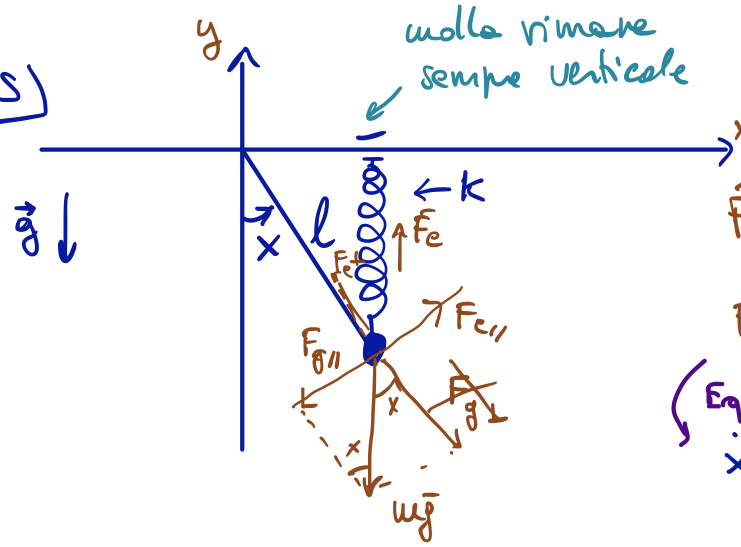
BIFORCAZIONI

ES)



$\vec{F}_e = k\ell\cos x\ \bar{e}_y \qquad \vec{F}_g = -mg\ \bar{e}_y$

$F_{e\parallel} = k\ell\cos x \,\mathrm{sen}\, x \qquad F_{g\parallel} = -mg\,\mathrm{sen}\,x$

Eq. Newton:

$\ddot{x} = -\omega^2 \,\mathrm{sen}\,x + \Omega^2 \cos x \,\mathrm{sen}\,x$

$\omega^2 \equiv \dfrac{g}{\ell} \qquad \Omega^2 \equiv \dfrac{k}{m}$

$V(x) = mg(1-\cos x)\ell + \frac{1}{2}k\ell^2\cos^2 x$

$$\tilde{V}(x) = \frac{V(x)}{m\ell^2} = \omega^2(1-\cos x) + \frac{1}{2}\Omega^2\cos^2 x$$

Disegnamo il grafico di questo potenziale

- $V(x)$ è periodico per $x \to x+2\pi$
- $\tilde{V}'(x) = \omega^2 \,\mathrm{sen}\,x - \Omega^2 \,\mathrm{sen}\,x\cos x = \mathrm{sen}\,x\,(\omega^2 - \Omega^2\cos x)$

  $\tilde{V}''(x) = \omega^2\cos x + \Omega^2 \,\mathrm{sen}^2 x - \Omega^2\cos^2 x = \omega^2\cos x + \Omega^2 - 2\Omega^2\cos^2 x$

  PTI estremali : $x = 0, \pi$ $\leftarrow C_1, C_2$

  $x = \pm\arccos\left(\dfrac{\omega^2}{\Omega^2}\right) \leftarrow \exists$ se $\dfrac{\omega^2}{\Omega^2} < 1$

  C_3, C_4

$V''(0) = \omega^2 - \Omega^2$

$V''(\pi) = -\omega^2 - \Omega^2$

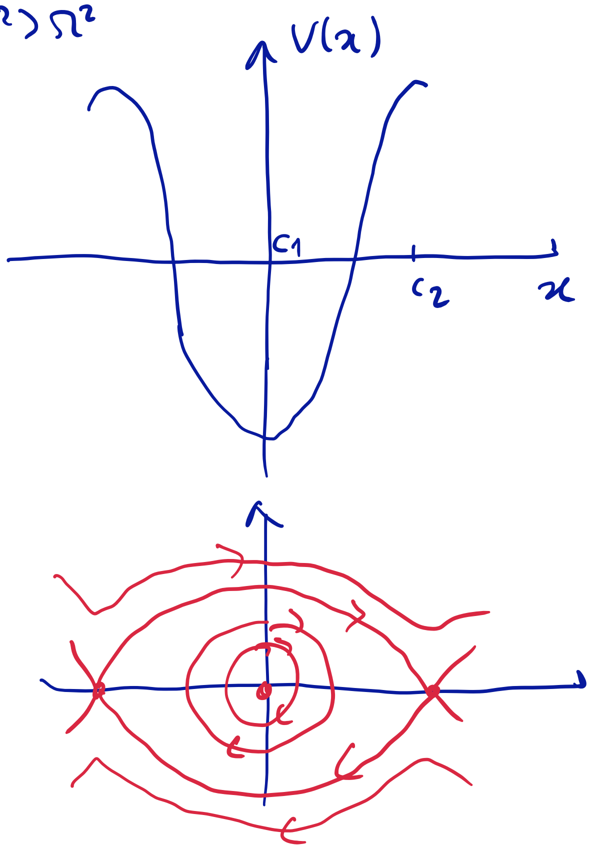
$V''\left(\pm\arccos\left(\frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)\right) = \dfrac{\omega^4}{\Omega^2} + \Omega^2 - 2\cancel{\Omega^2}\dfrac{\omega^4}{\Omega^{\cancel{4}\,2}} = \dfrac{1}{\Omega^2}(\Omega^2 - \omega^2)$

→ Ci sono due potenziali qualitativamente distinti

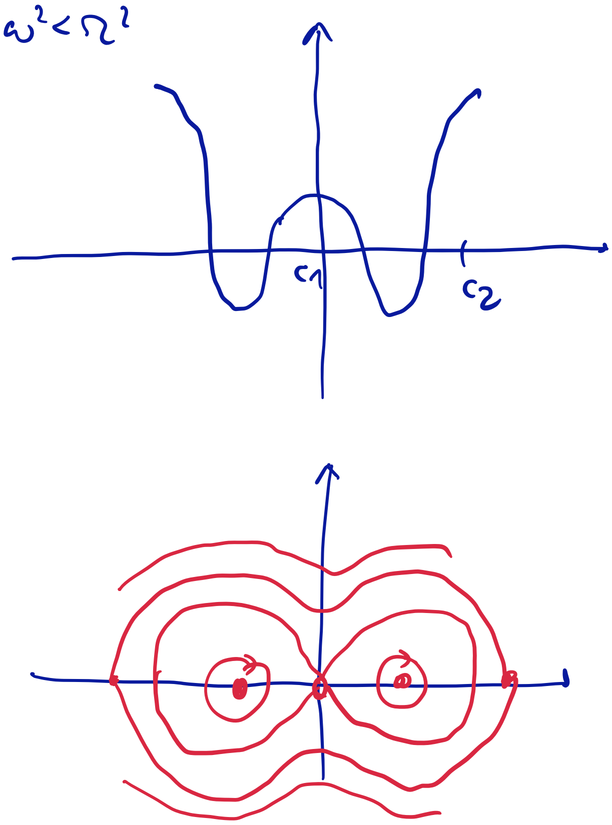
Quando $\omega^2 > \Omega^2$ $\quad c_1$ è MIN ← stab.
$\quad c_2$ è MAX ← instab.
$\quad c_{3,4}$ non sono soluz.

Quando $\omega^2 < \Omega^2$ $\quad c_1$ è MAX ← inst.
$\quad c_2$ è MAX ← inst.
$\quad c_{3,4}$ sono MINIMI ← stab.

$\omega^2 > \Omega^2$

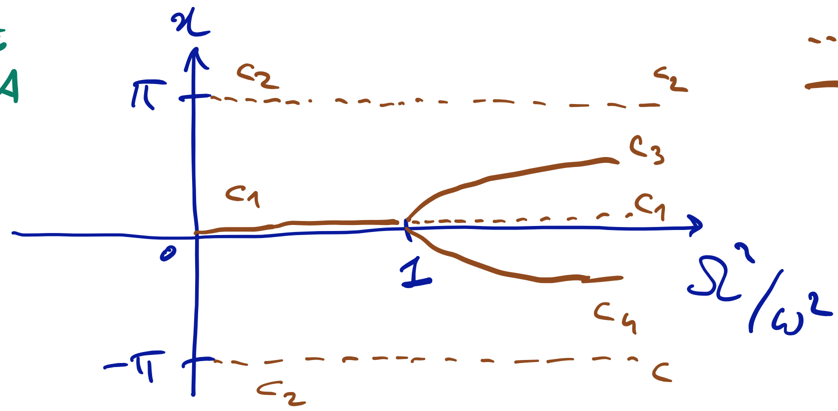


$\omega^2 < \Omega^2$



BIFORCAZIONE A FORCHETTA

"Grafico di biforcazione" →



--- instab

— stab

Al variare del parametro, cambia il numero e il tipo di pti di equilibrio.