SISTEMA MECCANICO a N PTI MATERIALI VINCOLATI (riassunto)

- Consideriamo r VINCOLI $f^{(s)}(\bar{w}, t) = 0 \quad s = 1, \dots, r \quad (*)$ $\quad \bar{w} = \begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \vdots \\ \bar{r}_N \end{pmatrix}$

  che le posizioni degli N pti devono soddisfare.

- le eq. $(*)$ individuano una varietà $Q \subset \mathbb{R}^{3N}$ detta SP. DELLE CONFIG.

  che può essere parametrizzata da $n = 3N - r$ coord. libere $q_1, \dots, q_n$:

$$\bar{w} = \bar{w}(q, t)$$

- Le funz. $\bar{w}(q,t)$ sono tali che $f^{(s)}(\bar{w}(q,t), t) = 0 \quad \forall q$.

- Ad ogni valore di q corrisponde una config. del sist. di N pti materiali.

- L'evoluzione temporale delle config. del sistema è data dalle n funz.

$$q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$$

  L'immagine di tale funz. è una curva in Q (traiettoria)

- Il vettore tg alla traiettoria al tempo t_0 è dato da

$$\frac{dq(t_0)}{dt} = (\dot{q}_1(t_0), \dots, \dot{q}_n(t_0))$$

  Diverse traiettorie possibili passanti per $P \in Q$ al tempo t_0 danno diversi vettori $\in T_P Q$. Le coord. di $T_P Q$ sono chiamate $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$

- Lo stato del sistema è determinato da $2n$ numeri:

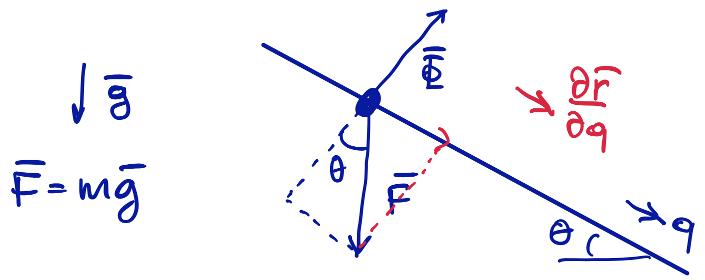
$$(\underbrace{q_1, \dots, q_n}_{\substack{\text{posizione} \\ \text{di } P \text{ in } Q}} ; \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n}_{\substack{\text{vett. tg a } Q \\ \text{in } P}}) \rightarrow \text{coord. sul fibrato tangente } TQ$$

  che è detto SPAZIO DEGLI STATI

$\rightarrow$ Ci interessa trovare delle eq. diff. con incognite $q_h(t)$ $h = 1, \dots, n$, che determinano il moto del sistema in Q, e conseguentem. in TQ.

EQUAZIONI DI LAGRANGE

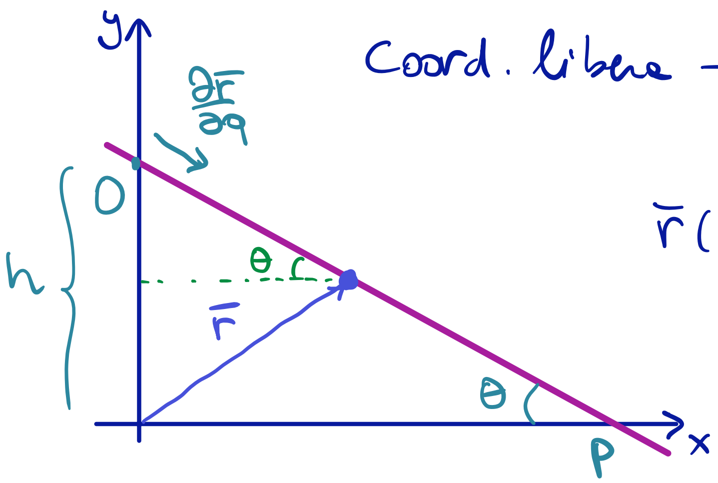
Es. Piano inclinato



$\bar{F}$ forza attiva

$\bar{\Phi}$ reaz. vincolare

Applichiamo quanto visto finora : $m = 1$



Coord. libera $\rightarrow$ q = distanza da $O = (0, h)$

$$\bar{r}(q) \rightarrow \begin{cases} x = q\cos\theta \\ y = h - q\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Quindi:

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} q\cos\theta \\ h - q\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \bar{r}}{\partial q} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix}$$

Inoltre:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

Proiettiamo l'eq. di Newton lungo lo sp. tg.

$$0 = (\bar{F} + \bar{\Phi} - m\bar{a}) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q} = (F_x - ma_x, F_y - ma_y) \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix}$$

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{q}\cos\theta \\ -\ddot{q}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix}$$

$$= -m\ddot{q}\cos^2\theta + mg\,\mathrm{sen}\,\theta - m\ddot{q}\,\mathrm{sen}^2\theta = m(g\,\mathrm{sen}\,\theta - \ddot{q})$$

Eq. di Lagrange – caso generico.

Ora faremo lo stesso per un generico sistema olonomo di N pti vincolati a n gradi di libertà.

Le posizioni degli N pti sono $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N$, le loro masse $m_1, \dots, m_N$.

Sui pti agiscono le forze attive $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N$ e le reaz. vincolari $\bar{\Phi}_1, \dots, \bar{\Phi}_N$.

Le eq. di Newton sono

ignote

$$m \bar{a}_i = \bar{F}_i + \bar{\Phi}_i$$

← eq. diff. per le funzioni $\bar{r}(t)$

Consideriamo vincoli ideali, cioè t.c.

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = 0 \qquad \forall h = 1, \dots, n$$

e con descrizione parametrica data dalle funz. $\bar{r}_i(q, t)$ $i=1, \dots, N$

Proiettiamo le eq. di Newton sulle direzioni tg a Q (*) Vedi ultima pagina

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \bar{a}_i - \bar{F}_i - \cancel{\bar{\Phi}_i} \right) \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = 0 \qquad h = 1, \dots, n$$

n equazioni diff. nelle n incognite $q_h(t)$ $h=1,\dots,n$

Consideriamo le funzioni

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q, t) \qquad \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(q, t)$$

e componiamole con il moto $q(t)$:

$$\bar{r}_i(t) = \bar{r}_i(q(t), t) \qquad \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(q(t), t)$$

ricordando che $\bar{v}_i(t) = \frac{d \bar{r}_i(t)}{dt}$. Guardiamo ora le quantità che appaiono nelle eq. di Newton:

- $\bar{a}_i = \frac{d \bar{v}_i}{dt} \Rightarrow m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = m_i \frac{d \bar{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}$

$$= m_i \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \right) - m_i \bar{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}$$

- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(q(t), t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_k \partial q_h}(q(t), t)\, \dot{q}_k(t) + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t \partial q_h}(q(t), t) =$

$$= \frac{\partial}{\partial q_h} \Bigg(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}}_{\bar{v}_i} \Bigg) \Bigg|_{\text{valutata sul moto}} = \frac{\partial}{\partial q_h} \bar{v}_i (q(t), \dot{q}(t), t)$$

- $m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = m_i \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \right) - m_i \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_h}$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i(q, t)}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \bar{r}_i(q, t)}{\partial t} \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} \delta_{lh} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}$$

$$\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_h} = \begin{cases} 1 & \text{se } l = h \\ 0 & \text{se } l \neq h \end{cases} = \delta_{lh}$$

- $$m \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = m_i \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_h}\right) - m_i \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_h}$$
$$= m_i \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \bar{v}_i^2\right) - \frac{1}{2} m_i \frac{\partial}{\partial q_h} \bar{v}_i^2$$

- $$\sum_{i=1}^{N} m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}\bar{v}_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_h}\bar{v}_i^2\right) =$$
$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \bar{v}_i^2}_{T(q,\dot{q},t)}\Big)\right]}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}(q(t),\dot{q}(t),t)}\Bigg|_{\text{valutato sul moto}} - \frac{\partial}{\partial q_h}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \bar{v}_i^2}_{T}\Big)$$

[T è una funz. : $\mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$
$(q,\dot{q},t) \mapsto T(q,\dot{q},t)$]

- $$-\sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = -Q_h$$ (forze generalizzate)

$$\Downarrow$$

Prop. Dato il sistema come sopra. Allora le funzioni $q_h(t)$ soddisfano le EQUAZIONI DI LAGRANGE

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}(\bar{q}(t),\dot{\bar{q}}(t),t) - \frac{\partial T}{\partial q_h}(\bar{q}(t),\dot{\bar{q}}(t),t) = Q_h(\bar{q}(t),\dot{\bar{q}}(t),t)}$$

Corollario Se le forze attive sono forze derivanti da un'en. potenziale $V(\bar{q},t)$ allora le eq. di Lagrange diventano

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{q}(t),\dot{\bar{q}}(t),t) - \frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar{q}(t),\dot{\bar{q}}(t),t) = 0}$$

dove $L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) = T(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) - V(\bar{q},t)$

$\uparrow$ LAGRANGIANA

$L : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(q_1,\dots,q_n,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n,t) \mapsto L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)$

Dim. $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}(T-V) = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}$

Inoltre $Q_h = -\frac{\partial V}{\partial q_h} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_h} = \frac{\partial T}{\partial q_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \frac{\partial T}{\partial q_h} + Q_h$ //

ES) Osc. armonico $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = T - V$

Eq. Lagr. $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$ $\quad \frac{\partial L}{\partial q} = -m\omega^2 q$

$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t),\dot{q}(t)) - \frac{\partial L}{\partial q}(q(t),\dot{q}(t)) = \frac{d}{dt}(m\dot{q}(t)) + m\omega^2 q(t) = m\ddot{q}(t) + m\omega^2 q(t)$

Formalismo Lagrangiano può essere applicato anche a problemi che esulano la meccanica; in questi casi, generalm. L non ha la forma $T-V$. Se invece $L=T-V$ allora il sistema è detto SISTEMA LAGRANGIANO NATURALE.

Eq. di LAGRANGE sono EQ. DIFF. del 2° ord nelle incognite $q_1(t), \dots, q_n(t)$.

Verifichiamolo:

$$T(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}(\bar{q},t)\,\dot{q}_h\dot{q}_k}_{T_2} + \underbrace{\sum_{h=1}^{n} b_h(\bar{q},t)\,\dot{q}_h}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2}c(\bar{q},t)}_{T_0}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \frac{1}{2}\sum_{h,k} a_{hk}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}(\dot{q}_h\dot{q}_k) + \sum_h b_h \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial \dot{q}_l}}_{=\delta_{hl}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_h\sum_k a_{hk}(\delta_{hl}\dot{q}_k + \dot{q}_h\delta_{kl}) + \sum_h b_h\delta_{hl}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n} a_{hl}\dot{q}_h + b_l$$

$k \to h$: cambio nome all'indice

$a_{hl} = a_{lh}$ perché la matrice cinetica è SIMMETRICA

$$= \sum_{h=1}^{n} a_{lh}(\bar{q},t)\,\dot{q}_h + b_l(\bar{q},t)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{h=1}^{n} a_{lh}(\bar{q}(t),t)\,\dot{q}_h(t) + b_l(\bar{q}(t),t)\right]$$

$$= \sum_{h,m}\frac{\partial a_{lh}}{\partial q_m}\dot{q}_m\dot{q}_h + \boxed{\sum_h a_{lh}\ddot{q}_h} + \sum_k\frac{\partial b_l}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_h\frac{\partial a_{lh}}{\partial t}\dot{q}_h + \frac{\partial b_l}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_l} = \frac{1}{2}\sum_{hk} \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_l}\dot q_h \dot q_k + \sum_k \frac{\partial b_k}{\partial q_l}\dot q_k + \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial q_l}$$

Eq. di Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l$ può essere scritte

$$\sum_h a_{lh}\ddot q_h + g_l(\bar q, \dot{\bar q}, t) = Q_l$$

$$\sum_{h=1}^n a_{lh}\ddot q_h = Q_l - g_l$$

$$\mathcal{Q}\ddot{\bar q} = \bar Q - \bar g$$

$(\ddot x = f(x, \dot x, t))$

matrice cinetica è INVERTIBILE

$$\ddot{\bar q} = \mathcal{Q}^{-1}(\bar Q - \bar g) = \bar f(\bar q, \dot{\bar q}, t) \qquad (*)$$

↳ Eq. diff. del 2° ord. in forma NORMALE

<u>Prop.</u> Dato un sist. olonomo di N pti materiali a n gradi di libertà, con assegnato dato iniziale $(\bar r_i^{(0)}, \bar v_i^{(0)})$ compatibili con il vincolo, allora le eq. di Lagrange $(*)$ determinano UNIVOCAMENTE le $\bar r_i(t)$ $i=1,\dots,N$ e ci permettono di trovare le reaz. vincolari $\bar\Phi_i$.

Dim. $\bar r_i = \bar r_i(\bar q, t)$ $\quad \bar v_i = \bar v_i(\bar q, \dot{\bar q}, t)$

Dati $\bar r_i^{(0)}$ e $\bar v_i^{(0)}$ compatibili col vincolo →

→ $q_h^{(0)}$, $\dot q_h^{(0)}$

Teor. di es. e unic.

Eq. $(*)$ eq. 2° ord. in $q_h(t)$ → $\bar q(t)$ sono determinate univocam. da $\bar q^{(0)}$, $\dot{\bar q}^{(0)}$

→ $\underline{\bar r_i(t) = \bar r_i(\bar q(t), t)}$ ⇒ $\bar a_i = \frac{d^2\bar r_i}{dt^2}$ ⇒ $\bar\Phi_i = m\bar a_i - \bar F_i$ //

(*) Proiezione di un vettore $\bar{V}$ su base $\frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h}$ di T_pQ

In $\mathbb{R}^{3N}$ c'è sp. $\perp$ a T_pQ che è di dim $r = 3N - n$.
Prendiamo base $\bar{u}_a^{\perp}$ $a = 1, \dots, r$. Allora $\bar{V} \in \mathbb{R}^{3N}$ può essere espresso nel seguente modo:

$$\bar{V} = \sum_{k=1}^{n} V_k \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_k} + \sum_{a=1}^{r} V_a^{\perp} \bar{u}_a^{\perp}$$

qte sono, propriamente parlando, le proiezioni di $\bar{V}$ sulla base $\frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h}$.

Vediamo cosa otteniamo facendo il prodotto scalare con $\frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h}$:

$$\bar{V} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_k} V_k}_{} + 0$$

Questa NON è in generale la componente h-esima del vettore $\bar{V}$ rispetto alla base $\frac{\partial \bar{w}}{\partial q_k}$ (lo sarebbe se $\frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h}$ fosse una base orto-normale, cosa che per generiche funz. $\bar{w}(\bar{q}, t)$ non avviene).

Tuttavia $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_k} V_k = 0 \quad \forall h = 1, \dots, n \iff V_h = 0 \quad \forall h = 1, \dots, n$

Qto avviene perché la metrica $\mathcal{W}_{hk} \equiv \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_k}$ è invertibile.

↳ Infatti W_{hk} è STRETTAM. DEF. POS. $\Rightarrow$ $\det W \neq 0$ prodi >0.

$$\sum_{h,k} u_h W_{hk} u_k = \left\| \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h} u_h \right\|^2 > 0 \quad \forall \bar{u} \neq 0$$

Siccome $\frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h}$ sono vett. lin. indip. , ogni loro comb. lineare è $\neq 0$ (se $\bar{u} \neq 0$)

Extra: Moltiplicatori di Lagrange

Prendiamo la seguente Lagrangiana

$$\frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\right) + q_3\left(q_1^2+q_2^2-R^2\right) = L(\dot{q}_1,\dot{q}_2; q_1,q_2,q_3)$$

- Qta Lagrangiana NON dipende da $\dot{q}_3$
- Eq. Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial L}{\partial q_1} = m\ddot{q}_1 - 2q_3q_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}-\frac{\partial L}{\partial q_2} = m\ddot{q}_2 - 2q_3q_2 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}-\frac{\partial L}{\partial q_3} = 0 \underbrace{-\left(q_1^2+q_2^2-R^2\right) = 0}$$

Qta è una REAZIONE VINCOLARE: dice che (q_1,q_2) vive su un cerchio di raggio R

q_3 è chiamata MOLTIPLICATORE di LAGRANGE

S^1: $q_1 = R\cos\varphi$ $\quad \dot{q}_1 = -R\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad \ddot{q}_1 = -R\ddot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi - R\dot{\varphi}^2\cos\varphi$

$q_2 = R\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad \dot{q}_2 = R\dot{\varphi}\cos\varphi \quad \ddot{q}_2 = R\ddot{\varphi}\cos\varphi - R\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$

L_{S^1}: $\frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2$

eq. Lag.: $\ddot{\varphi} = 0 \rightsquigarrow \dot{\varphi} = \omega$ cost.

$$\longrightarrow \begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -R\omega^2\cos\varphi &= -\omega^2 q_1 \\ \ddot{q}_2 &= -R\omega^2\,\mathrm{sen}\,\varphi &= -\omega^2 q_2 \end{aligned}$$

↑
REAZIONI VINCOLARI

Eq. di Lag. in coord. Polari

$$q_1 = r\cos\varphi \qquad \dot q_1 = \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi \operatorname{sen}\varphi \qquad \ddot q_1 = \ddot r\cos\varphi - 2\dot r\dot\varphi\operatorname{sen}\varphi - r\ddot\varphi\operatorname{sen}\varphi - r\dot\varphi^2\cos\varphi$$

$$q_2 = r\operatorname{sen}\varphi \qquad \dot q_2 = \dot r\operatorname{sen}\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi \qquad \ddot q_2 = \ddot r\operatorname{sen}\varphi + 2\dot r\dot\varphi\cos\varphi + r\ddot\varphi\cos\varphi - r\dot\varphi^2\operatorname{sen}\varphi$$

$$\mathcal{L}_{\substack{\text{PART.}\\ \text{LIB.}}} = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right)$$

$$\begin{cases} \ddot r - r\dot\varphi^2 = 0 \\ 2r\dot r\dot\varphi + r^2\ddot\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cos\varphi\,\ddot q_1 + \operatorname{sen}\varphi\,\ddot q_2 &= \ddot r - r\dot\varphi^2 \\ -\operatorname{sen}\varphi\,\ddot q_1 + \cos\varphi\,\ddot q_2 &= 2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi \end{aligned} \quad \underset{\text{equiv.}}{\longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} \ddot q_1 &= 0 \\ \ddot q_2 &= 0 \end{aligned}$$