

Geometria 3 - Curve e superfici 2024/2025

Foglio di esercizi 2

Prof. Valentina Beorchia

19 marzo 2025

1. Si consideri in \mathbb{R}^2 il seguente luogo di punti:

$$C := \{(x, y) \mid x^2 - y^3 = 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Si dimostri che se $(x_0, y_0) \in C$, allora esiste $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 = t_0^3$ e $y_0 = t_0^2$.

2. Si consideri la cubica nodata

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4).$$

Si dimostri che α è iniettiva in $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

3. Si consideri l'elica circolare

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt),$$

con $a > 0$ e $b > 0$ due costanti reali fissate.

- (a) Si trovi una parametrizzazione per lunghezza d'arco.
- (b) Si calcoli il versore normale e la curvatura di α in un generico punto.
- (c) Si determini il vettore binormale in un generico punto.

4. Si consideri la curva piana

$$\alpha; \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = (t, t^3).$$

Si trovi, se possibile, una parametrizzazione per lunghezza d'arco.

5. Si consideri la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\alpha(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right).$$

- (a) Si verifichi che α è parametrizzata per lunghezza d'arco e biregolare.
- (b) Si calcoli il triedro di Frenet, curvatura e torsione in un punto generico.
- (c) Si dimostri che $\alpha(\mathbb{R})$ è una circonferenza. Si trovi, inoltre, il piano in cui giace, il raggio e il centro.