Vincoli Ideali (Dinamica)

Vincoli sono realizzati da FORZE (reazioni vincolari)

$$m\bar{a}_i = \bar{F}_i + \bar{\Phi}_i \qquad i=1,\dots,N$$

Il nostro scopo è ottenere n equazioni (indip. dalle reaz. vincolari)

nelle n incognite $q_h(t)$ $h=1,\dots,n$ (funzioni)

Def. Si dice che un sist. olonomo di N pti materiali è soggetto a VINCOLI IDEALI se l'insieme delle reazioni vincolari $\bar{\Phi}_1,\dots,\bar{\Phi}_N$ è caratterizzato da

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \delta\bar{r}_i = 0 \quad \forall\, \delta\bar{r}_i$$

$\leftarrow$ reaz. vincolari devono compiere lavoro (virtuale) nullo.

Siccome $\delta\bar{r}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_h}\delta q_h$, la condiz. diventa

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_h}\cdot\delta q_h = \sum_{h=1}^{n} \delta q_h \left(\sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_h}\right) = 0 \quad \forall\,\delta q_h$$

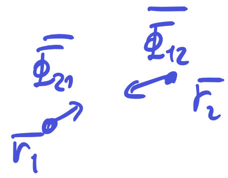
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_h} = 0 \quad h=1,\dots,n \qquad (*)$$

$\longrightarrow$ n equazioni indipendenti

[$a\alpha + b\beta = 0$ $\forall$ scelta di a e b $\Rightarrow \alpha=\beta=0$.]

Esempio tipico di vincoli ideali: pti vincolati a una superficie liscia → qui la condizione (*) è banalm. soddisfatta poiché $\bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = 0 \quad \forall\, i$

ES.) Vincolo di rigidità: realizzato da forze interne che soddisfano la 3ª legge di Newton



$N=2 \qquad \|\bar{r}_1 - \bar{r}_2\|^2 = cost. \qquad (\bullet)$

reaz. vinc.: $\bar{\Phi}_{12}\,,\ \bar{\Phi}_{21}$ t.c. $\bar{\Phi}_{12} = -\bar{\Phi}_{21}$

Deriviamo $(\bullet)$ rispetto a $\frac{\partial}{\partial q_h}$

$$\frac{\partial}{\partial q_h}\Big(\left(\bar{r}_1-\bar{r}_2\right)\cdot\left(\bar{r}_1-\bar{r}_2\right)\Big) = 0$$

$$2\left(\bar{r}_1-\bar{r}_2\right)\cdot\left(\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h} - \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h}\right) = 0$$

Verifichiamo che il vincolo è ideale:

$$\bar{\Phi}_{21}\cdot\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h} + \bar{\Phi}_{12}\cdot\frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h} = \bar{\Phi}_{21}\cdot\left(\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h} - \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h}\right) \propto$$

$$\propto \left(\bar{r}_1-\bar{r}_2\right)\cdot\left(\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h} - \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h}\right) = 0 \quad //$$

ENERGIA CINETICA

Stato del sistema : $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$ $\quad \dot{\bar{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$

Le VARIABILI DINAMICHE sono grandezze fisiche che sono funzioni dello STATO del sistema $\longrightarrow$ a livello matematico esse sono funzioni I : $\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m; t) \longmapsto I(q, \dot{q}, t)$$

Un esempio di tali grandezze è l'ENERGIA CINECA del sistema:

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m}{2} \|\bar{v}_i\|^2 \qquad (A)$$

La dipendenza delle velocità dallo stato del sistema è data da

$$\bar{v}_i(q, \dot{q}, t) = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(\bar{q}, t)) \cdot \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(\bar{q}, t) \qquad i = 1, \dots, N \qquad (*)$$

Se inseriamo $(*)$ in (A) otteniamo $T(q, \dot{q}, t)$:

Prop. Dato un sist. olonomo di N pti materiali a n gradi di lib. e sia l'en. cinetica data da

$$T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \|\bar{v}_i(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)\|^2 \qquad T : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$$

Allora si ha che

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \quad , \text{dove}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{m} a_{hk}(\bar{q}, t) \dot{q}_h \dot{q}_k \qquad a_{hk}(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}$$

$$T_1 = \sum_{h=1}^{m} b_h(\bar{q}, t) \dot{q}_h \qquad b_h(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$$

$$T_0 = \frac{1}{2} c(\bar{q}, t) \qquad c(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$$

dove $a = (a_{hk})$ è una matrice SIMMETRICA

e strettam. DEFINITA POSITIVA

Dim. $T(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \| \bar{v}_i(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)\|^2$ $\quad \bar{v}_i = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(\bar{q},t)\cdot \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(\bar{q},t)$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\sum_{h,k=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_h\dot{q}_k + 2\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\right]$$

$$a_{hk}(\bar{q},t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}$$ $\leftarrow$ manifestamente simmetrica, cioè $a_{kh} = a_{hk}$

Una matrice a è strettam. def. positiva se $\forall$ vettore $\bar{u}\neq 0$ vale

$$(a\bar{u})\cdot\bar{u} > 0 \xrightarrow[\text{in componenti}]{} \sum_m \left(\sum_\ell a_{m\ell}u_\ell\right)u_m = \sum_{m\ell} a_{m\ell}u_m u_\ell > 0$$

Verifichiamolo per la nostra a:

$$\sum_{m\ell=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\ell}\right)u_m u_\ell \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i \|\bar{\mu}_i\|^2 > 0 .$$

def. $\bar{\mu}_i \equiv \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}u_h$ $\quad \begin{pmatrix}\bar{\mu}_1\\ \vdots \\ \bar{\mu}_N\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ se $\bar{u}\neq 0$. //

La matrice a è detta MATRICE CINETICA

- Siccome a è strettamente def. positiva $\rightsquigarrow$ $\det a > 0$

$\Rightarrow$ a è INVERTIBILE

- Se $\bar{r}_i$ è una funz. delle sole q_h (INDIP. da t) $\forall i$ allora $T_1 = 0$ e $T_0 = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ T è una FORMA QUADRATICA OMOGENEA (def. pos.) nelle $\dot{q}_h$.

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}(\bar{q},t)\,\dot{q}_h \dot{q}_k$$

ES) Pto materiale in coord. cilindriche

$$F(\bar{q}): \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = \zeta \end{cases} \qquad q_1\ q_2\ q_3 \leftrightarrow r\ \varphi\ \zeta$$

$$\bar{v}(\bar{q},\dot{\bar{q}}): \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{z} = \dot{\zeta} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{1}{2}m\Big[(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + \dot{\zeta}^2\Big] =$$

$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

$$= \frac{1}{2}m\Big[\dot{r}^2\underline{\cos^2\varphi} + r^2\dot{\varphi}^2\underline{\sin^2\varphi} - \cancel{2r\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi} + \dot{r}^2\underline{\sin^2\varphi} + r^2\dot{\varphi}^2\underline{\cos^2\varphi} + \cancel{2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi} + \dot{\zeta}^2\Big]$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\zeta}^2\right] =$$

$a(\bar{q},t)$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{r} & \dot{\varphi} & \dot{\zeta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & & \\ & mr^2 & \\ & & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{r}\\ \dot{\varphi}\\ \dot{\zeta}\end{pmatrix}$$

ES) coordinate POLARI.

FORZE GENERALIZZATE

Prop. Sia $\bar{F}_i$ la forza (attiva) sull'i-esimo pto materiale.
Allora il "lavoro virtuale" dato da $\sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i$, corrispondente agli spostam. virtuali $\delta\bar{r}_i = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \delta q_h$, è espresso in termini di coord libere come

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i = \sum_{h=1}^{m} Q_h \, \delta q_h \quad \text{con} \quad Q_h = \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}$$

$$h = 1, \dots, m$$

$Q_1, \dots, Q_n$ sono dette FORZE GENERALIZZATE

In particolare, per forze $\bar{F}_i$ puramente posizionali in cui $\exists \, \hat{V} = \hat{V}(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, t)$ t.c. $\bar{F}_i = -\bar{\nabla}_i \hat{V}$ si ha

$$Q_h(\bar{q}, t) = -\frac{\partial V(\bar{q}, t)}{\partial q_h} \qquad h = 1, \dots, m \qquad (\#)$$

dove $V(\bar{q}, t) \equiv \hat{V}(\bar{r}_1(\bar{q}, t), \dots, \bar{r}_N(\bar{q}, t), t)$

Dim (#): $$Q_h = \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = -\sum_{i=1}^{N} \bar{\nabla}_i \hat{V} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} =$$

$$\bar{\nabla}_i \hat{V} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = \frac{\partial \hat{V}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_h} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_h} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_h}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial q_h} V(\bar{q}, t) \quad //$$