UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE
Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Regime sinusoidale

Elettrotecnica

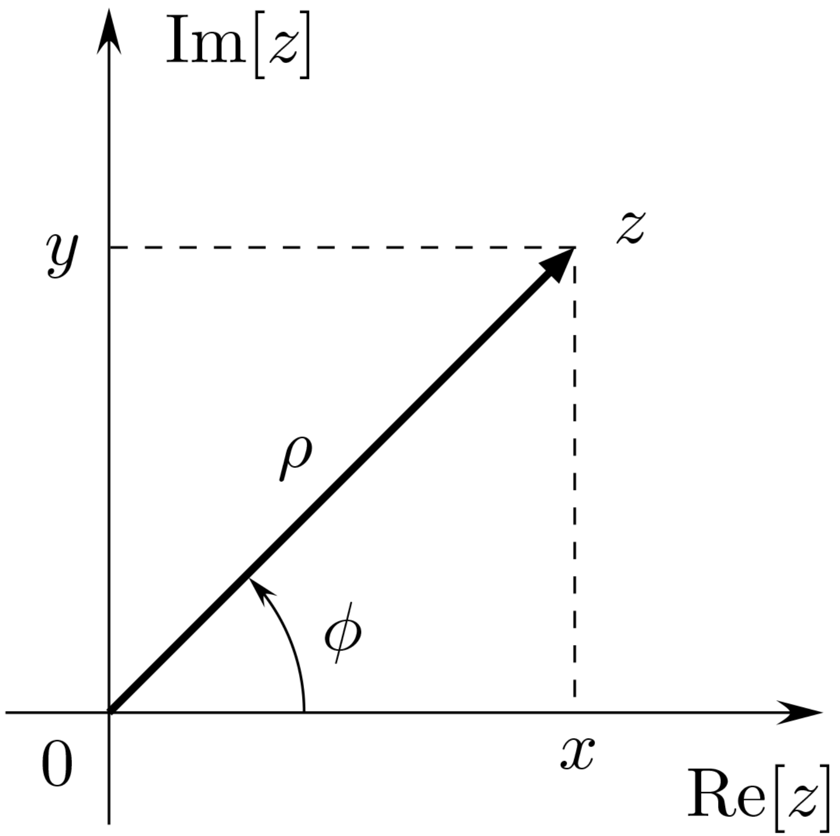
A.A. 2024 - 2025

Prof. Alessandro Massi Pavan – apavan@units.it

REGIME SINUSOIDALE

- Quando in un circuito la risposta transitoria si esaurisce e tutte le grandezze diventano di tipo sinusoidale e isofrequenziali, il circuito è detto in <u>regime sinusoidale</u>
- Applicazioni sia per l'<u>**energia**</u> (sinusoidi con frequenza f = 50 Hz) che per l'<u>**informazione**</u> (segnali che possono essere scomposti in sinusoidi di frequenze diverse)

NUMERI COMPLESSI



FORMA CARTESIANA

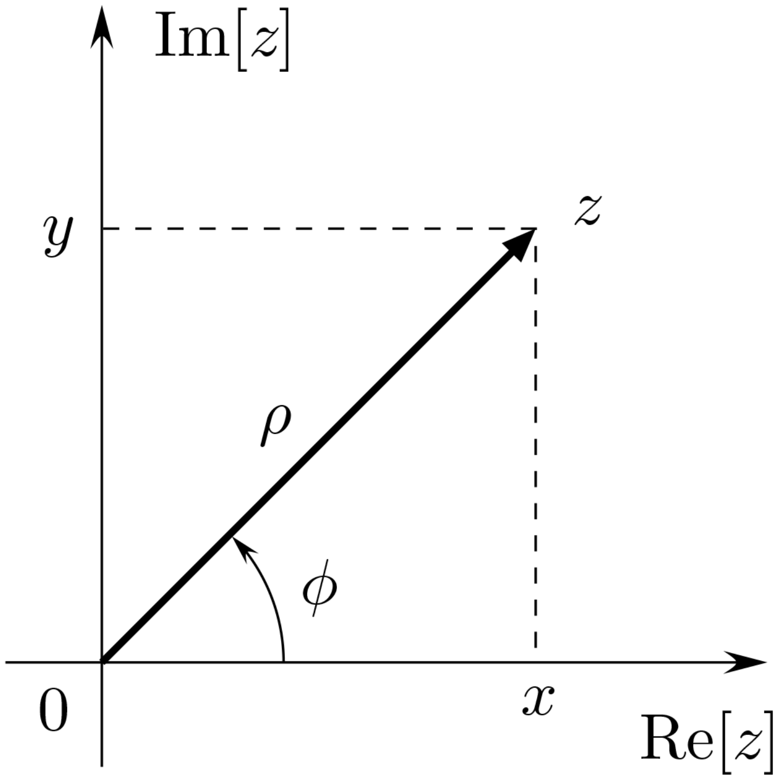
$$\boxed{z = x + jy}$$

- x è la parte reale
- y è la parte immaginaria

$$j = \sqrt{-1}$$

R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014

NUMERI COMPLESSI



FORMA POLARE

$$\boxed{z = \rho\angle\Phi}$$

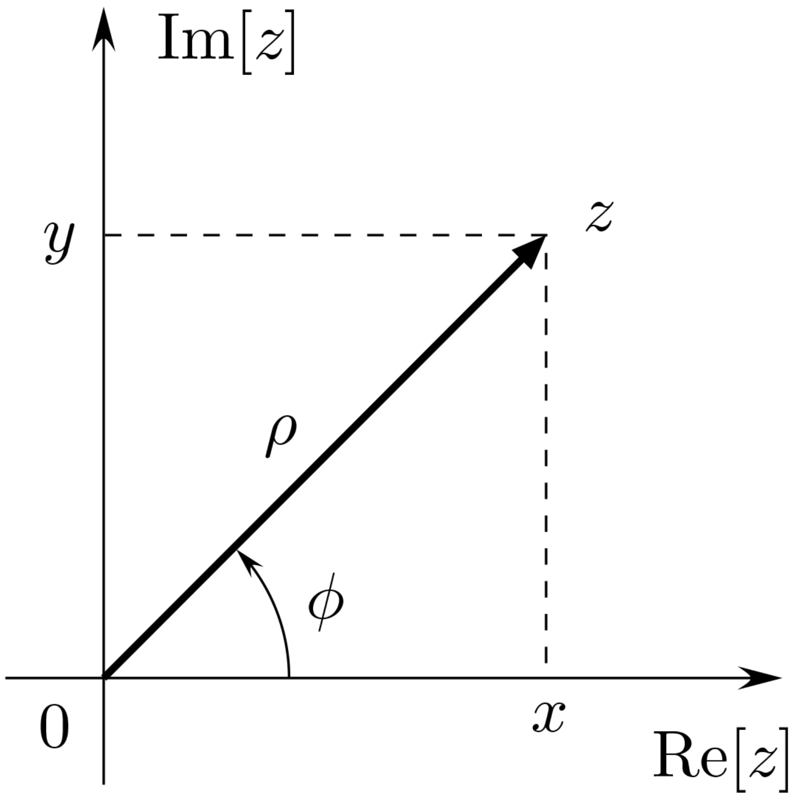
modulo $\rho = |z|$

fase $\phi = \arg z$

NUMERI COMPLESSI

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \emptyset = tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \end{cases}$$



R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014

NUMERI COMPLESSI

FORMULA DI EULERO

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$$

FORMA ESPONENZIALE

$$\boxed{z = \rho e^{j\phi}}$$

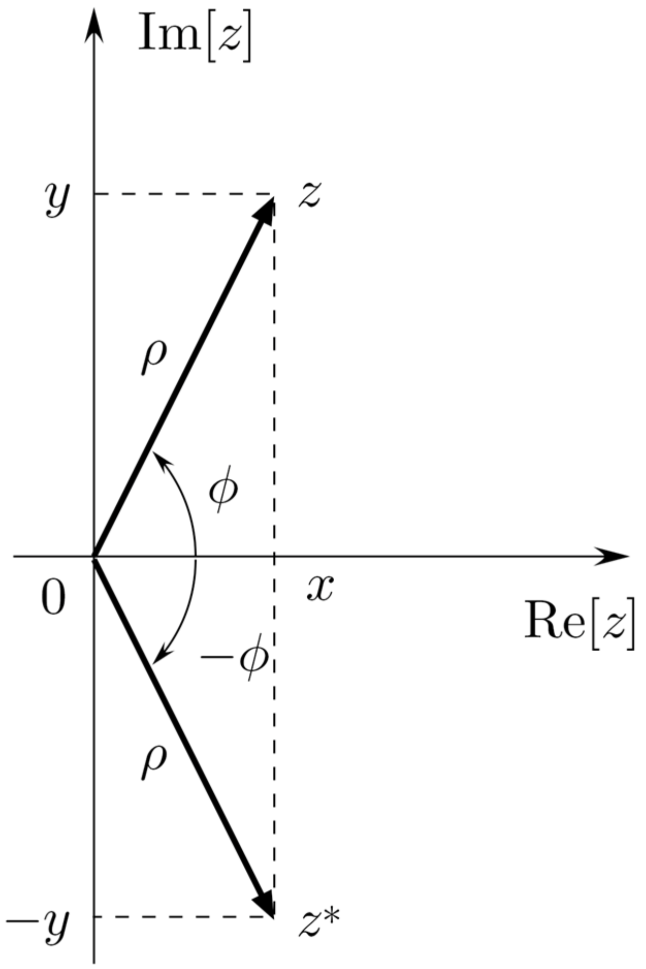
OPERAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI

$$(a + jb) \pm (c + jd) = (a \pm c) + j(b \pm d)$$

$$(\rho_1 e^{j\phi_1})(\rho_2 e^{j\phi_2}) = \rho_1 \rho_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$\frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_2 e^{j\phi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\rho e^{j\phi}} = \frac{1}{\rho} e^{-j\phi}$$

CONIUGATO DI UN NUMERO COMPLESSO



$$z = x + jy \Rightarrow z^* = x - jy$$

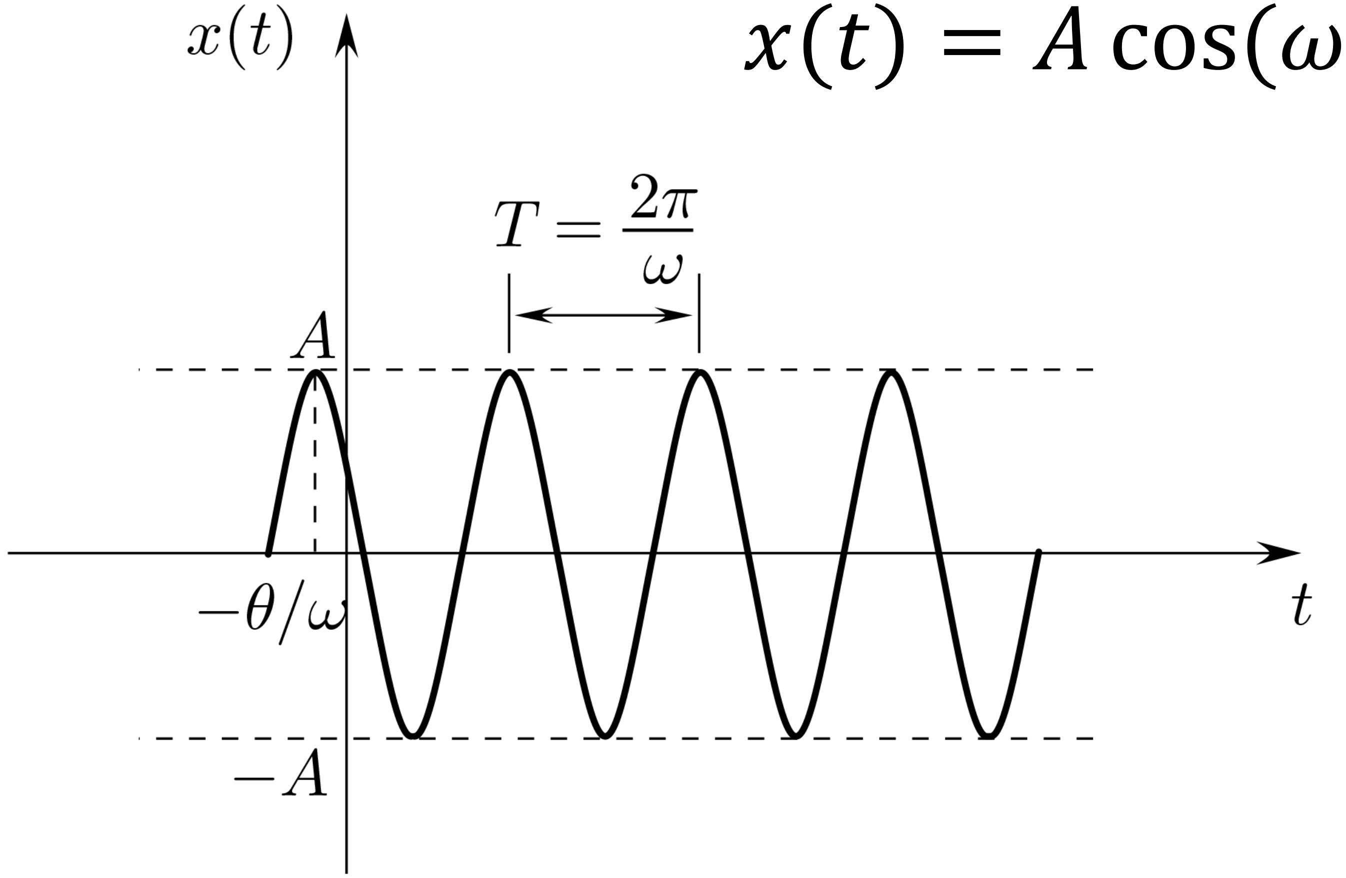
R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014

SINUSOIDI

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

$$T = \frac{1}{f}$$

$$\omega = 2\pi f$$



- A – ampiezza
- **ω** – pulsazione [rad/s]
- **θ** – fase iniziale [°]
- T – periodo [s]
- f – frequenza [Hz]

R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014

PROPRIETA' DELLE FUNZIONI SINUSOIDALI

Valore medio:
$$A_{medio} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{T/2} A \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} A = 0,636A$$

Valore efficace (rms):
$$A_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T} A^2\, sin^2\, \omega t dt} = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0,707A$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}}}$$

CORRENTI E TENSIONI SINUSOIDALI

- Gran parte delle tensioni e delle correnti utilizzate negli impianti elettrici sono del tipo sinusoidale
- Si tratta di funzioni <u>alternate</u> (si invertono ogni semiperiodo) e <u>periodiche</u> (x (t) = x (t+T) per ogni t)
- In Europa ...

$$f = 50\,Hz$$

$$\omega = 314\,rad/s$$

FASORI

Fissata la frequenza, una sinusoide è rappresentata da due soli numeri reali!!!

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta) \Leftrightarrow (A, \theta)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\bar{X} = Ae^{j\theta}}$$

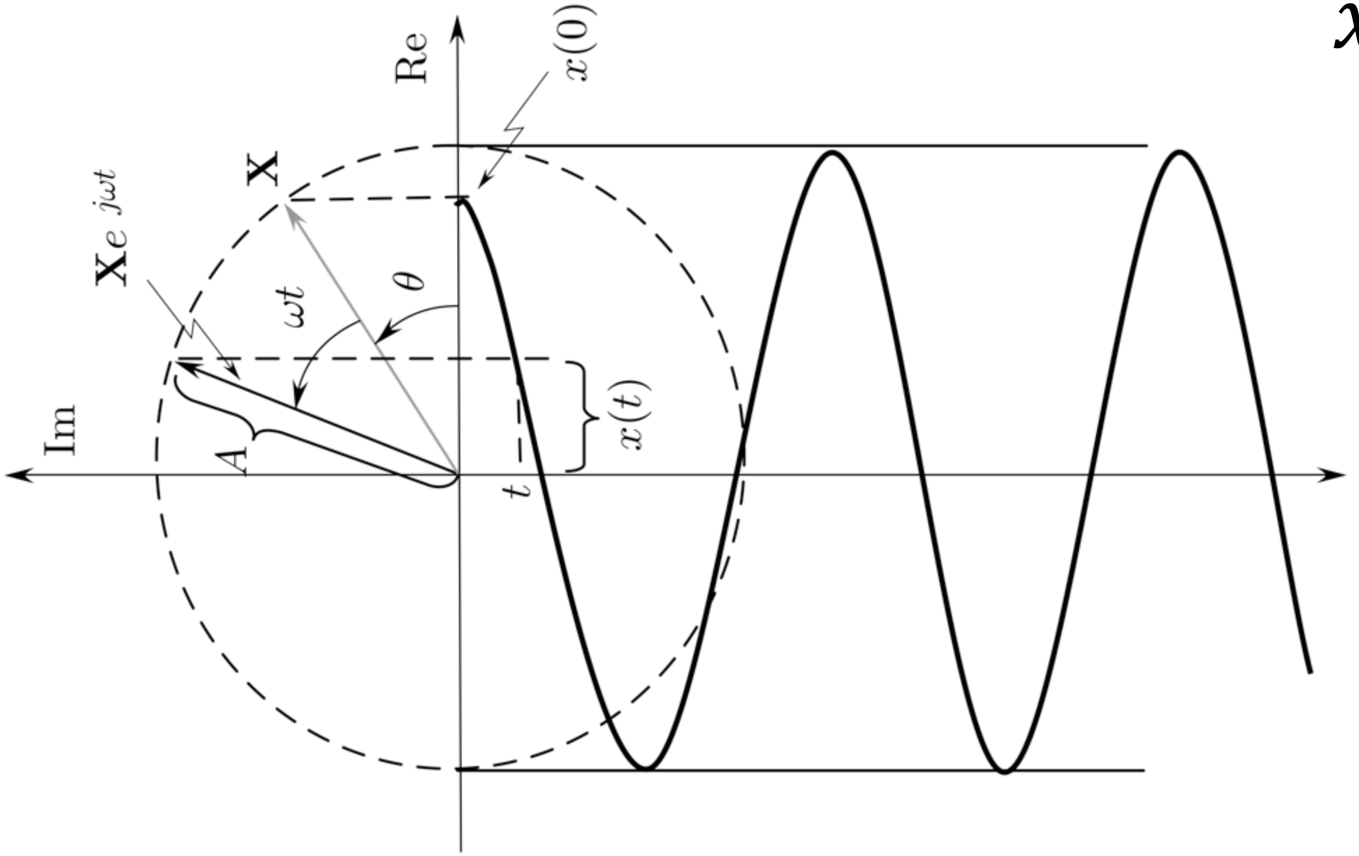
Data una sinusoide di ampiezza A e fase θ, chiamiamo <u>fasore</u> associato alla sinusoide il numero complesso di modulo A e argomento θ

Il fasore è un numero complesso espresso in forma esponenziale

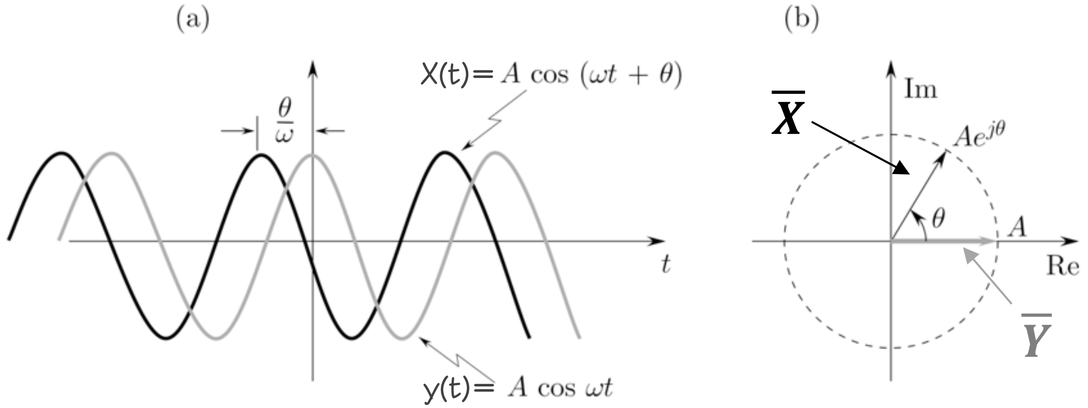
Science and spirituality finally meet.

La funzione x(t) si può rappresentare come un vettore rotante (il fasore $\overline{X}$) che ruota nel piano complesso con velocità angolare **ω**

$$x(t) = Re\left[\,\overline{X}e^{j\omega t}\,\right]$$

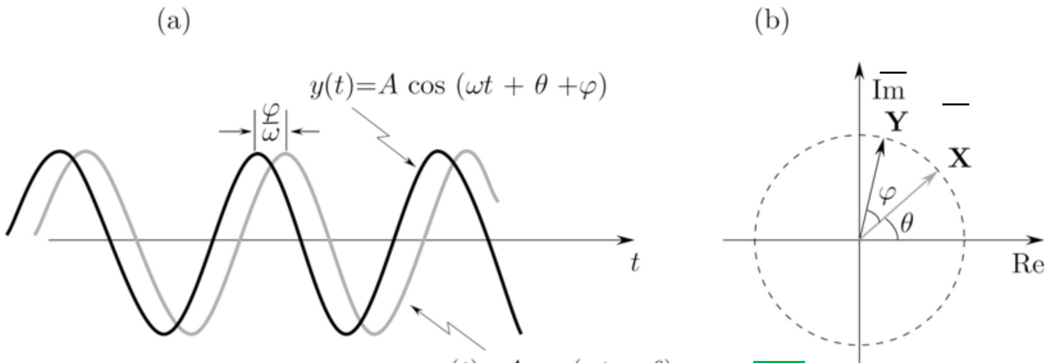


R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014



$\overline{\boldsymbol{Y}}$ è in anticipo rispetto a $\overline{\boldsymbol{X}}$ $(\theta, \varphi > 0)$

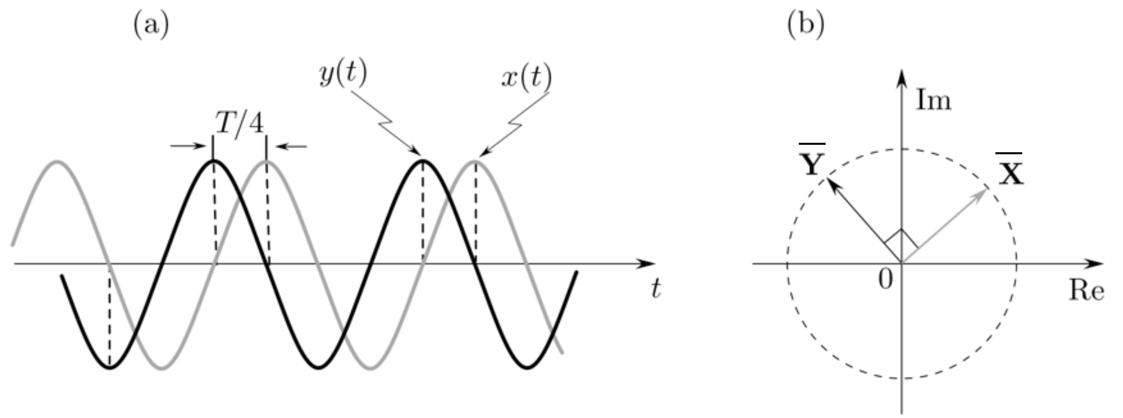
$\overline{\boldsymbol{X}}$ è in ritardo rispetto a $\overline{\boldsymbol{Y}}$ $(\theta, \varphi > 0)$



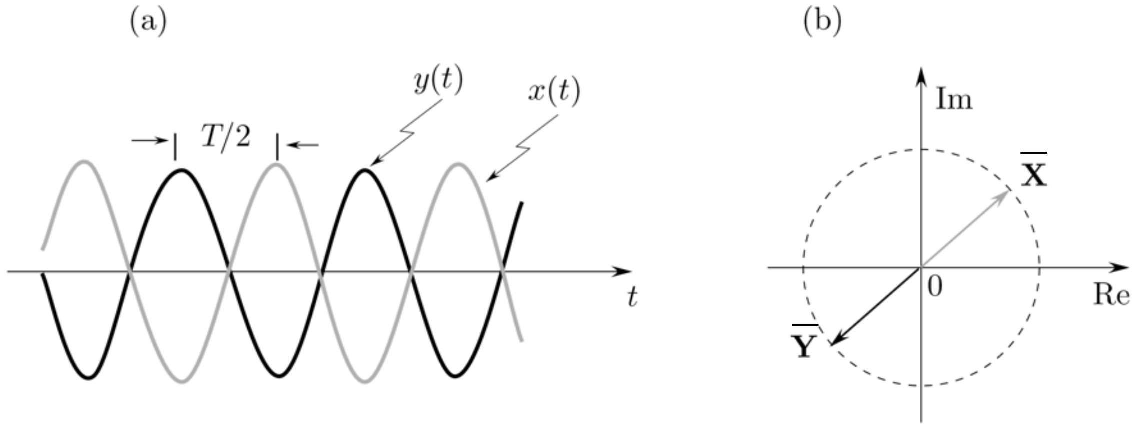
$\overline{\boldsymbol{X}}$ e $\overline{\boldsymbol{Y}}$ sono in fase se $(\varphi = 0)$

R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014

$\overline{X}$ e $\overline{Y}$ sono in quadratura $(\varphi = \pi/2)$



$\overline{X}$ e $\overline{Y}$ sono in opposizione $(\varphi = \pi)$



R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014

PROPRIETA' DEI FASORI

Linearità: date due sinusoidi isofrequenziali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ a cui sono associati i fasori $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ e dati due numeri λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

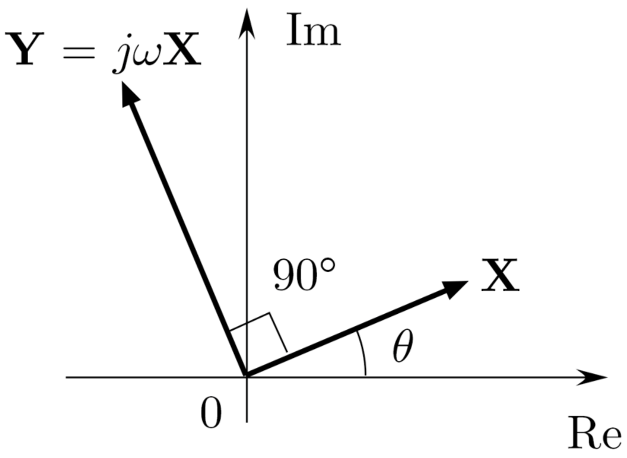
$$x(t) = \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$$

$$\bar{X} = \lambda_1 \bar{X}_1 + \lambda_2 \bar{X}_2$$

PROPRIETA' DEI FASORI

Derivata:

data x(t) a cui è associato il fasore $\bar{X}$



$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

$$\bar{Y} = j\omega\bar{X}$$

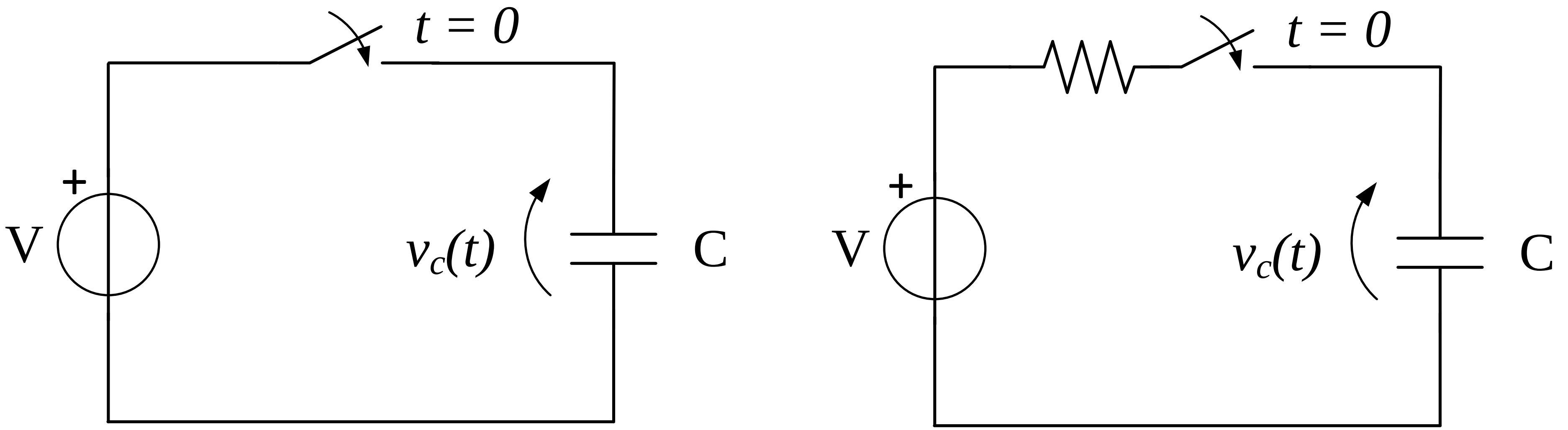
Integrale:

data x(t) a cui è associato il fasore $\bar{X}$

$$y(t) = \int x(t)dt$$

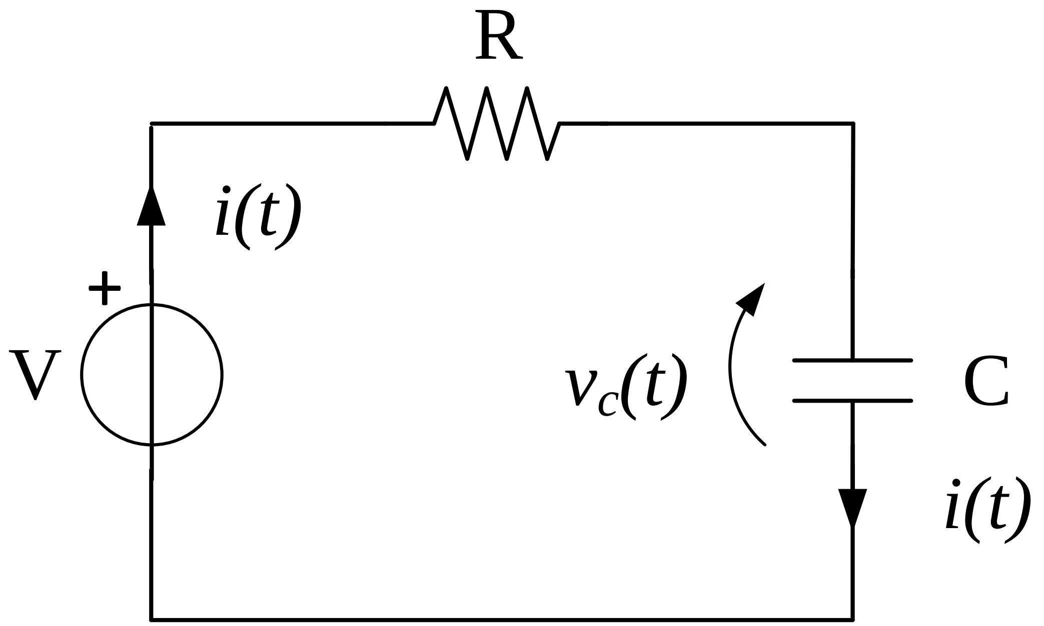
$$\bar{Y} = \frac{\bar{X}}{j\omega}$$

CONDENSATORE



La tensione in un condensatore è una funzione continua:
<u>il condensatore si oppone a brusche variazioni di tensione</u>

CIRCUITO RC CON GENERATORE COSTANTE



$$\tau = RC$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} v_c(t) = \frac{V}{\tau}$$

risposta completa

risposta permanente

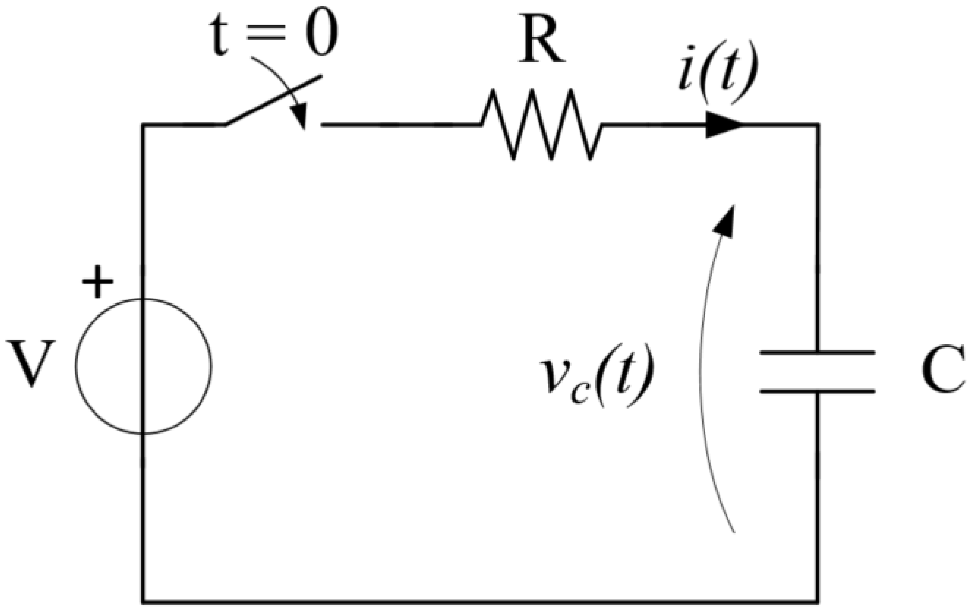
evoluzione forzata

$$v_c(t) = [v_c(0) - V]\, e^{-\frac{t}{\tau}} + V = v_c(0) e^{-\frac{t}{\tau}} + \left[V - V e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

risposta transitoria

evoluzione libera

RISPOSTA A UN INGRESSO SINUSOIDALE



$$V = V_m \cos \omega t$$

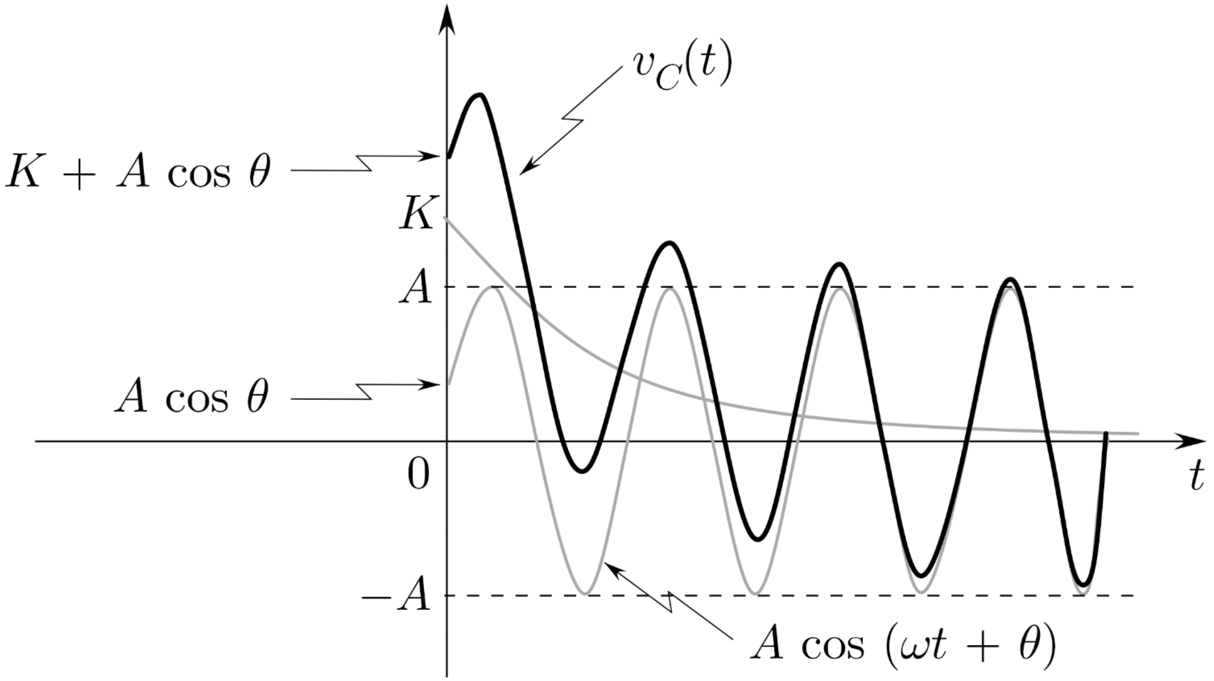
RISPOSTA TRANSITORIA

RISPOSTA PERMANENTE

$$\tau = RC$$

$$v_c(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + A\cos(\omega t + \theta)$$

RISPOSTA A UN INGRESSO SINUSOIDALE



RISPOSTA COMPLETA

$$v_c(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + A\cos(\omega t + \theta)$$

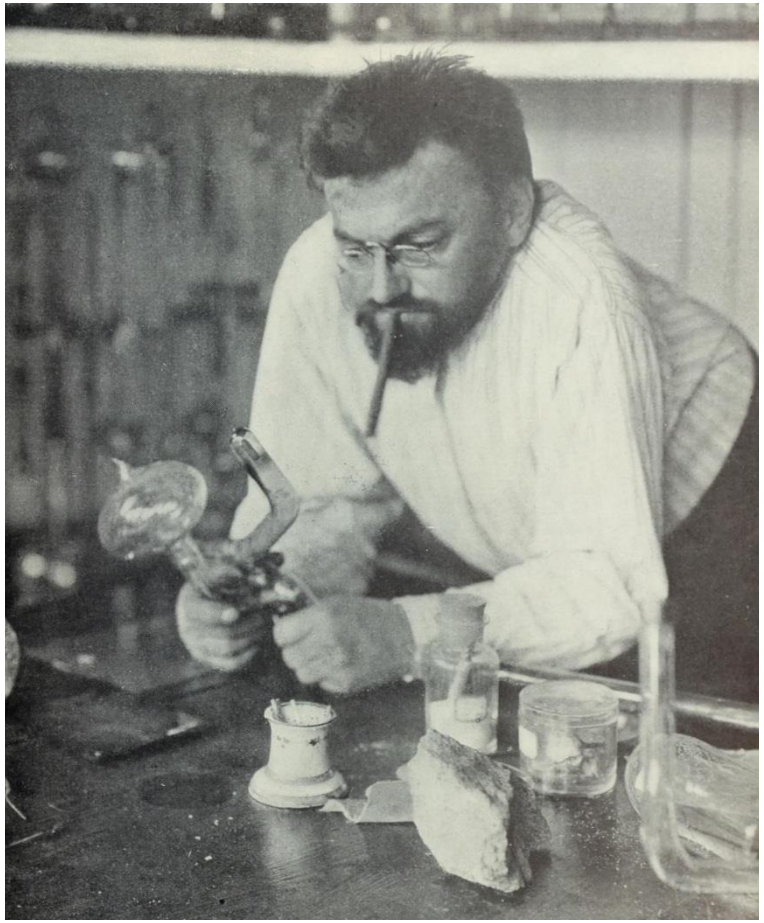
$$A = \frac{V_m}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\theta = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

Quando tutte le tensioni e tutte le correnti sono sinusoidali con la stessa pulsazione ω il circuito si dice in regime sinusoidale

R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014

TRASFORMATA DI STEINMETZ



- Charles Proteus Steinmetz (1865 – 1923)
- Propose lo **studio dei circuiti in regime sinusoidale attraverso l'uso dei** fasori

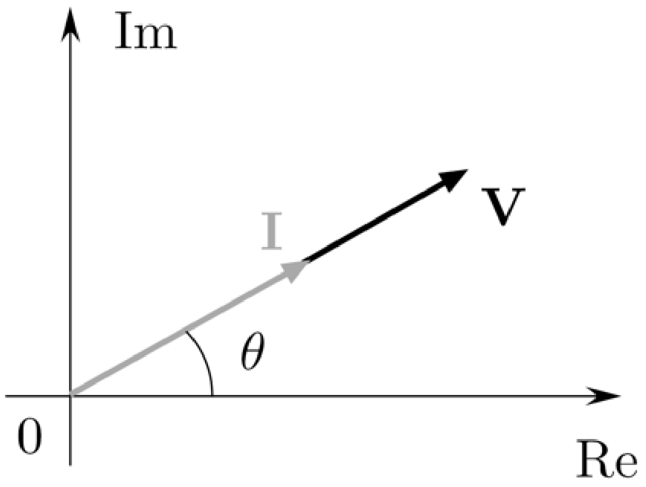
RESISTORE E FASORI

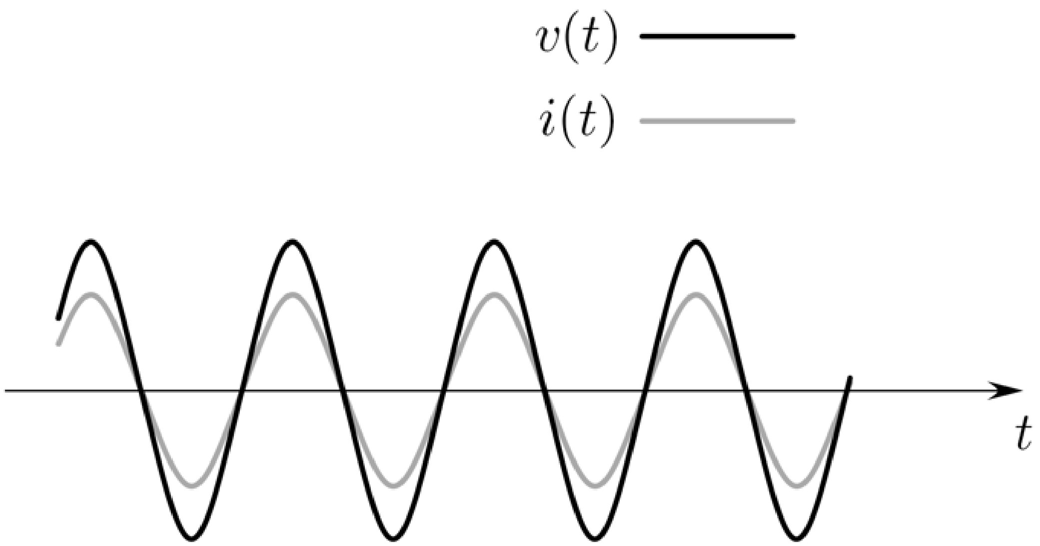
LEGGE DI OHM SIMBOLICA

$$\overline{V} = R\,\overline{I}$$

LEGGE DI OHM

$$v(t) = R\,i(t)$$



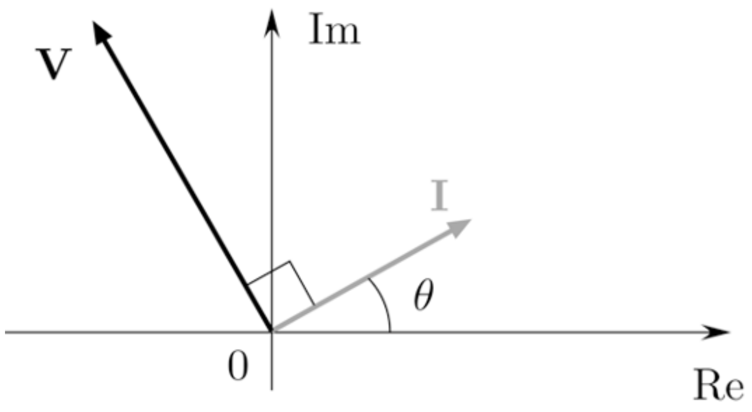


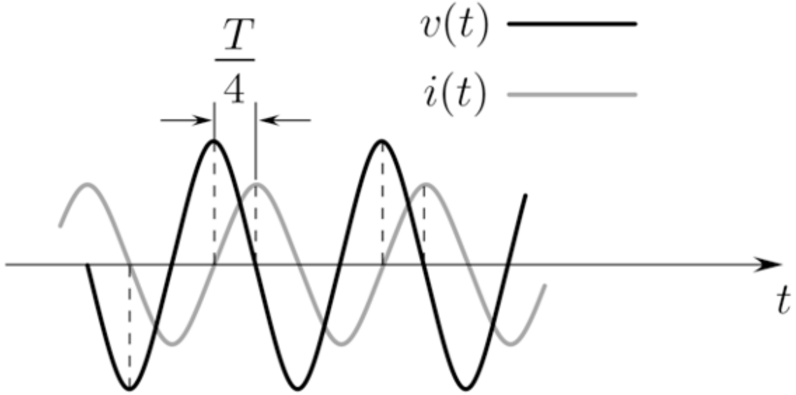
$$|\overline{V}| = R|\overline{I}| \qquad \angle\overline{V} = \angle\overline{I}$$

R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014

INDUTTORE E FASORI

$$\overline{V} = j\omega L\,\overline{I} \quad \Longleftrightarrow \quad v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$



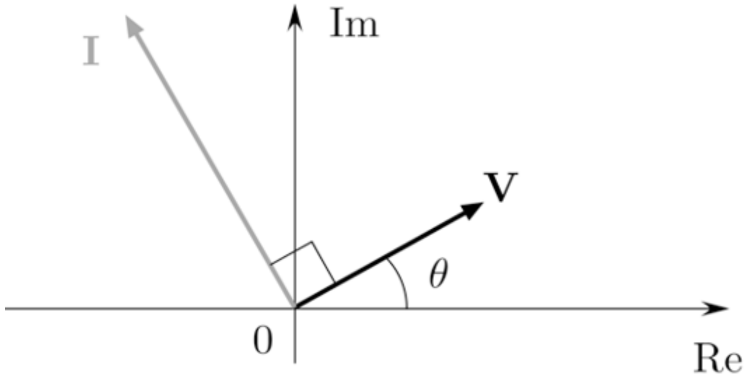


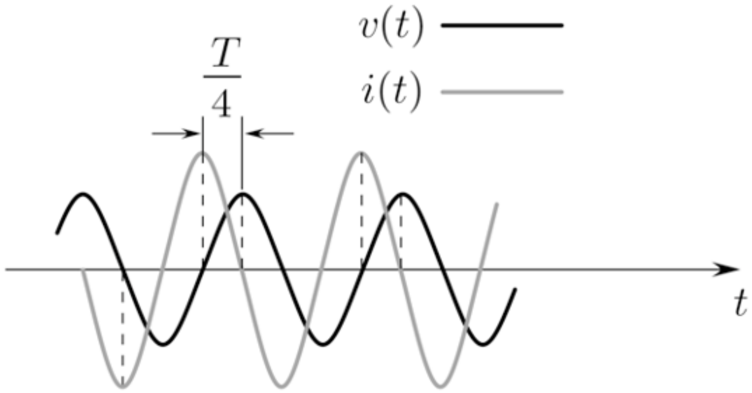
$$\left|\overline{V}\right| = \omega L\left|\overline{I}\right| \qquad \angle\overline{V} = \angle\overline{I} + 90°$$

R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014

CONDENSATORE E FASORI

$$\bar{I} = j\omega C\,\bar{V} \quad \Longleftrightarrow \quad i(t) = C\,\frac{dv(t)}{dt}$$





Tensione e corrente in QUADRATURA

$$|\bar{I}| = \omega C|\bar{V}| \qquad \angle\bar{I} = \angle\bar{V} + 90°$$

R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014

IMPEDENZE E AMMETTENZE

Resistore	$\overline{Z} = R$	$\overline{Y} = 1/R = G$
Induttore	$\overline{Z} = j\omega L$	$\overline{Y} = \dfrac{1}{j\omega L}$
Condensatore	$\overline{Z} = \dfrac{1}{j\omega C}$	$\overline{Y} = j\omega C$

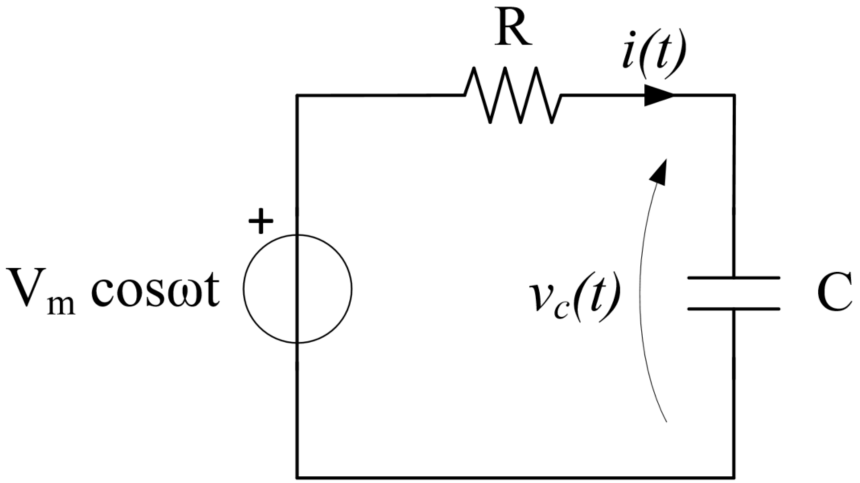
LEGGE DI OHM SIMBOLICA

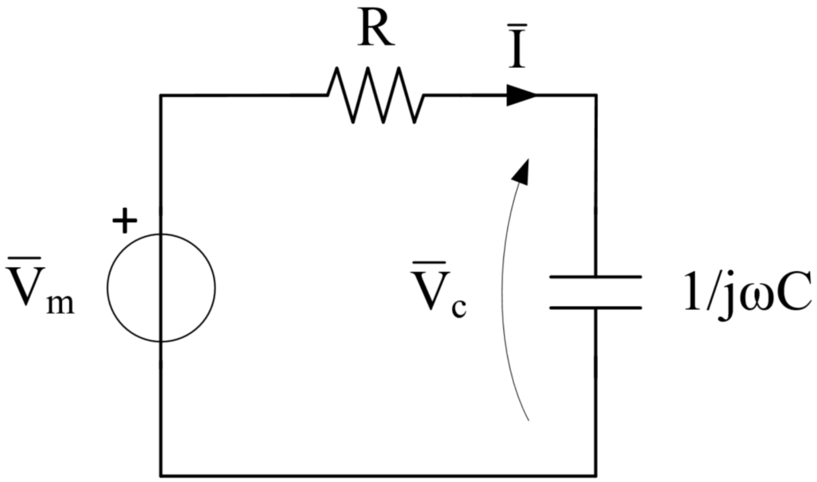
$$\boxed{\overline{V} = \overline{Z}\,\overline{I}} \qquad \boxed{\overline{I} = \overline{Y}\,\overline{V}}$$

CIRCUITI SIMBOLICI

DOMINIO DEL TEMPO

DOMINIO DEI FASORI





Grandezze fisiche

Grandezze simboliche

$$\sum_k i_k(t) = 0 \;\; \forall\, t$$

$$\sum_k v_k(t) = 0 \;\; \forall\, t$$

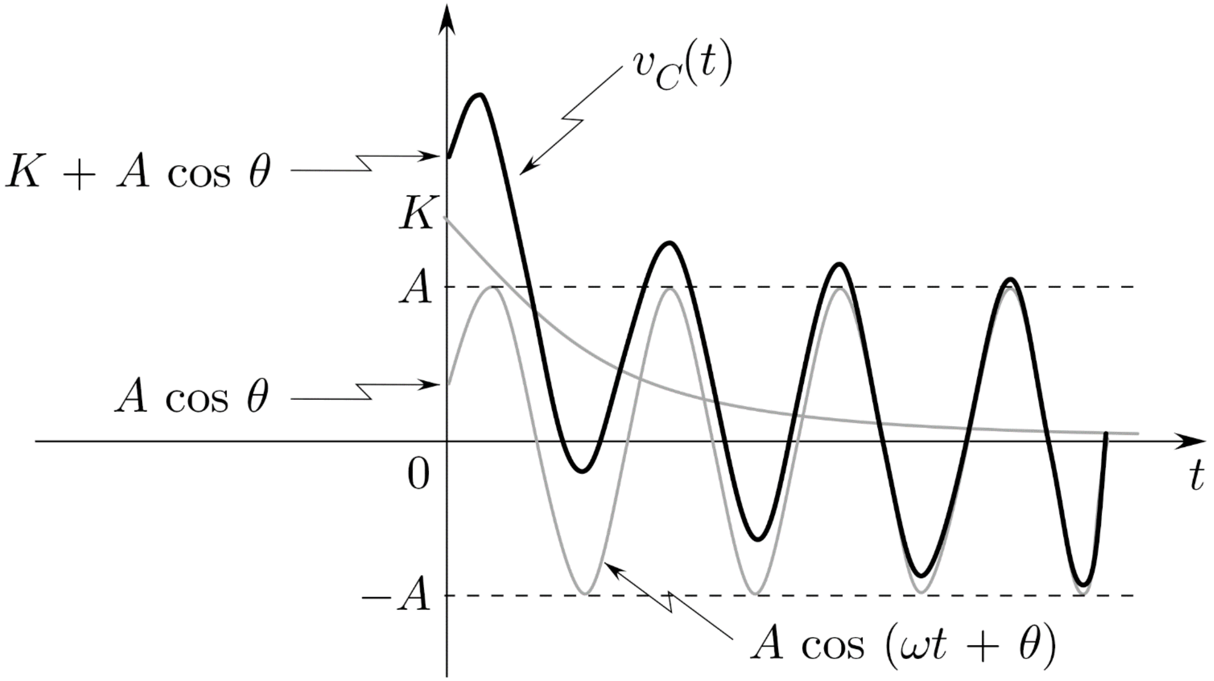
$$\sum_k \bar{I}_k = 0$$

$$\sum_k \bar{V}_k = 0$$

CIRCUITO RC CON GENERATORE SINUSOIDALE

CIRCUITO RC CON GENERATORE SINUSOIDALE

RISPOSTA A UN INGRESSO SINUSOIDALE



RISPOSTA COMPLETA

$$v_c(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + A\cos(\omega t + \theta)$$

$$A = \frac{V_m}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\theta = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

Quando tutte le tensioni e tutte le correnti sono sinusoidali con la stessa pulsazione **ω** il circuito si dice in regime sinusoidale

R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014

METODO SIMBOLICO

ESEMPIO 9.3

IMPEDENZE SERIE E PARALLELO

$$R_s = \sum_{k=1}^{n} R_k \qquad \bar{Z}_s = \sum_{k=1}^{n} \bar{Z}_k$$

$$G_p = \sum_{k=1}^{n} G_k \qquad \bar{Y}_p = \sum_{k=1}^{n} \bar{Y}_k$$

$$\boxed{\bar{Z}_p = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}}$$

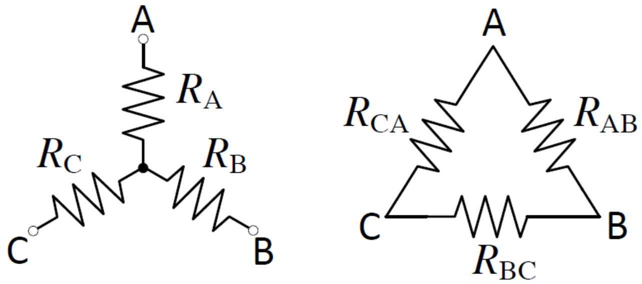
ESEMPIO 9.4

ESEMPIO 9.5

ESEMPIO 3.7

COLLEGAMENTI STELLA TRIANGOLO

Per le impedenze valgono le stesse formule!!



$$R_{AB} = \frac{R_A R_B}{\left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}\right)^{-1}}$$

$$R_A = \frac{R_{AB} R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_{BC} = \frac{R_B R_C}{\left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}\right)^{-1}}$$

$$R_B = \frac{R_{BC} R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_{CA} = \frac{R_C R_A}{\left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}\right)^{-1}}$$

$$R_C = \frac{R_{CA} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

RESISTENZE E REATTANZE

IMPEDENZA

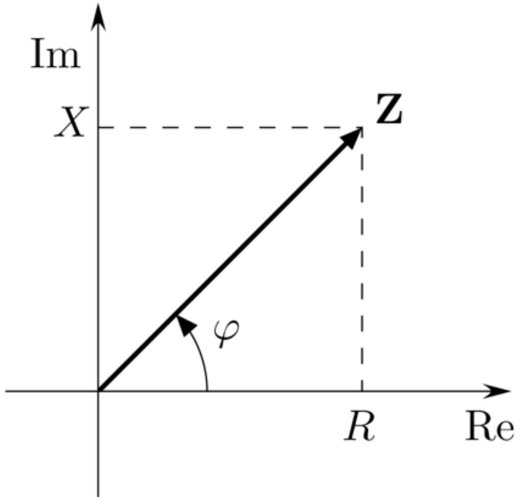
$$\boxed{\bar{Z} = R + jX}$$

RESISTENZA — **REATTANZA**

Resistore	$R = R$	$X = 0$
Induttore	$R = 0$	$X = \omega L$
Condensatore	$R = 0$	$X = -1/\omega C$

TIPOLOGIE DI BIPOLI

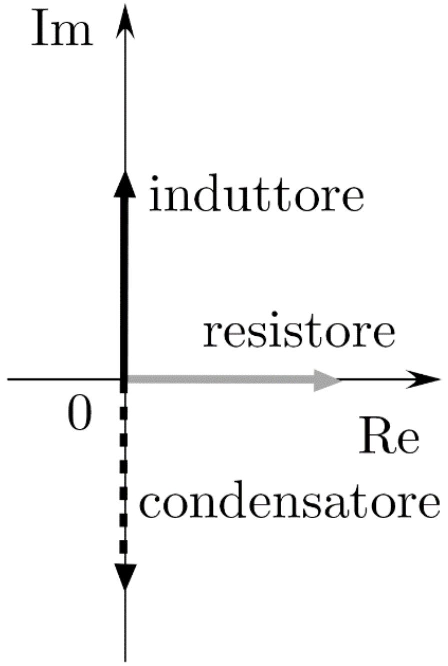
$$\overline{Z} = R + jX = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V_m}{I_m}\angle(\theta_v - \theta_i)$$

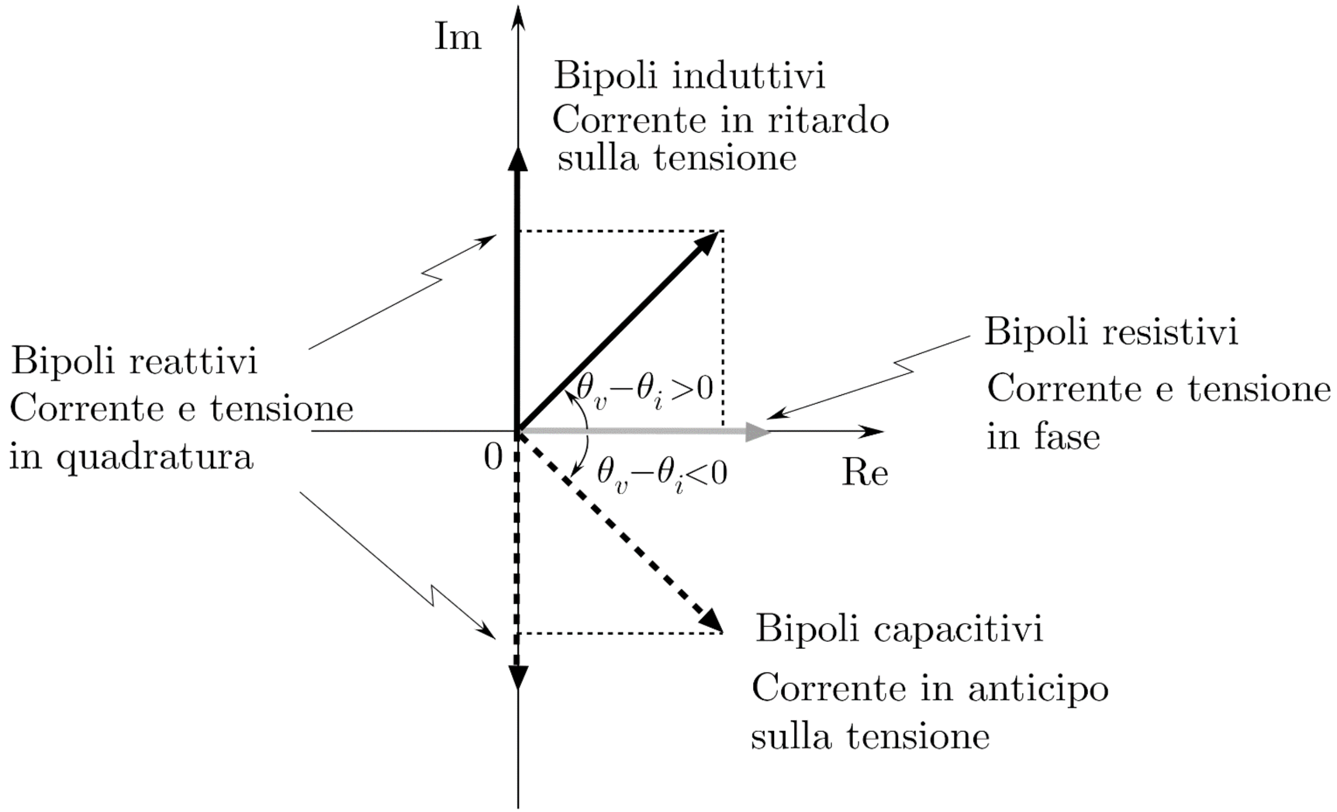


Triangolo dell'impedenza

- BIPOLI RESITIVI: $\overline{Z} = R$
- BIPOLI REATTIVI: $\overline{Z} = jX$
- BIPOLI OHMICO INDUTTIVI: $R \neq 0,\ X > 0$
- BIPOLI OHMICO CAPACITIVI: $R \neq 0,\ X < 0$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLE IMPEDENZE





R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014

RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE

CONDUTTANZE E SUSCETTANZE

AMMETTENZA

$$\boxed{\bar{Y} = G + jB}$$

CONDUTTANZA (G) — **SUSCETTANZA** (B)

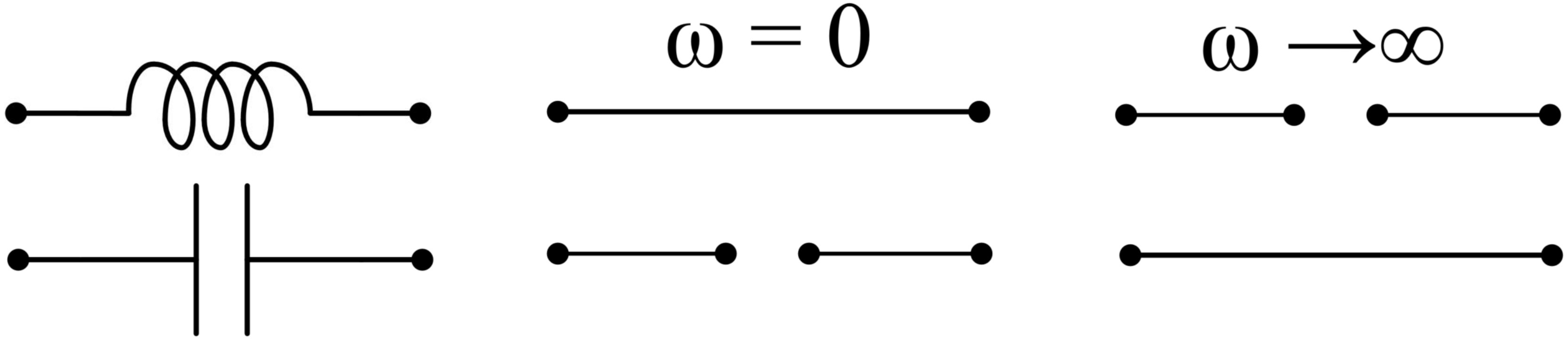
Resistore	$G = 1/\mathrm{R}$	$B = 0$
Induttore	$G = 0$	$B = -1/\omega L$
Condensatore	$G = 0$	$B = \omega C$

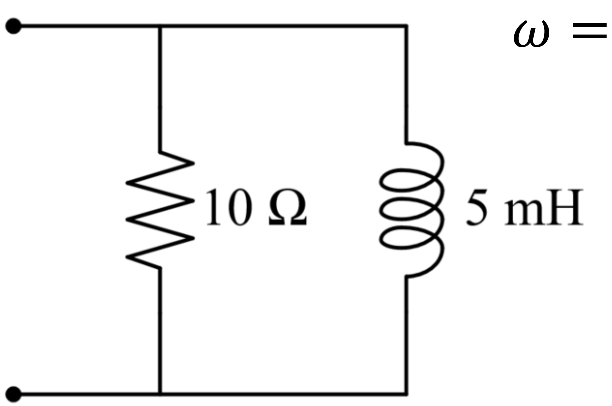
TIPOLOGIE DI BIPOLI

$$\overline{Y} = G + jB = \frac{\bar{I}}{\overline{\overline{V}}} = \frac{I_m}{V_m}\angle(\theta_i - \theta_v)$$

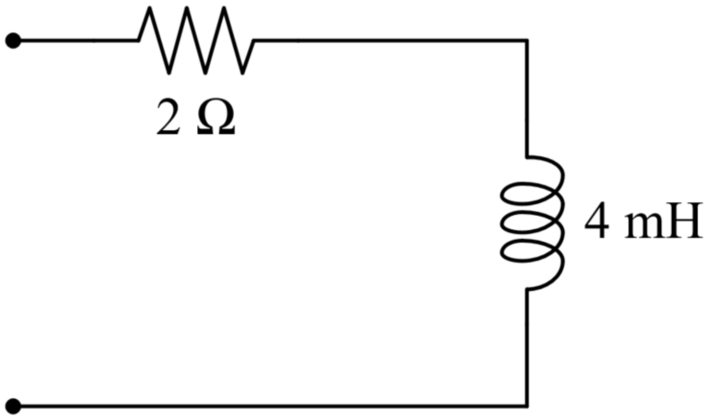
- BIPOLI RESITIVI: $\overline{Y} = G = \frac{1}{R}$
- BIPOLI REATTIVI: $\overline{Y} = jB$
- BIPOLI INDUTTIVI: $G \neq 0,\ B < 0$
- BIPOLI CAPACITIVI: $G \neq 0,\ B > 0$

DIPENDENZA DALLA FREQUENZA E BIPOLI EQUIVALENTI





$\omega = 10^3 rad/s$

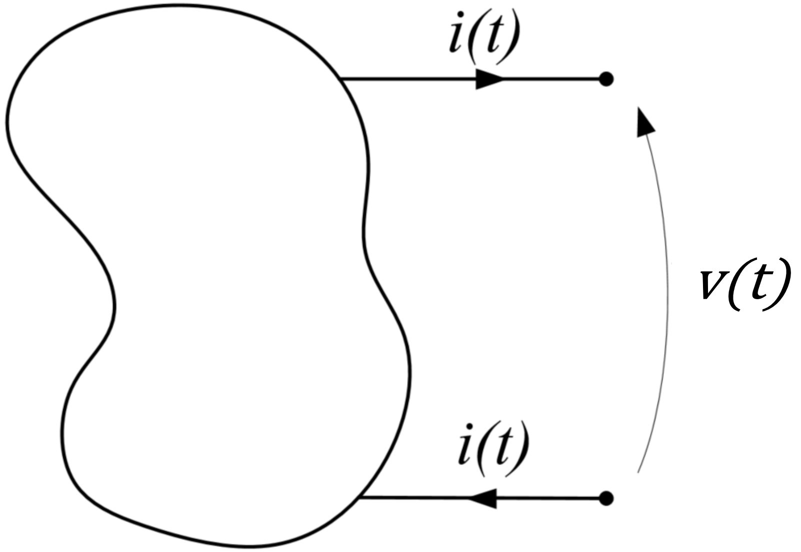


DIPENDENZA DALLA FREQUENZA

POTENZA IN REGIME SINUSOIDALE

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

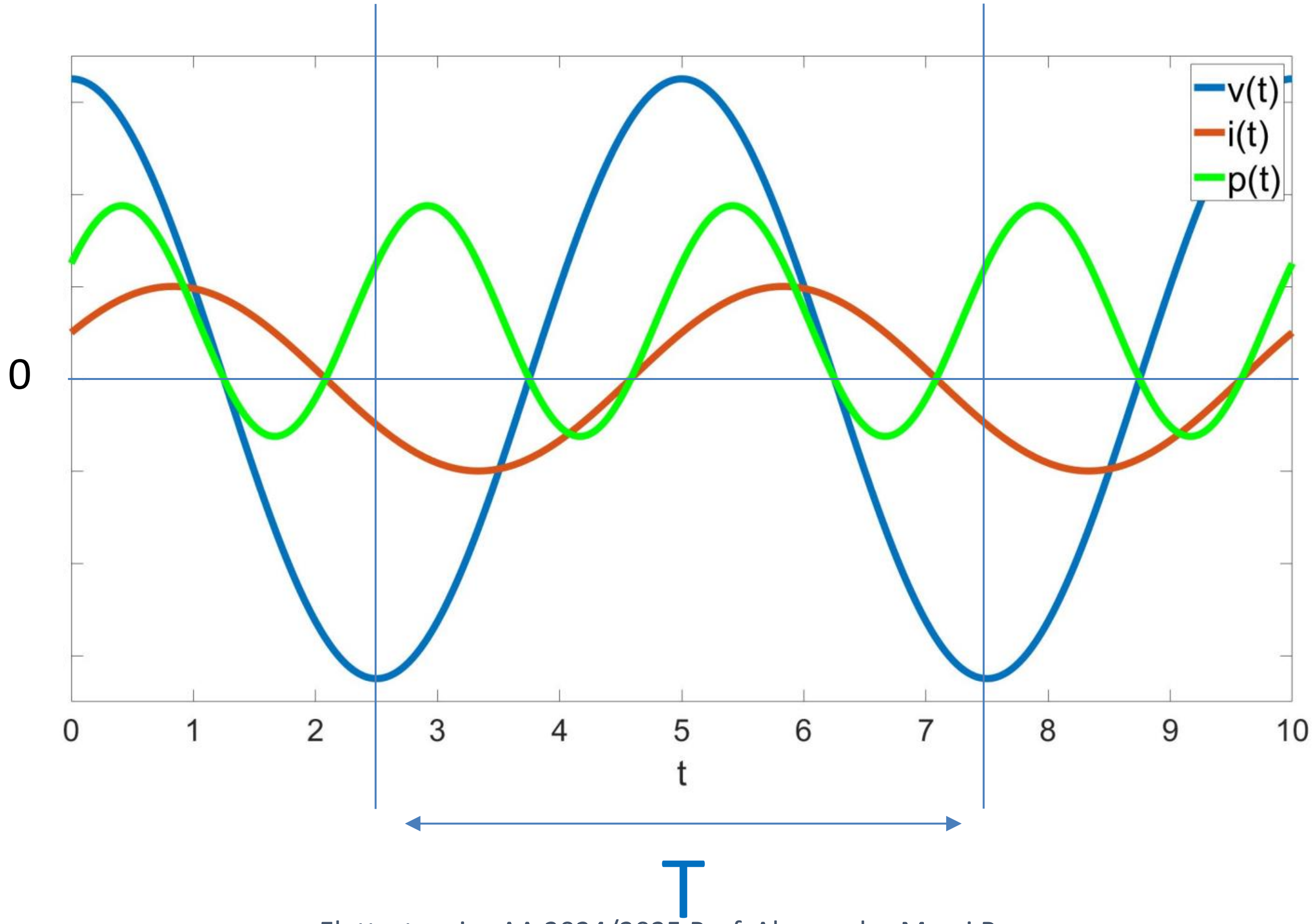


POTENZA ISTANTANEA $p(t) = v(t) \times i(t)$

$$\boxed{\boldsymbol{p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)}}$$

POTENZA IN REGIME SINUSOIDALE

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$



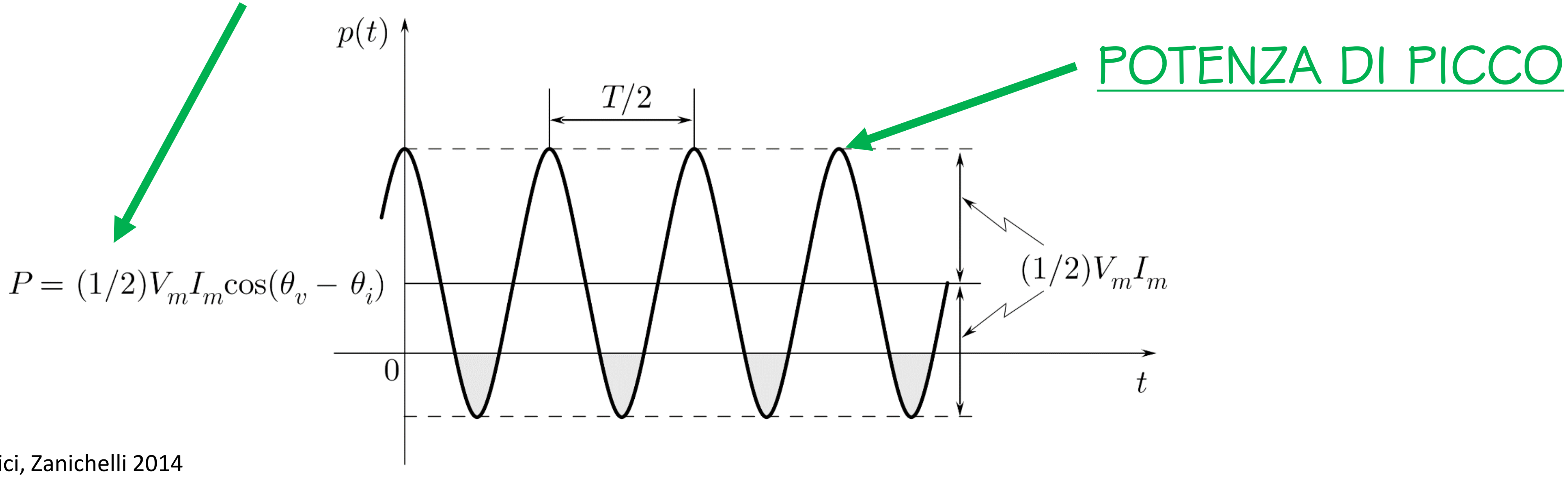
POTENZA IN REGIME SINUSOIDALE

POTENZA ISTANTANEA

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$

POTENZA ATTIVA
Detta anche MEDIA

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \quad [W]$$

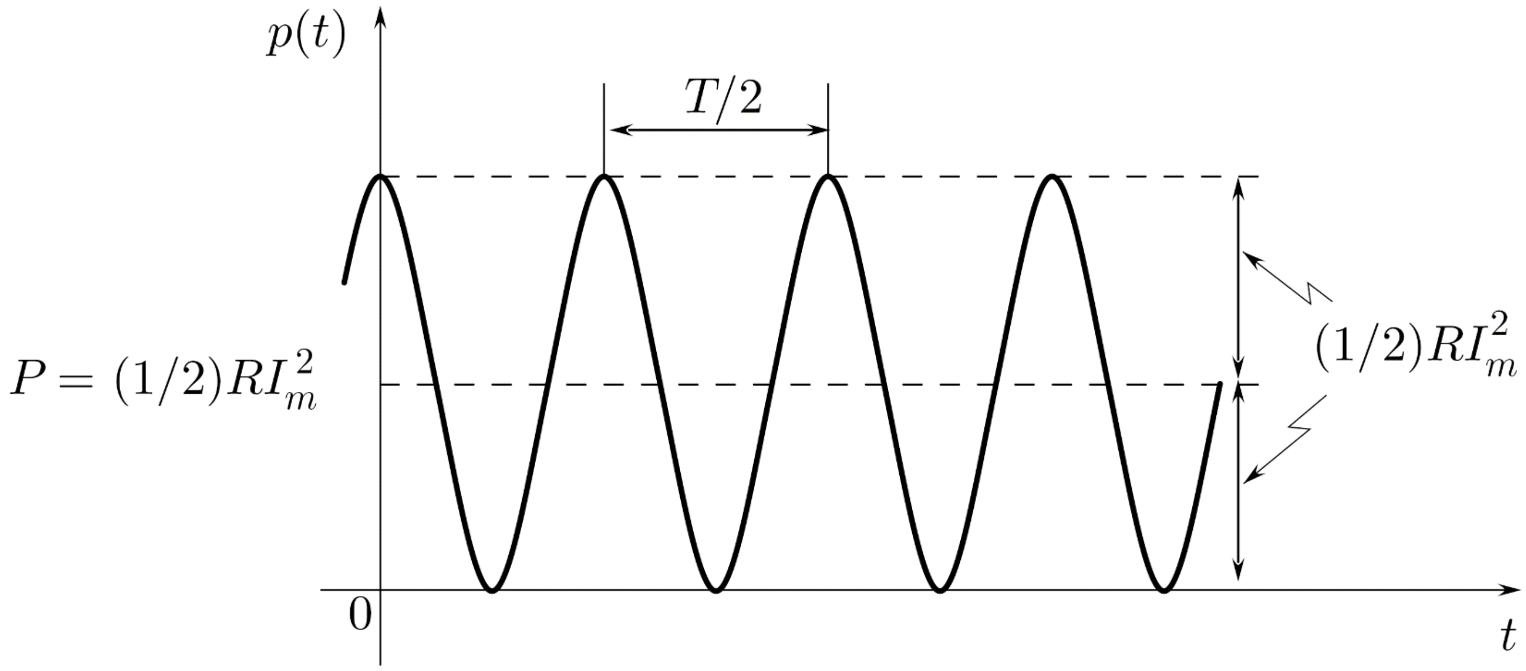


R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014

POTENZA IN REGIME SINUSOIDALE

RESISTORE

$$p(t) = \frac{1}{2} R I_m^2 + \frac{1}{2} R I_m^2 \cos(2\omega t + 2\theta_i)$$

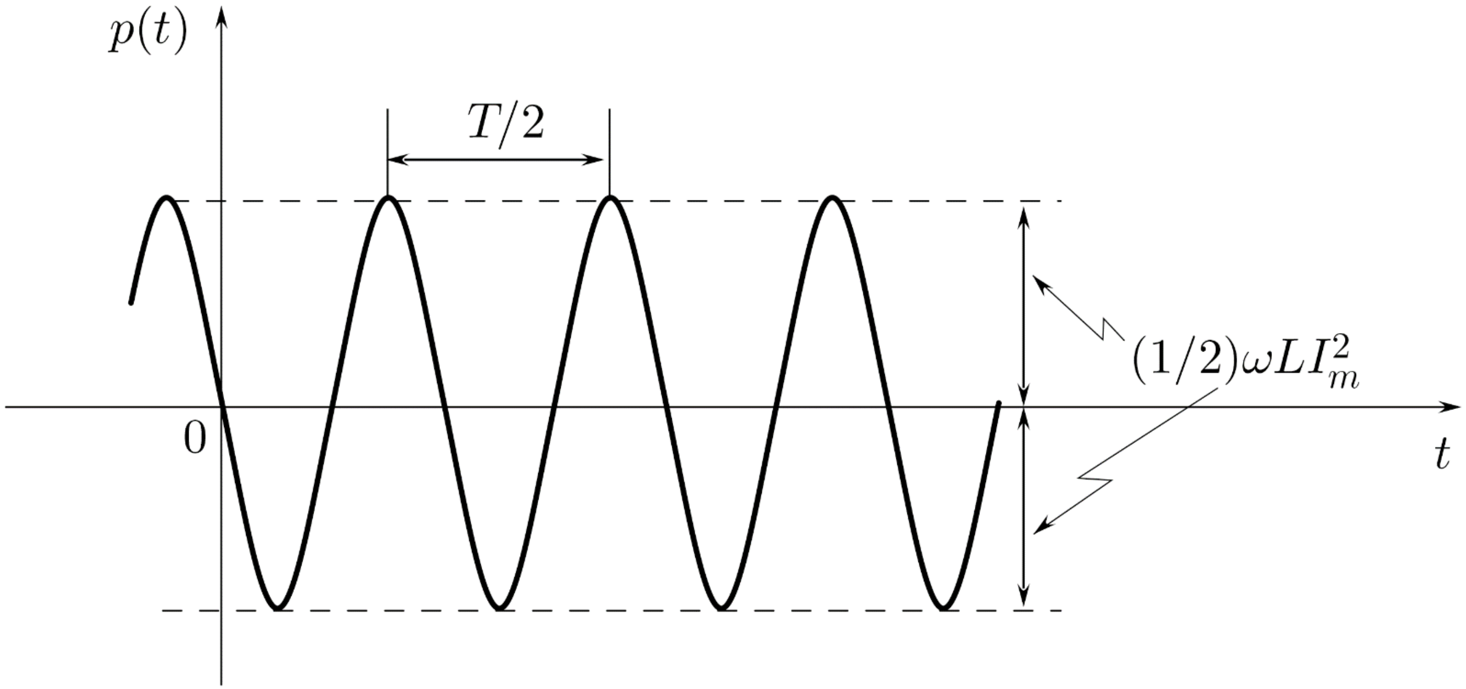


R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014

POTENZA IN REGIME SINUSOIDALE

INDUTTORE

$$p(t) = -\frac{1}{2}\omega L I_m^2 \, sin(2\omega t + 2\theta_i)$$



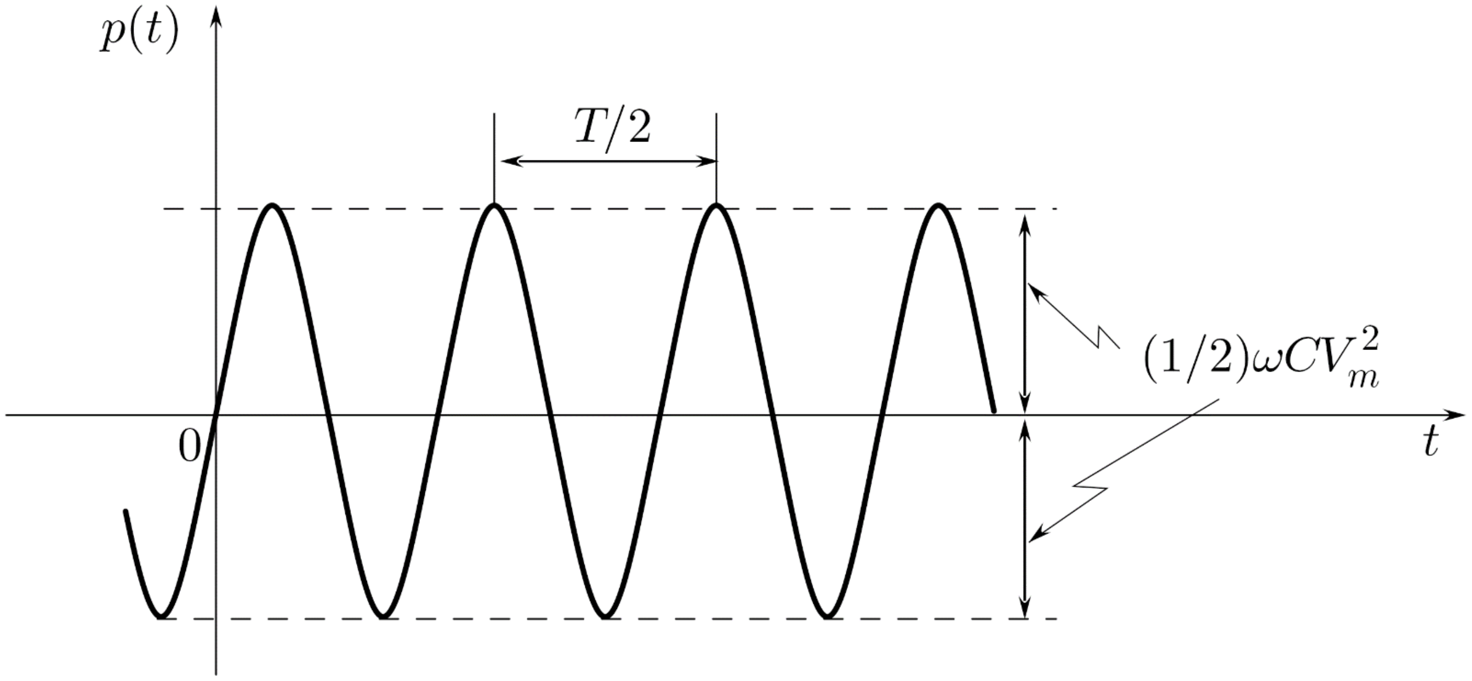
R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014

RESISTORE

POTENZA IN REGIME SINUSOIDALE

CONDENSATORE

$$p(t) = \frac{1}{2}\omega C V_m^2 \, sin(2\omega t + 2\theta_i)$$



R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014

ESEMPIO 10.1 – METODO 1

ESEMPIO 10.1 – METODO 2

ESEMPIO 10.2

ESEMPIO 10.3

PROPRIETA' DELLE FUNZIONI SINUSOIDALI

Valore medio:

$$A_{medio} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{T/2} A \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} A = 0{,}636A$$

Valore efficace (rms):

$$A_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T} A^2\, sin^2\, \omega t dt} = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0{,}707A$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}}}$$

VALORE EFFICACE E POTENZA

VALORE EFFICACE

$$\boxed{I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}}$$

Il valore efficace («eff» o «rms») di una corrente (tensione) sinusoidale è il valore di quella corrente (tensione) costante che, scorrendo nello (ai capi dello) stesso resistore, provoca la dissipazione della stessa potenza media

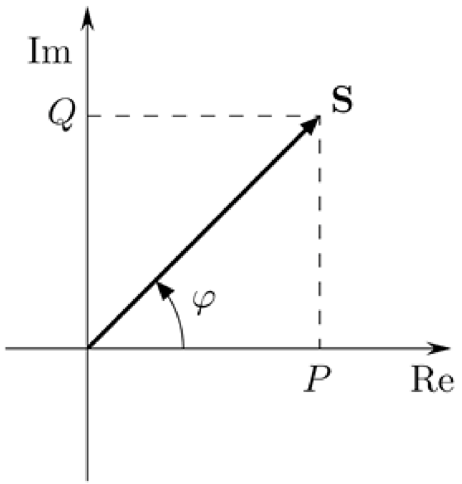
$$\boxed{P = V_{eff} \times I_{eff} = R \times I_{eff}^2 = \frac{V_{eff}^2}{R}}$$

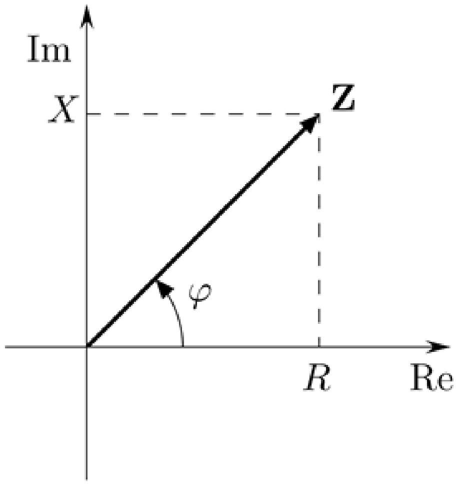
ESEMPIO 10.4

ESEMPIO 10.5

POTENZA COMPLESSA

Triangolo della potenza





$$\boxed{\bar{S} = \frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^*} \quad [VA]$$

$$S = |\bar{S}| = \frac{1}{2}V_m I_m = V_{eff} I_{eff}$$

$$\angle S = \theta_v - \theta_i = \varphi$$

Il coseno dello sfasamento tra tensione e corrente è detto

$\cos\varphi$ FATTORE DI POTENZA

R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli 2014

POTENZA COMPLESSA

$$\bar{S} = \frac{1}{2}V_m I_m \cos\varphi + j\frac{1}{2}V_m I_m \sin\varphi$$

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{jQ}}$$

POTENZA ATTIVA [W]

POTENZA REATTIVA [VAR]

$$S = \frac{1}{2}V_m I_m$$ è la potenza apparente [VA]

POTENZA COMPLESSA

TRIANGOLO DELLE POTENZE

POTENZA REATTIVA RESISTORE E INDUTTORE

POTENZA REATTIVA CONDENSATORE

RIASSUMENDO …

Potenza complessa $\bar{S} = P + jQ$

Potenza apparente $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Fattore di potenza $\cos\varphi = \dfrac{P}{S}$

Potenza attiva $P = S\cos\varphi$

Potenza reattiva $Q = S\sin\varphi$

ESEMPIO 10.7

POTENZA COMPLESSA – Z/Y

$$\bar{Z} = R + jX \qquad \bar{Y} = G + jB$$

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^* = \frac{1}{2}\bar{Z}\bar{I}\bar{I}^* = \frac{1}{2}\bar{Z}|\bar{I}|^2 = \frac{1}{2}(R + jX)I_m^2$$

$$\begin{cases} P = \frac{1}{2}RI_m^2 \\ Q = \frac{1}{2}XI_m^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} P = \frac{1}{2}GV_m^2 \\ Q = -\frac{1}{2}BV_m^2 \end{cases}$$

BIPOLI ELEMENTARI

BIPOLO	Potenza attiva	Potenza reattiva
Resistore	$\frac{1}{2}RI_m^2$	0
Induttore	0	$\frac{1}{2}\omega L I_m^2 = \frac{1}{2}X_L I_m^2$
Condensatore	0	$-\frac{1}{2}\frac{1}{\omega C}I_m^2 = \frac{1}{2}X_C I_m^2$

BIPOLI PASSIVI

Un bipolo si dice passivo se $P \geq 0$ ($R \geq 0$, $G \geq 0$)

Bipolo resistivo $X = B = 0 \ \rightarrow Q = 0$

Bipolo reattivo $R = G = 0 \ \rightarrow P = 0$

Bipolo induttivo $X > 0 \; e \; B < 0 \ \rightarrow Q > 0$

Bipolo capacitivo $X < 0 \; e \; B > 0 \ \rightarrow Q < 0$

FATTORE DI POTENZA

FATTORE DI POTENZA

Il fattore di potenza si dice in ritardo se lo sfasamento tra tensione e corrente è un angolo positivo: corrente in ritardo, bipoli ohmico induttivi

$$\varphi = \theta_v - \theta_i > 0$$

Il fattore di potenza si dice in anticipo se lo sfasamento tra tensione e corrente è un angolo negativo: corrente in anticipo, bipoli ohmico capacitivi

TRIANGOLI POTENZA

ESEMPIO 10.11

CONSERVAZIONE DELLA POTENZA

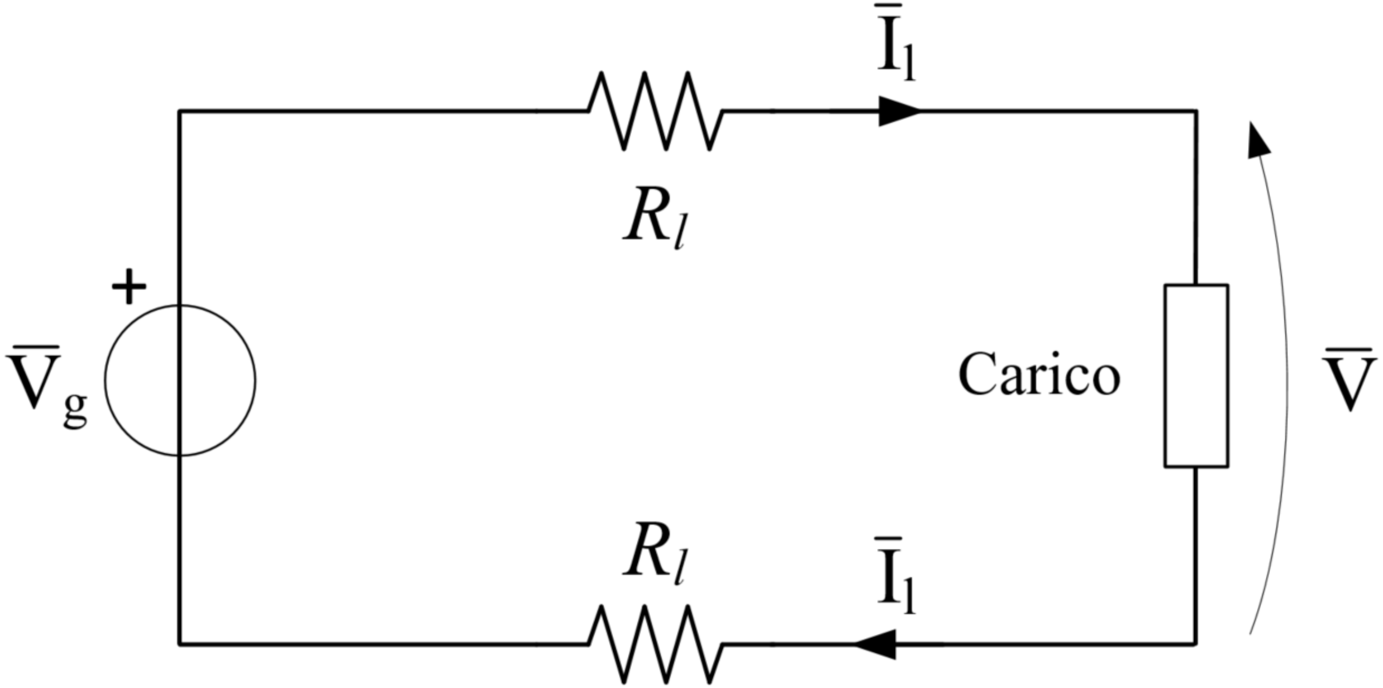
$$\sum_k \bar{S}_k = \sum_k P_k + jQ_k = 0$$

$$\sum_k P_k = \sum_k Q_k = 0$$

<u>**Teorema di Boucherot**</u>: la potenza complessa (attiva e reattiva) in un circuito è uguale alla somma delle potenze assorbite dagli elementi che lo compongono

ESEMPIO 10.13

RIFASAMENTO



$$C = \frac{P_u\,(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)}{\omega V_{eff}^2}$$

ESEMPIO 10.16