

Esercizi per Complementi di Algebra - foglio 3

Esercizio 1. Sia $f : G \rightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi e H un sottogruppo di G . Si dimostri che $f^{-1}(f(H)) = HKer(f)$.

Esercizio 2. Sia $f : G \rightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi. Definiamo

$$\phi : \left\{ \begin{array}{l} \text{sottogruppi di } G \\ \text{contenenti } Ker f \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{sottogruppi di } G' \\ \text{contenuti in } f(G) \end{array} \right\} \text{ con } \phi(H) = f(H).$$

Dimostrare che ϕ è invertibile. Inoltre supponendo che H e K siano due sottogruppi di G contenenti $Ker f$ verificare le seguenti proprietà di ϕ .

1. $H \leq K$ se e solo se $\phi(H) \leq \phi(K)$;
2. se $H \leq K$ allora $|K : H| = |\phi(K) : \phi(H)|$;
3. $H \triangleleft K$ se e solo se $\phi(H) \triangleleft \phi(K)$;
4. se $H \triangleleft K$ allora $K/H \cong \phi(K)/\phi(H)$;
5. H e K sono coniugati in G se e solo se $\phi(H)$ e $\phi(K)$ sono coniugati in $f(G)$.

Esercizio 3. 1. Dimostrare che $\mathbb{D}_6 \cong S_3$.

2. Dimostrare che un gruppo non abeliano di ordine 6 è isomorfo a \mathbb{D}_6 .

Esercizio 4. Sia G il gruppo dei numeri reali rispetto all'addizione e H il sottogruppo di G costituito dai numeri interi. Dimostrare che G/H è isomorfo al gruppo dei numeri complessi di modulo uno rispetto alla moltiplicazione.

Esercizio 5. Per il gruppo “adottato” si cerchi di descrivere il gruppo degli automorfismi interni e provare a vedere se esistono automorfismi non interni del gruppo. Per alcuni gruppi (gruppi simmetrici e gruppi di matrici per esempio) la risposta a questa seconda domanda è difficile, provate magari a formulare un'ipotesi.