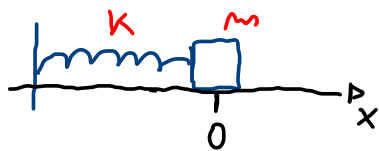


Oscillatore armonico

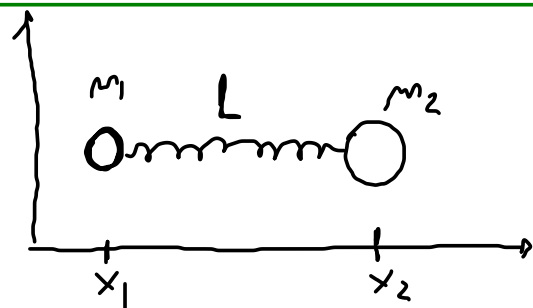


$$F = -kx, \quad V(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad \text{e} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$



L lunghezza a riposo della molla
 $x_2 - x_1$ distanza tra le masse

$$\textcircled{1} \quad m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1 - L)$$

$$\textcircled{2} \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1 - L)$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \quad m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2} (m_1 x_1 + m_2 x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M \frac{d^2 x_M}{dt^2} = 0} \quad \textcircled{3}$$

Definisco $M = m_1 + m_2$ $x_M = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}$ centro di massa, baricentro

Chiamo $\boxed{x_2 - x_1 - L = x}$ divido $\textcircled{1}$ per m_1 e $\textcircled{2}$ per m_2 e faccio $\frac{\textcircled{2}}{m_2} - \frac{\textcircled{1}}{m_1}$

$$\frac{d^2}{dt^2} x_2 - \frac{d^2}{dt^2} x_1 = -\frac{k}{m_2} (x) - \frac{k}{m_1} (x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2} (\underbrace{x_2 - x_1 - L}_x) = -k \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) x \quad \Rightarrow$$

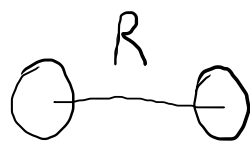
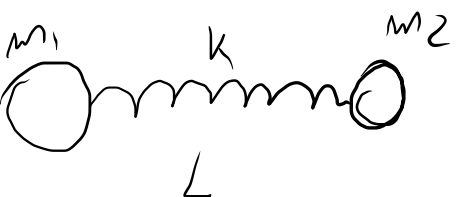
$$\frac{d^2}{dt^2} x = -k \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) x$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

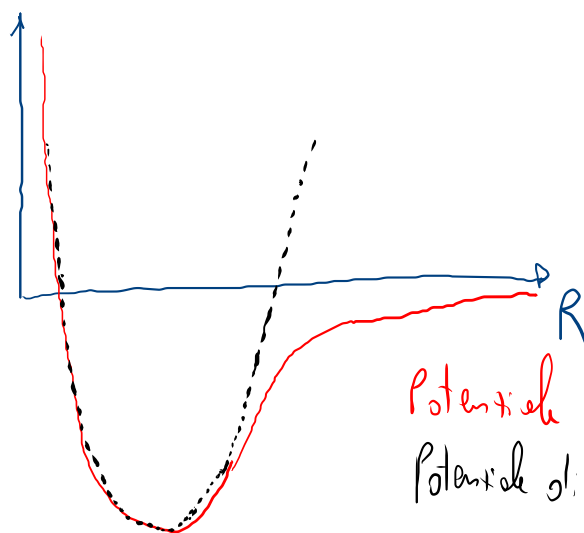
massa ridotta del sistema

$$\frac{d^2}{dt^2} x = -\omega_r^2 x$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$



Molecole biatomiche (O_2 , CO , ...)



Il potenziale può essere approssimato con oscillatore armonico

Potenziale di Lennard-Jones

Potenziale di Morse

Consideriamo particella in un potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Eq di Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi = E \psi$$

$$(H \psi = E \psi)$$

$$\frac{p^2}{2m} \psi + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi = E \psi$$

$$\frac{1}{2m} (p^2 + (m\omega x)^2) \psi = E \psi$$

definiamo i seguenti operatori

$$a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} \left(\mp i p + m \omega x \right)$$

NOTA

$$(a_{\pm})^{\dagger} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} \left(\mp i p + m \omega x \right) \right)^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} \left(\pm i p + m \omega x \right) = a_{\mp}$$

Sono uno il trasposto coniugato dell'altro - non sono hermitiani

Valutiamo il prodotto $a_- a_+$

$$a_- a_+ = \frac{1}{2\hbar m\omega} (ip + m\omega x) (-ip + m\omega x) = \frac{1}{2\hbar m\omega} \left(p^2 + (m\omega x)^2 - im\omega \underbrace{(xp - px)}_{= [x, p] = i\hbar} \right)$$

$$a_- a_+ = \frac{1}{\hbar\omega} H + \frac{1}{2}$$

$$H = \hbar\omega \left(a_- a_+ - \frac{1}{2} \right)$$

mentre:

$$a_+ a_- = \frac{1}{2\hbar m\omega} (-ip + m\omega x) (ip + m\omega x) = \frac{1}{2\hbar m\omega} \left(p^2 + (m\omega x)^2 - im\omega \underbrace{(px - xp)}_{= [p, x] = -i\hbar} \right)$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{1}{2}$$

$$H = \hbar\omega \left(a_+ a_- - \frac{1}{2} \right)$$

Allo stesso modo, si fa così:

$$(a_+ + a_-) = \frac{1}{2\hbar m\omega} (-ip + m\omega x)(ip + m\omega x) = \frac{1}{2\hbar m\omega} \left(p^2 + (m\omega x)^2 + im\omega (xp - px) \right)$$

" $[x, p] = i\hbar$

$$= \frac{1}{\hbar m} H - \frac{1}{2}$$

$$H = \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right)$$

Quindi $[a_+, a_-] = a_+ a_- - a_- a_+ = \frac{1}{\hbar m} H - \frac{1}{2} - \frac{1}{\hbar m} H - \frac{1}{2} = -1$

a_+ e a_- servono a trovare le funzioni d'onda dell'oscillatore armonico, autovalori di H
 Supponiamo di conoscere una soluzione ψ , tale che $H\psi = E\psi$

Se consideriamo ψ , soluzione dell'eq. di Schrödinger $\Rightarrow a_+\psi$ è anche autostato di H , con autovettore $(E + \hbar\omega)$
 dove E è autovettore di ψ

riassumendo: se $\psi: H\psi = E\psi \Rightarrow a_+\psi: H(a_+\psi) = (E + \hbar\omega)(a_+\psi)$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
 H(a_+\psi) &= \hbar\omega \left(a_+a_- + \frac{1}{2} \right) (a_+\psi) = \hbar\omega \left(a_+a_-a_+ + \frac{1}{2}a_+ \right) \psi \\
 &\stackrel{!}{=} \hbar\omega a_+ \left(a_-a_+ + \frac{1}{2} \right) \psi = \hbar\omega a_+ \left(a_+a_- + 1 + \frac{1}{2} \right) \psi \\
 &\quad \quad \quad a_-a_+ = 1 + a_+a_- \\
 &\stackrel{!}{=} a_+ \left[\hbar\omega \left(a_+a_- + \frac{1}{2} + 1 \right) \psi \right] \\
 &\stackrel{!}{=} a_+ \left(H + \hbar\omega \right) \psi = a_+ \underbrace{H\psi}_{E\psi} + a_+ \hbar\omega \psi = \frac{a_+(E + \hbar\omega)\psi}{(E + \hbar\omega)a_+\psi} \\
 &\stackrel{!}{=} \boxed{(E + \hbar\omega)a_+\psi}
 \end{aligned}$$

$$* H = \hbar\omega \left(a_+a_- + \frac{1}{2} \right)$$

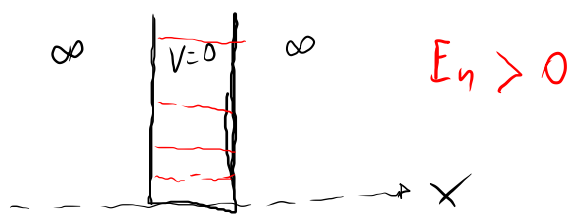
$$H(a_+ \psi) = (E + \hbar \omega) a_+ \psi$$

allo stesso modo;

$$H(a_- \psi) = (E - \hbar \omega) a_- \psi$$

→ a_+ e a_- sono dei costruttori di soluzioni:
 operatori costruttori / distruttori (a_+ / a_-)
 ladder operators
 operatori di spostamento

Proprietà generale ... Per ogni soluzione $\psi(x)$ dell'eq. di Schrödinger non dipendente del tempo, l'autovalore E corrispondente deve essere maggiore del valore minimo di $V(x)$.



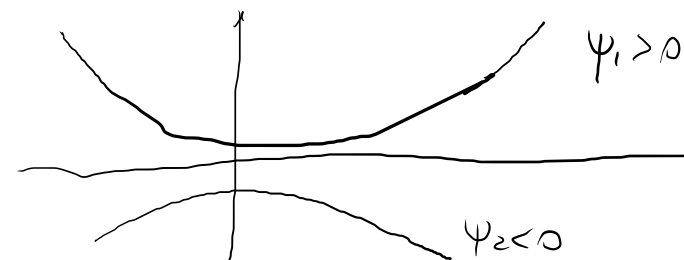
Dimostrazione

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] \psi$$

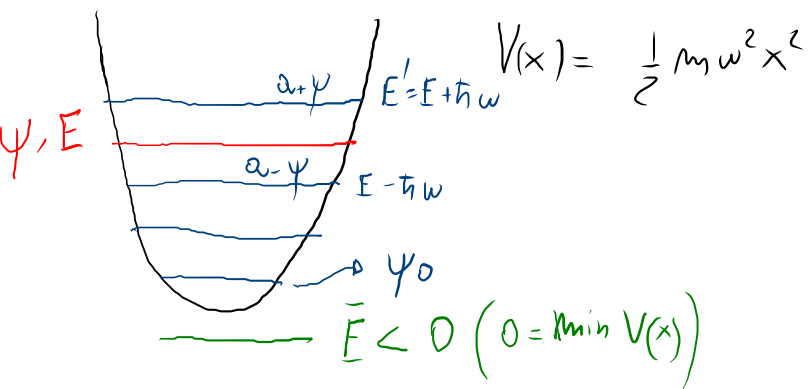
Se, per assurdo, $E < V(x)_{\min} \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \psi$ e ψ hanno sempre lo stesso segno

$\frac{d^2}{dx^2}$ indica la concavità di una curva

$\Rightarrow$ non appena $\psi \neq 0$



$\Rightarrow \psi_i$ non sono integrabili



Dobbiamo imporre che $a-\psi_0$ non deve esistere

$$a-\psi_0 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (ip + m\omega x) \psi_0 = 0$$

$$(ip + m\omega x) \psi_0 = 0 \quad p = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

$$\left(\hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) \psi_0 = 0$$

$$\hbar \frac{d}{dx} \psi_0 + m\omega x \psi_0 = 0$$

$$\frac{d}{dx} \psi_0 = -\frac{m\omega x}{\hbar} \psi_0$$

$$\left\{ \frac{d\psi_0}{\psi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar} x dx \right.$$

$$\ln \psi_0 = -\frac{m\omega}{\hbar} \frac{x^2}{2} + \text{costante}$$

$$\psi_0 = \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{x^2}{2} + \text{cost}\right) = A e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \Rightarrow$$

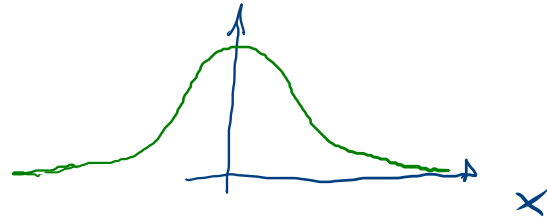
NORMALIZZAZIONE: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0|^2 dx = 1$

$$\psi_0(x) = A e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$\approx$ è una curva gaussiana



L'autovale E_0 , energia di punto zero, deve essere tale che $H\psi_0 = E_0\psi_0$:

$$H\psi_0 = \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right) \psi_0 = \hbar\omega \left(\underbrace{a_+ a_- \psi_0}_{=0 \text{ perché } a_- \psi = 0} + \frac{1}{2} \psi_0 \right) = \frac{1}{2} \hbar\omega \psi_0 \Rightarrow$$

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$$

Partendo da ψ_0 e utilizzando a_+ , sono in grado di costruire tutte le ψ_n .

!! gli operatori a_+ e a_- non conservano la normalizzazione. Quando costruisco una ψ_n , devo anche normalizzarlo.

Esempio troviamo ψ_1

$$\psi_1(x) = A_1 a_+ \psi_0 = \underbrace{\frac{A_1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}}_{\text{costante di normalizzazione}} \underbrace{\left(-\hbar \frac{d}{dx} + m\omega x\right)}_{-i p} \underbrace{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}}_{\psi_0} = \frac{A_1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \cdot \left(\frac{m\omega}{2} x e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} + m\omega x e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}\right)$$

$$= A_1 \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \cdot \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

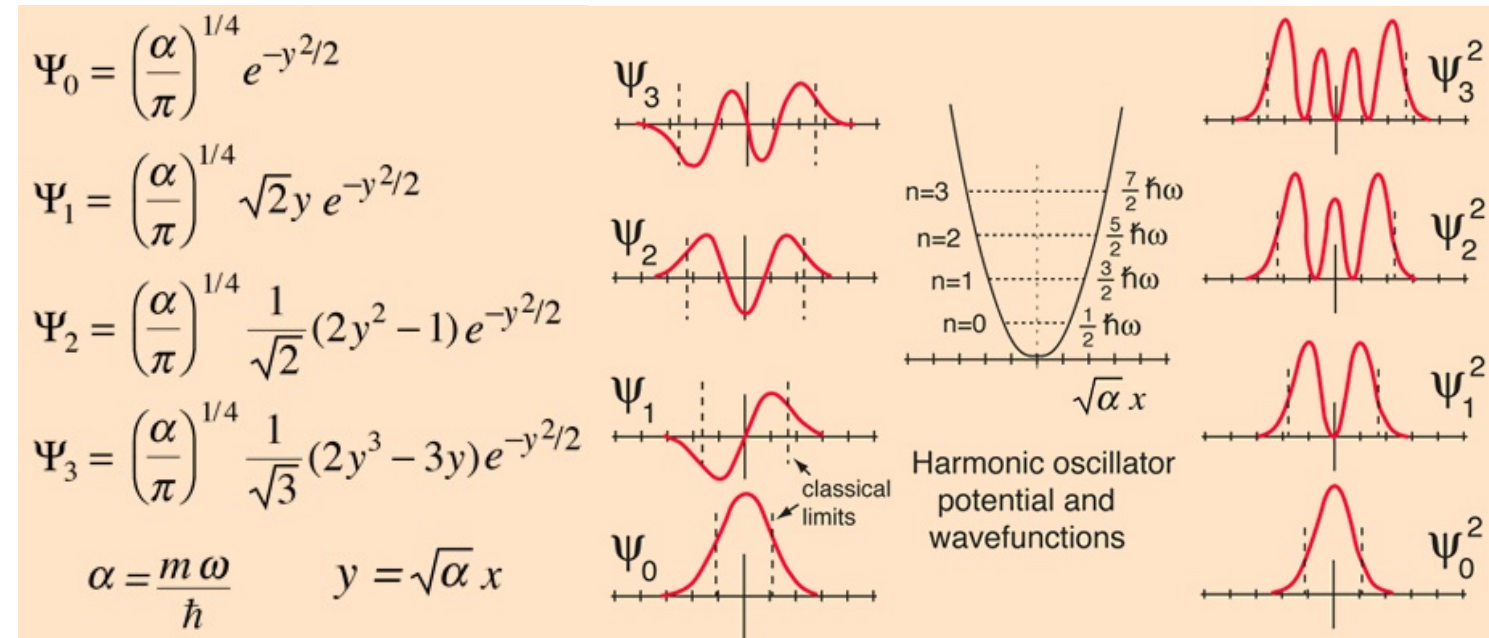
$$\int \psi_1^* \psi_1 dx = A_1^2 \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \frac{2m\omega}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} dx = \frac{\text{non lo facciamo}}{=} A_1^2 \Rightarrow A_1 = 1$$

In generale:

$$a_+ \psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}$$

$$a_- \psi_n = \sqrt{n} \psi_{n-1}$$

$$\boxed{\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a_+)^n \psi_0}$$



$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

con $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$ e $H_n(\xi)$ noti come polinomi di Hermite:

$$H_0 = 1$$

$$H_1 = 2\xi$$

$$H_2 = 4\xi^2 - 2$$

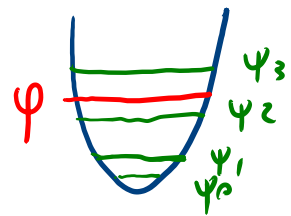
⋮

Le ψ_n si possono trovare anche risolvendo l'eq. di Schrödinger per via analitica.

Si possono scrivere come:

NOTE

1. Siamo sicuri che i ψ_n che abbiamo trovato sono tutti gli autostati di H ?



Supponiamo esista una funzione φ , autostato diverso da tutte le ψ_n

Non poter allora trovare una famiglia φ_n utilizzando a_+ e a_-

In particolare, ci sarà una φ_0 tale che $a_- \varphi_0 = 0$

Ma allora $\Rightarrow \varphi_0 = \psi_0$

2. L'energia è quantizzata anche per l'oscillatore armonico

3. Ho una certa probabilità di trovare la particella oltre i limiti classici

4. $\{\psi_n\}$ è un set ortonormale completo

$$5. \quad Q_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (\mp ip + m\omega x)$$

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (Q_+ + Q_-)$$

$$P = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (Q_+ - Q_-)$$

$\langle X \rangle$ in un certo stato ψ_n

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* X \psi_n dx$$

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* X \psi_n dx$$

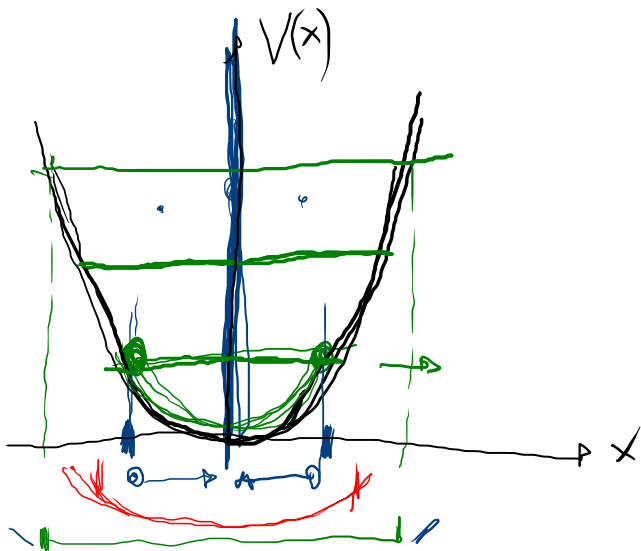
$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* (Q_+ + Q_-) \psi_n dx$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* Q_+ \psi_n dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* Q_- \psi_n dx \right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\sqrt{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi_{n+1} dx + \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi_{n-1} dx \right)$$

$$= 0$$

$$\langle P \rangle = m \frac{d\langle X \rangle}{dt} = 0$$



Esercizio 2.13 Una particella in oscillatore armonico si trova, al tempo $t=0$, in:

$$\psi(x, 0) = A [3\psi_0(x) + 4\psi_1(x)]$$

1. trovare A

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= |A|^2 \langle 3\psi_0(x) + 4\psi_1(x) | 3\psi_0(x) + 4\psi_1(x) \rangle \\ &= |A|^2 (9 + 16) = 25|A|^2 \Rightarrow A = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

2. costruire $\psi(x, t)$ e $|\psi(x, t)|^2$

$$\psi(x, t) = \frac{1}{5} \left(3\psi_0(x) e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}} + 4\psi_1(x) e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} \right)$$

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2} \hbar \omega \\ E_1 &= \frac{3}{2} \hbar \omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\psi(x, t)|^2 &= \frac{1}{25} \left(9(\psi_0(x))^2 + 16(\psi_1(x))^2 + 12\psi_0\psi_1 e^{i\frac{(E_0 - E_1)t}{\hbar}} + 12\psi_0\psi_1 e^{i\frac{(E_1 - E_0)t}{\hbar}} \right) \\ &= \frac{1}{25} \left(9\psi_0^2 + 16\psi_1^2 + 12\psi_0\psi_1 \underbrace{\left(e^{i(\dots)} + e^{-i(\dots)} \right)}_{2\cos\omega t} \right) \end{aligned}$$

3. $\langle x \rangle = ?$

Impossibile come $\frac{1}{25} \int \left(3\psi_0 e^{iE_0 t} + 4\psi_1 e^{i(\dots)} \right) x \left(\dots \right) dx$ in relazione

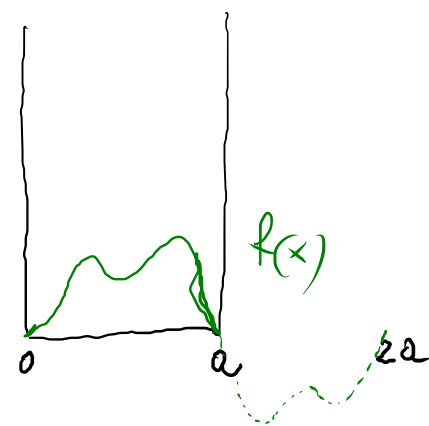
$$\langle x \rangle_n = 0$$

Nel caso di particelle in buca ∞

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

$$c_n = \int_0^a \psi_n^*(x) f(x) dx$$



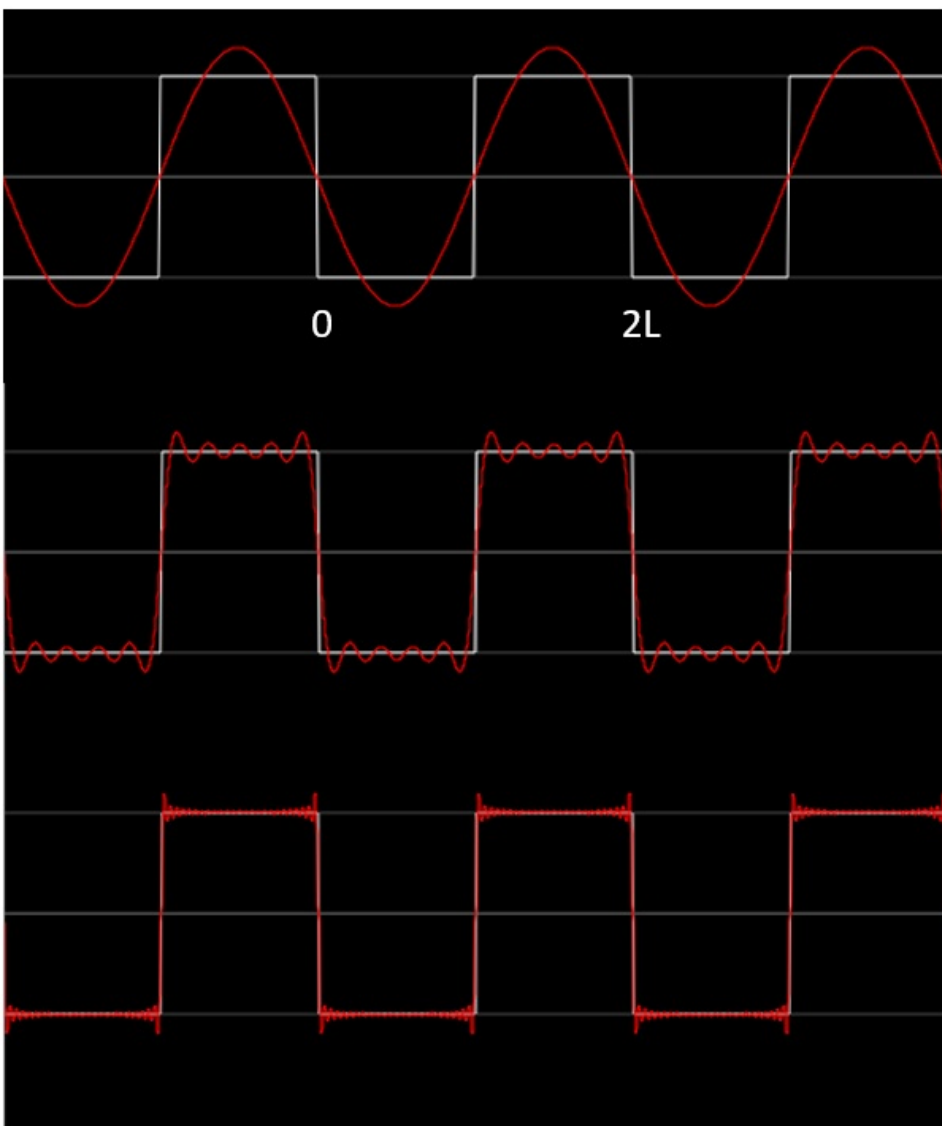
In realtà qualsiasi funzione periodica e integrabile $f(x)$ può essere espressa come una serie di Fourier

esempio se ho una funzione periodica in $[0, 2\pi]$, $f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx)$$

SERIE di FOURIER

(Teorema di Dirichlet)



N=1

N=10

N=50

Invece di usare le funzioni $\sin$, $\cos$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \quad \cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi x / L}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x / L} dx \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Sei il periodo $\bar{e} \quad 2L$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi x / L}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x / L} dx$$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i n \frac{\pi}{L} x}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i n \frac{\pi}{L} x} dx$$

moltiplichiamo per $\frac{\pi}{L} \frac{L}{\pi}$

$$= \frac{\pi}{L} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{L}{\pi} c_n e^{i n \frac{\pi}{L} x}$$

$$= \frac{\pi}{L} \sum_k \frac{L}{\pi} c_n e^{i k x}$$

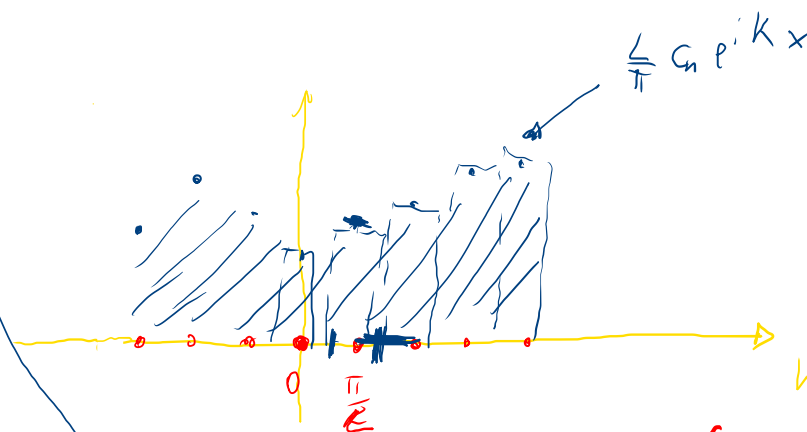
$\Delta k \rightarrow dk$

$$\approx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L}{\pi} c_n e^{i k x} dk = F(k)$$

$$f(x) = \int F(k) e^{i k x} dk$$

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

$$k = 0, \pm \frac{\pi}{L}, \pm 2\frac{\pi}{L}, \dots$$



$$\Delta k = \frac{\pi}{L}$$

Cioè ho definito uno spazio delle frequenze (k) su cui calcolo i "pesi" di ogni frequenza

$$\frac{L}{\pi} c_n = F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i k x} dx$$

Dato una funzione $f(x)$ definita su $[-\infty, +\infty]$, integrabile:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

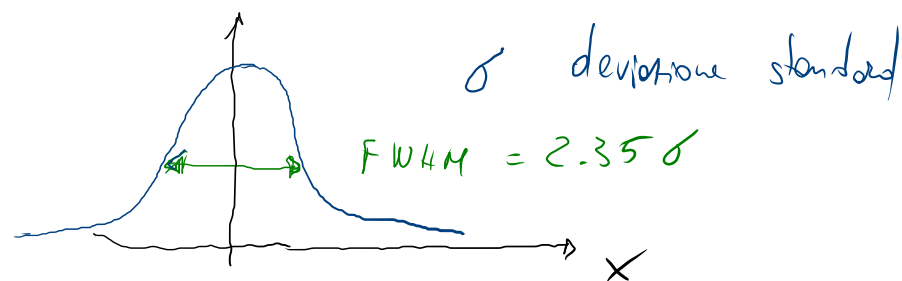
$F(k)$ è la trasformata di Fourier di $f(x)$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$f(x)$ è l'anti-trasformata di Fourier di $F(k)$

Esempio importante:

$$f(x) \propto e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$



$$F(k) \propto \int e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-ikx} dx \propto e^{-\frac{\sigma^2}{2} k^2}$$

cioè la tras. di Fourier
di una gaussiana è una gaussiana

$$\text{con } \sigma_k = \frac{1}{\sigma}$$

PARTICELLA LIBERA nello spazio

$$V(x) = 0$$

Eg di Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E \psi(x)$$

$$K = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = -K^2 \psi(x)$$

La generica soluzione è

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

Possiamo scriverla anche in forme più compatte:

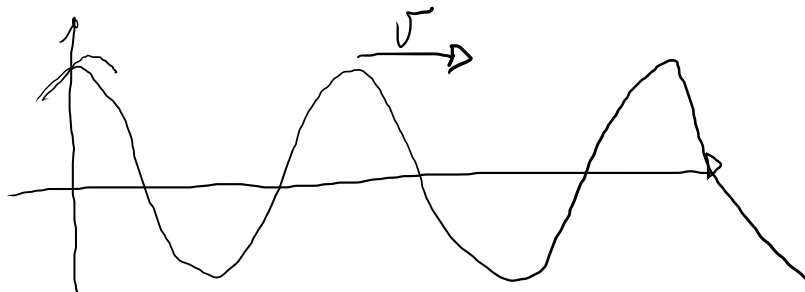
$$\psi(x) = A e^{ikx}$$

$$K = \pm \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi(x, t) = A e^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t\right)}$$

è la stessa eq. della
buca ∞ $\left[\begin{array}{c} V=0 \\ 0 \quad a \end{array} \right]$ $V = \infty$

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)}$$



viaggia verso dx
se $k > 0$

verso dx se $k < 0$

Si sposta con velocità:

$$\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t \text{ costante} \dots \right)$$

$$v = \frac{\hbar k}{2m}$$

velocità di fase

1. !! Una particella di energia

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Rightarrow v = \frac{\hbar k}{m}$$

2.

$\psi(x, t)$ non è normalizzabile

$$\text{Inoltre } |\psi|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} 1 dx \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ non esiste una particella libera di energia E definita

$\psi(x)$ risolve l'eq. di Schrödinger ma non è uno stato accettabile, in quanto non può essere normalizzato

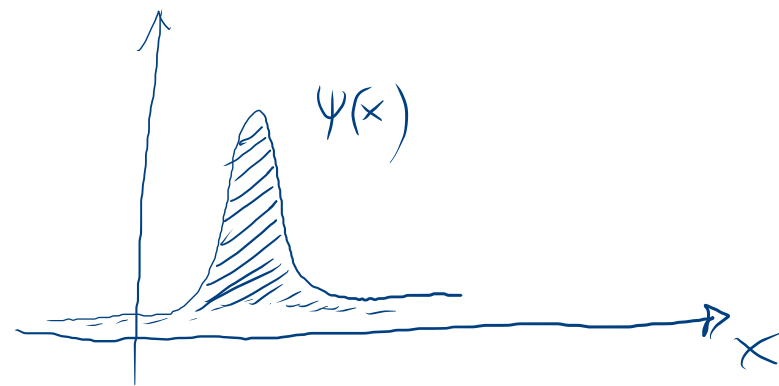
Posso però costruire dei pacchetti di funzioni $\psi(x)$

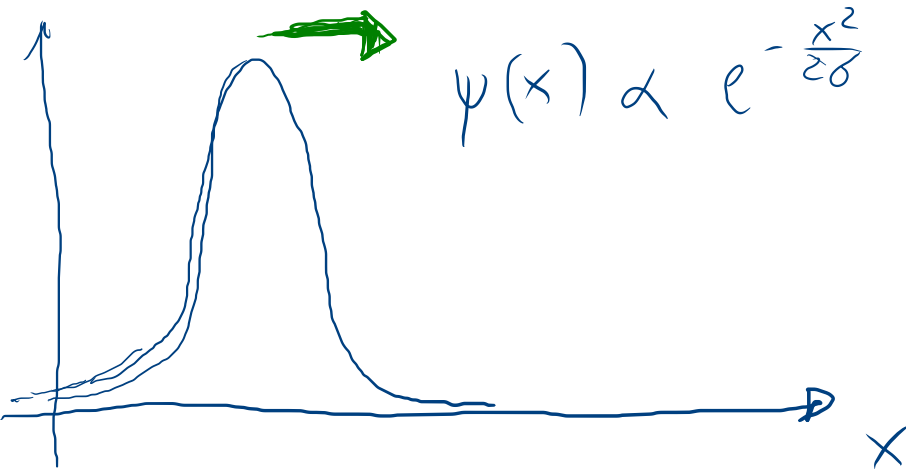
esempio:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{ikx} dk$$

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx$$

Posso prendere un pacchetto di
funzioni $\sim e^{ikx}$
definito per un certo intervallo di k

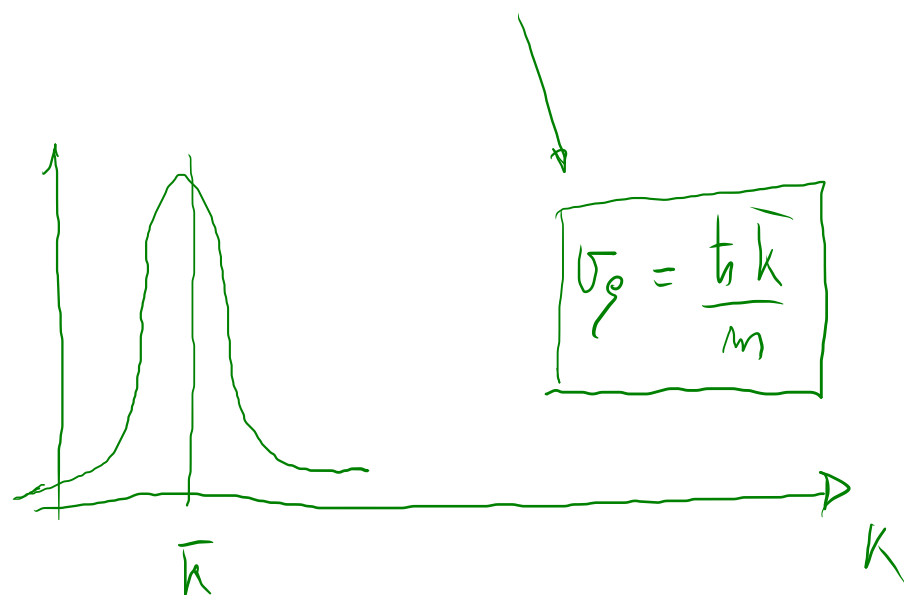


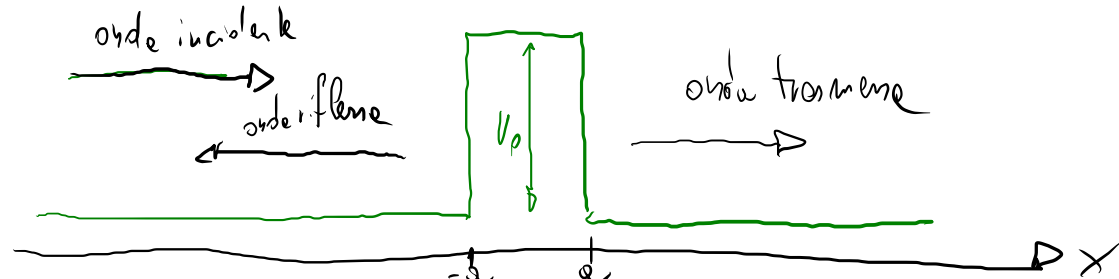


posso esprimere come $\int$ di una serie di funzioni e^{ikx}

$$v_g = \frac{\hbar k}{m}$$

velocità classica di una particella





$$\psi(x,t) = \int \phi(k) e^{ikx} dt$$

Considero ora succede alle singole componenti

$$x < -a$$

$$\psi(x) = e^{ikx} + R e^{-ikx}$$

onda che viaggia
verso dx

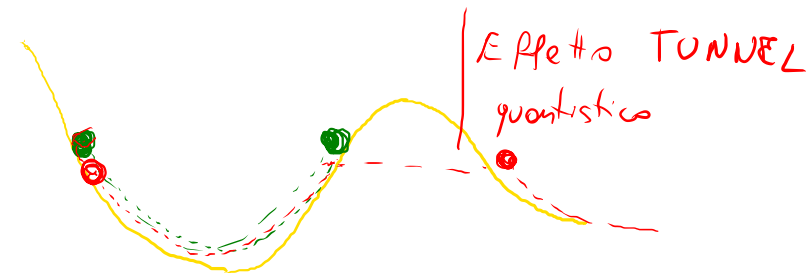
$$x > a$$

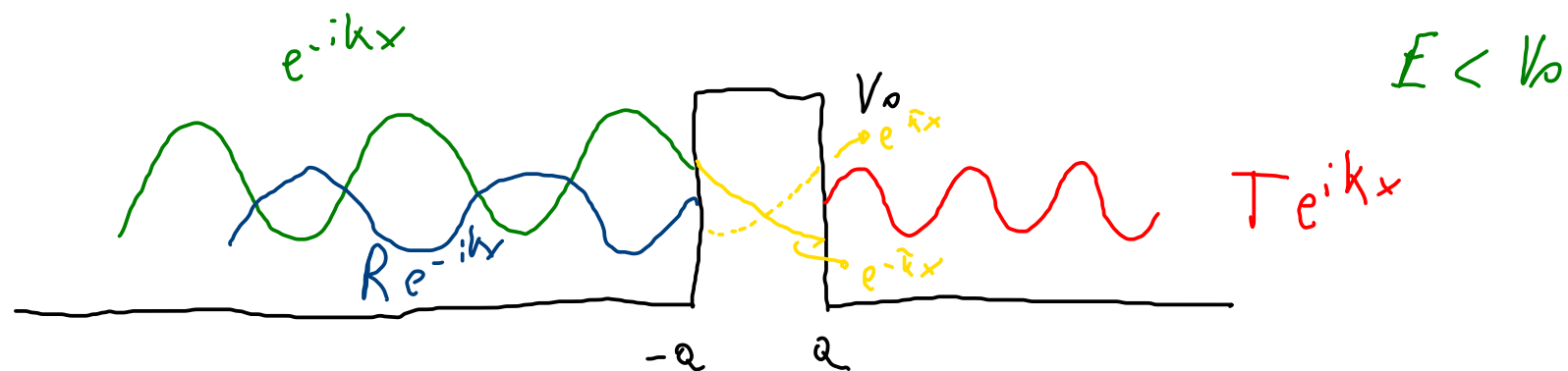
$$\psi(x) = T e^{ikx}$$

E energia della onda
 $E < V_0$

$e^{i(kx - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} t)}$ che costituisce il mio pacchetto

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$





Se $-a < x < a$ l'eq. di Schrödinger: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V_0 \psi(x) = E \psi(x)$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E) \psi(x)$$

$$\tilde{k} = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

$$\hookrightarrow \psi(x) = A e^{\tilde{k}x} + B e^{-\tilde{k}x}$$

Poi per le seguenti condizioni di continuità

1. $\psi(x)$ deve essere continua (in $-a$ e $+a$)

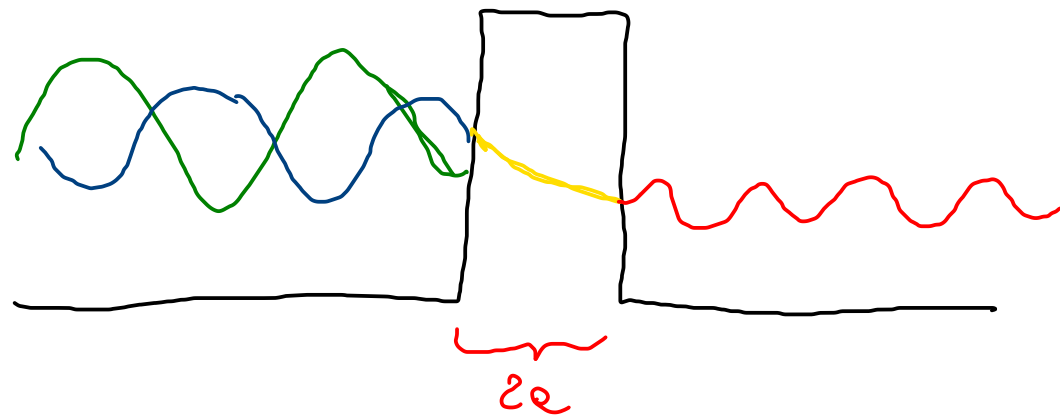
2. $\frac{d}{dx} \psi(x)$ deve essere continua Perché?

$$\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) dx = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) \psi(x) dx$$

$$\left. \frac{d}{dx} \psi \right|_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} = \frac{2m}{\hbar^2} \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} (V(x) - E) \psi(x) dx$$

Integro l'eq di Schrödinger in un intorno di un generico punto x_0

Se $\epsilon \rightarrow 0$ $\int (V(x) - E) \psi \rightarrow 0$
a meno che $V(x) \rightarrow \infty$



$$T e^{ikx}$$

$$|T|^2 \approx e^{-2\tilde{\kappa}2a}$$

Microscopio STM (Scanning Tunneling Microscope)

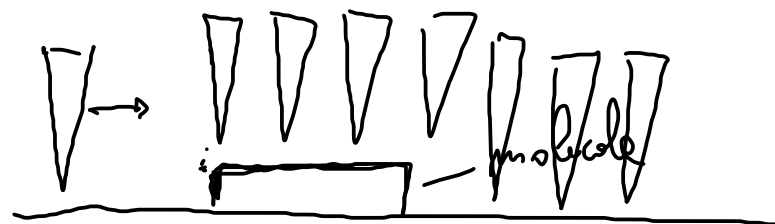


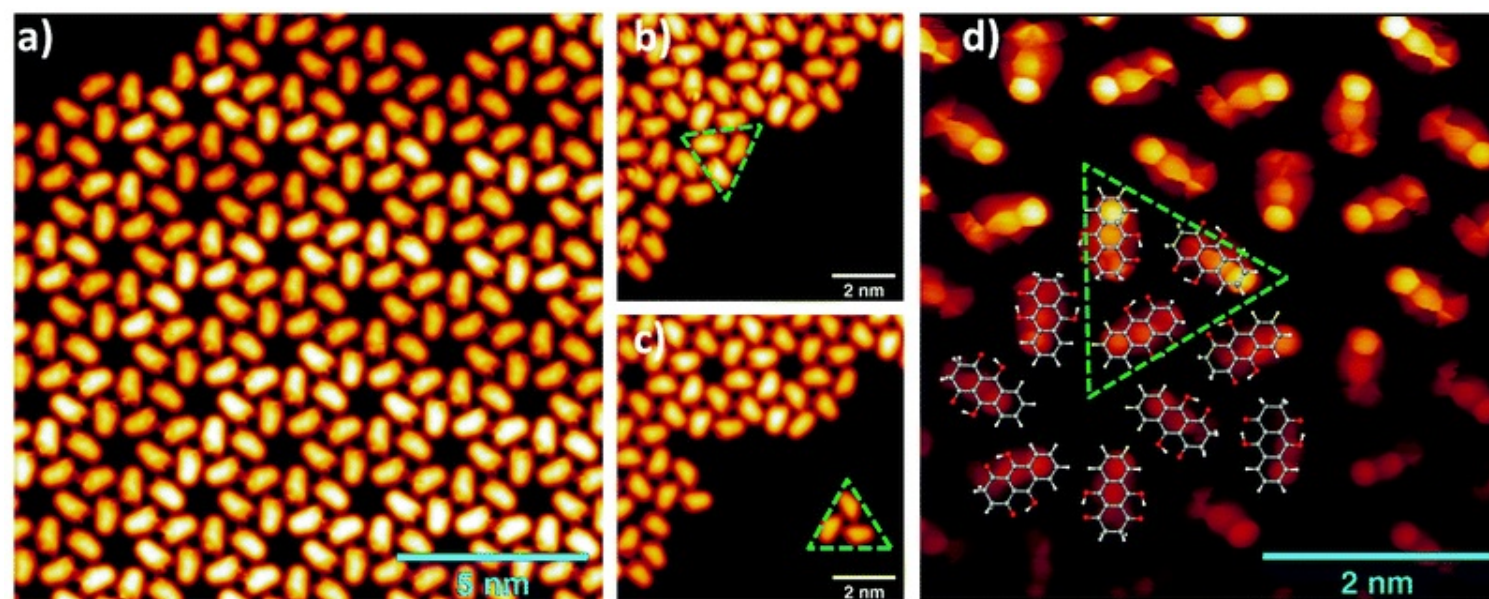
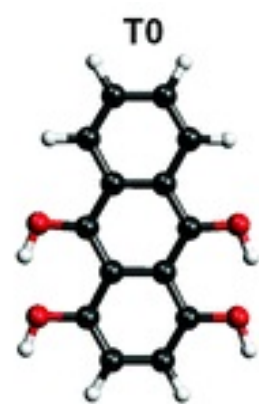
Ho delle corrente I tra punta e campione,

CLASSICAMENTE solo se c'è contatto

QUANTISTICAMENTE posso aver corrente

$$I \propto e^{-2\tilde{\kappa}2a}$$





p , operatore momento
quali sono gli autovettori
autovet. di p ?

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi_p(x) = p \psi_p(x)$$

$$\psi_p(x) = A e^{i \frac{p}{\hbar} x}$$

$$\downarrow$$

$$= A e^{i k x}$$

$$\frac{p}{\hbar} = k$$

!! Non possiamo definire il prodotto interno tra gli autovet. $\sim e^{i k x}$

$$\langle \psi_{p'} | \psi_p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{p'}^* \psi_p dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i p' x} e^{i p x} dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i (p - p') x} dx$$

Dirac ha risolto

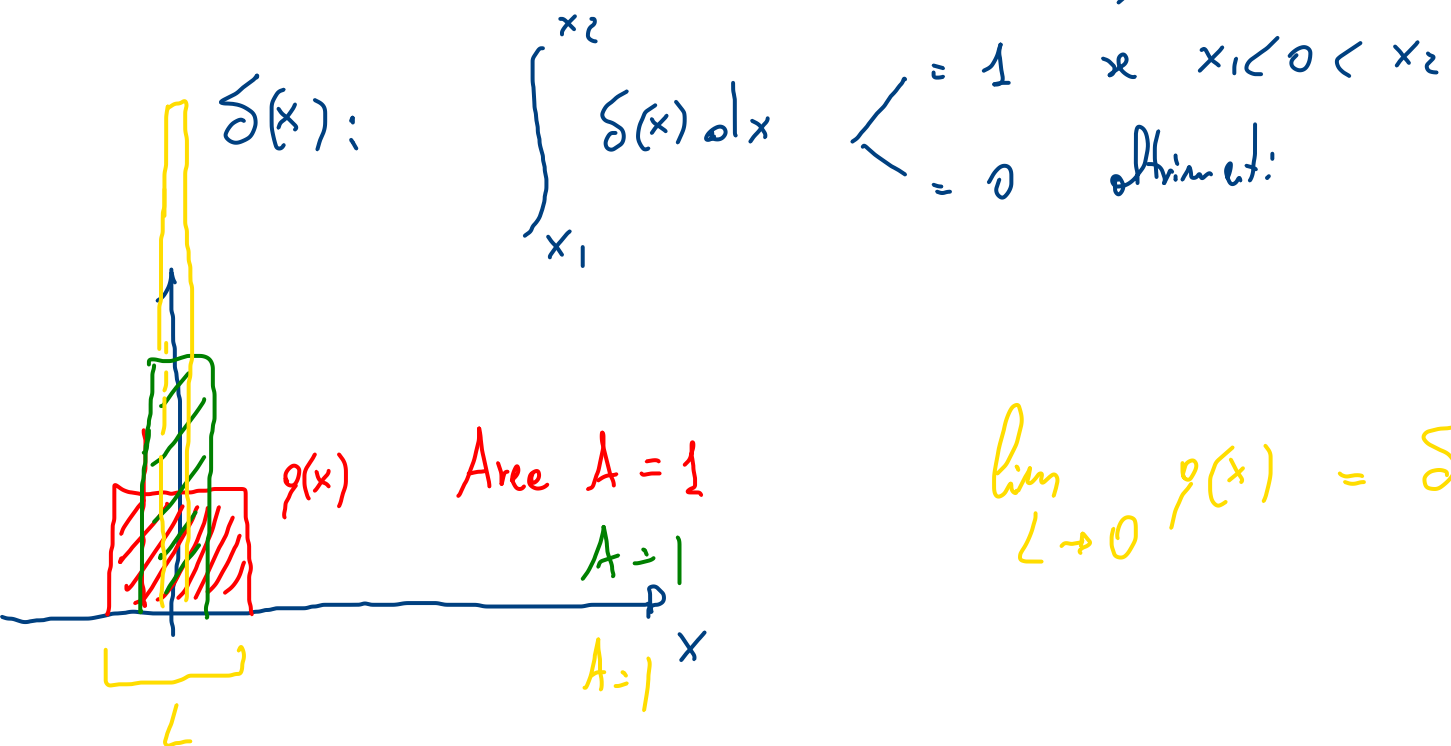


$$= \delta(p - p') \approx \begin{cases} \sim 1 & \text{se } p = p' \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ortogonalità alla Dirac

Funzione delta di Dirac

$\delta(x)$



$$\lim_{L \rightarrow 0} g(x) = \delta(x)$$

$$\int f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

$$= f(0) \int \delta(x) dx = f(0)$$

Consider a function

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(k) e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \Big|_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\boxed{\delta(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dx}$$