,\mathrm{sen}\,\lambda, \quad Z = \sigma \,\mathrm{sen}\,\psi$$

A meno di termini dell'ordine di $\frac{1}{\sigma^4}$ si ricava per V l'espressione approssimata

[5] $$V(\sigma, \psi, \lambda) =$$

$$= \frac{GM}{\sigma}\left[1 + \frac{1}{2\sigma^2 M}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\left(1 - 3\,\mathrm{sen}^2\psi\right) + \frac{3}{4\sigma^2}\,\frac{B-A}{M}\cos^2\psi\cos 2\lambda\right]$$

ove M è la massa totale della Terra, ed A, B e C sono i momenti di inerzia rispetto agli assi X, Y e Z.

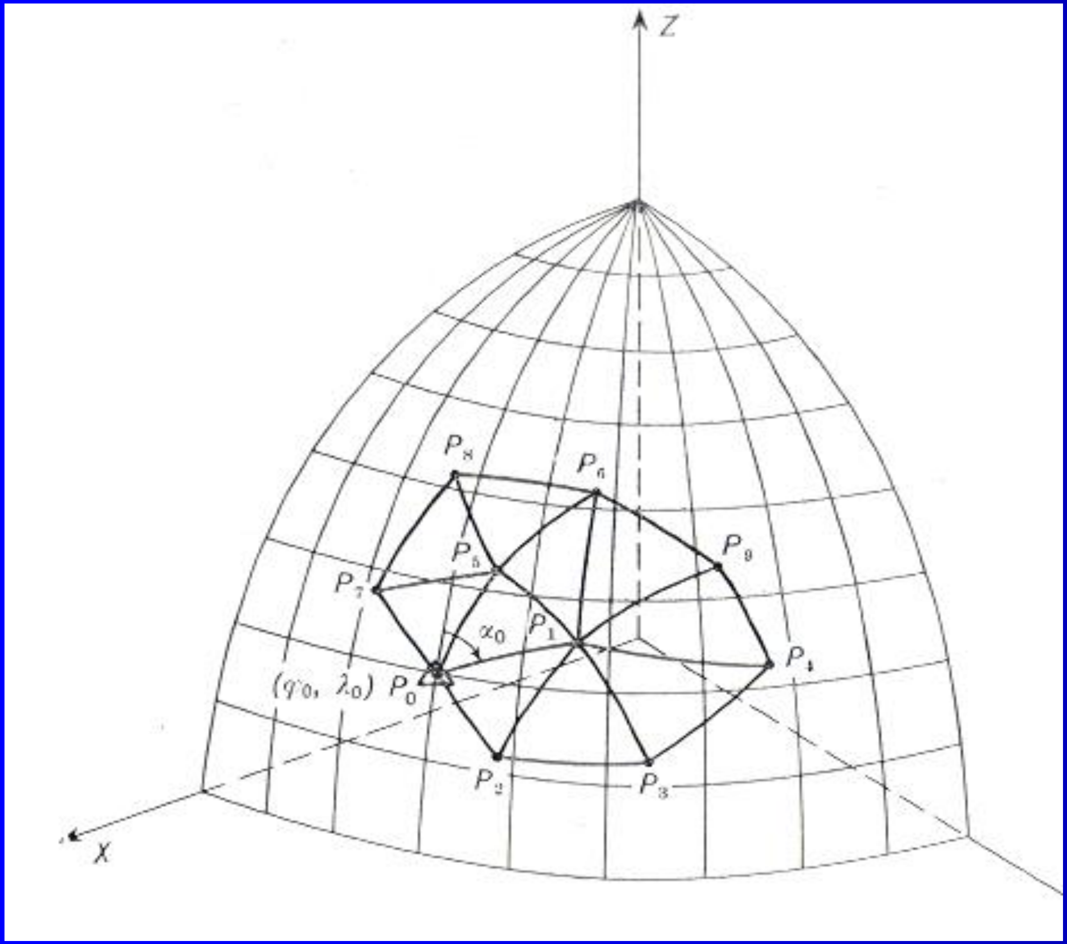
riferimento per i rilievi; anzi, poiché una grande quantità di osservazioni mostra che la figura della Terra è molto prossima a quella di un solido di rotazione, si può supporre $A = B$, ed assumere come espressione matematica approssimata della [3] la seguente

$$\frac{GM}{\sigma}\left[1 + \frac{1}{2\sigma^2}\frac{C-A}{M}\left(1 - 3\,\mathrm{sen}^2\,\psi\right)\right] + \frac{1}{2}\,\omega^2\sigma^2\cos^2\psi = \mathrm{cost.} \tag{6}$$

dato che

$$r^2 = X^2 + Y^2 = \sigma^2\cos^2\psi \tag{7}$$

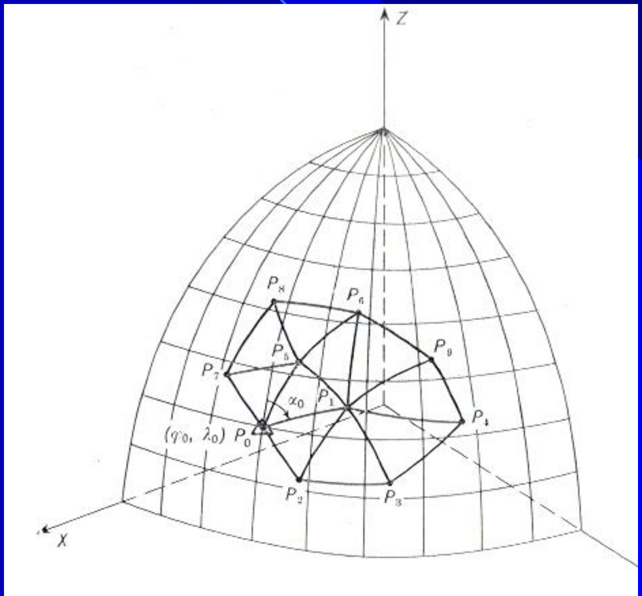
Orientamento dell'Ellissoide



P_0 *punto di emanazione*

Orientamento dell'Ellissoide

Nel punto P_0 (*punto di emanazione*) si determinino con misure astronomiche la latitudine φ_0, la longitudine λ_0 e l'azimut α_0 di una geodetica uscente da P_0 e passante per uno dei punti Pi , e si assumano tali misure come riferentesi all'ellissoide;



Orientamento dell’Ellissoide

in altre parole si faccia coincidere in P_0 la normale ellissoidica con la verticale (normale al geoide), e si assuma nullo il valore dell’ondulazione geoidica N, nel punto P_0 l’ellissoide di rotazione di semiassi a e c risulterà quindi tangente al geoide.

Orientamento dell'Ellissoide

Per orientare completamente l'ellissoide che avrebbe ancora la possibilità di ruotare intorno alla normale, si assuma l'azimut astronomico α_0 coincidente con l'azimut ellissoidico.