Geometria 2

Anno accademico 2024-2025

Foglio di esercizi n.3

21 marzo 2025

1) Trovare una equazione in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ del fascio di rette di centro $(-4, 2+i)$.

2) Sia $r \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ la retta passante per il punto $A = (1, -2, 0)$ e con vettore direzionale $v = e_1 + 3e_3$, dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ denota la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Determinare l'equazione del fascio proprio di piani di sostegno r. Determinare inoltre il piano del fascio che passa per il punto $(1, 1, 1)$.

3) Provare che i tre piani di di $\mathbb{A}^3$ di equazioni

$$\begin{aligned} \pi: &\quad x + y - z + 2 &= 0, \\ \pi': &\quad 2x + 3y + z - 1 &= 0. \\ \pi'': &\quad 4x + 5y - z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

appartengono a uno stesso fascio di piani e determinare l'equazione cartesiana e quella parametrica della retta r, sostegno di tale fascio.

4) Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ un'applicazione affine tra due spazi affini sul campo $\mathbb{K}$. Siano $L \subset \mathbb{A}$ e $L' \subset \mathbb{A}'$ sottospazi affini. Dimostrare che $f(L) \subset \mathbb{A}'$ e $f^{-1}(L') \subset \mathbb{A}$ sono sottospazi affini e che valgono le disuguaglianze $\dim L \geq \dim f(L)$ e $\dim L' \leq \dim f^{-1}(L')$.

5) Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale V. Provare che $\mathbb{A}$ è un sottospazio affine di se stesso, secondo la Def. 1.2.1, in quanto $\mathbb{A} = P + V$ per ogni punto $P \in \mathbb{A}$. *(Traccia: $\supseteq$ ovvia; $\subseteq$ Uso accorto della proprietà T2 della Prop. 1.1.2.)*

6) Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ un'applicazione affine tra due spazi affini e sia $\varphi : V \to V'$ la sua parte lineare. Provare:
i) f è iniettiva $\iff$ φ è iniettiva;
ii) $\mathrm{Im}(f) = f(P) + \mathrm{Im}(\varphi)$ e quindi $\mathrm{Im}(f)$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}'$;
iii) f è suriettiva $\iff$ φ è suriettiva *(facile conseguenza di (ii) + Es. 5)* ;
iv) la seconda parte della Def. 1.8.1 è ridondante, infatti basta dire che una applicazione affine f è un isomorfismo affine $\iff$ f è biunivoca $\iff$ φ è isomorfismo *(conseguenza delle proprietà precedenti).*

7) Siano $Q_1, \ldots, Q_m, O$ punti di uno spazio affine reale $\mathbb{A}$ e si consideri il punto

$$B := O + \frac{1}{m}((Q_1 - O) + \cdots + (Q_m - O)).$$

(a) Dimostrare che B non dipende dalla scelta di O, e quindi è associato univocamente ai punti $Q_1, \ldots, Q_m$ (B si chiama *baricentro* dei punti $Q_1, \ldots, Q_m$).
(b) Si dimostri che le affinità preservano il baricentro, cioè che ogni $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ manda il baricentro di $Q_1, \ldots, Q_m$ nel baricentro di $f(Q_1), \ldots, f(Q_m)$.
(c) Infine si dimostri che nello spazio affine numerico reale $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$, il baricentro si può esprimere con la formula

$$B = \frac{1}{m}(Q_1 + \cdots + Q_m).$$