

LEGGI DI CONSERVAZIONE in meccanica Lagrangiana

Una funzione $I: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \mapsto I(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$
è chiamata **COSTANTE DEL MOTO** (o integrale primo),
per un sistema Lagr. a n gradi di lib. con Lagrangiana L ,
se la funzione composta $I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)$ è cost. in
 t per $\bar{q}(t)$ che soddisfa le eq. di Lagrange, cioè

$$\frac{d}{dt} (I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)) = 0 \quad \text{in } \bar{q}(t) \text{ che risolve eq. Lagr.}$$

$$\sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial I}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_l \right) + \frac{\partial I}{\partial t}$$

$\leadsto$ Se conosco la funzione $I(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ e so che è
una cost. del moto, allora posso scrivere
l'eq.

$$I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = I_0 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{famiglia (al variare} \\ \text{di } I_0) \text{ di eq.} \\ \text{diff. del 1° ordine} \end{array}$$

che il moto reale sicuramente soddisfa

$\hookrightarrow$ posso utilizzarla per risolvere il problema
di integrare le eq. di Lagrange

Conservazione dell' ENERGIA in sistemi Lagrangiani

Def. Per sistemi Lagrangiani a n gradi di lib. e Lagrangiana $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$
definiamo

$$E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \equiv \sum_{h=1}^n \dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) - L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Calcoliamo la derivata $\frac{d}{dt}$ di $E(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)$

$$\frac{d}{dt} E(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = \sum_{h=1}^n \left(\dot{\bar{q}}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_h} + \bar{q}_h \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_h} \right) -$$

$$- \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \bar{q}_h} \bar{q}_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_h} \ddot{\bar{q}}_h \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \sum_{h=1}^n \dot{\bar{q}}_h \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_h} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}_h} \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

e valutata in $\bar{q}(t)$

se $\bar{q}(t)$ risolve eq. di Lagr.

$$= - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Invariante delle
Lagrangiane sotto
traslazioni temporali.

⇒ Se L NON DIP. ESPlicitATI. dal TEMPO $\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \right)$

allora $E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ è una cost. del moto

Per un sistema meccanico conservativo

$$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k} a_{hk}(\bar{q}) \dot{\bar{q}}_h \dot{\bar{q}}_k - V(\bar{q})$$

↑
è una funzione
OMOGENEA di grado 2
nelle $\dot{\bar{q}}_h$

$$E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \sum_{h=1}^n \dot{\bar{q}}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_h} - L$$

Def. Funzione $f(x_1, \dots, x_N)$ si dice **OMOGENEA** di grado α se $\forall \lambda > 0$ e ogni scelta di $x_1, \dots, x_N$ si ha

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_N) = \lambda^\alpha f(x_1, \dots, x_N)$$

ES. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2^2 + x_3 x_1 \quad \alpha = 2$
 $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + \frac{x_2^2}{x_1}} \quad \alpha = 1/2$

Lemma f omogenea di grado $\alpha \Rightarrow \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha f$

Dim. $0 = \frac{d}{d\lambda} \left[f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_N) - \lambda^\alpha f(x_1, \dots, x_N) \right] \Big|_{\lambda=1} =$
 $= \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_N)}{\partial x_i} x_i - \alpha \lambda^{\alpha-1} f(x_1, \dots, x_N) \right) \Big|_{\lambda=1} //$

$$E = \sum_{k=1}^N \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \underbrace{\sum_{k=1}^N \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}}_{T \text{ omog. di grado } 2} - \sum_{k=1}^N \dot{q}_k \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} - T + V =$$

$$= 2T - T + V = T + V$$

- Nel caso in cui abbiamo forze puramente posizionali
 E è l'energia totale del sist. meccanico

- Se $V = V_0(\bar{q}) + V_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$ ↙ lineare omog. in $\dot{q} \leftarrow \alpha=1$

$$\Rightarrow - \sum_{k=1}^N \dot{q}_k \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = -V_1$$

$$E = 2T - V_1 - T + V_0 + V_1 = T + V_0$$

↳ V_1 non contribuisce all'energia totale del sistema:

$$V_1(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \Omega_k(q)$$

$$\hookrightarrow Q_h = \frac{d}{dt} \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V_1}{\partial q_h} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \Omega_l}{\partial q_h} \dot{q}_l - \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_h}$$

Tale forza è ORTOGONALE alla vet. velocità $\dot{\mathbf{q}}$:

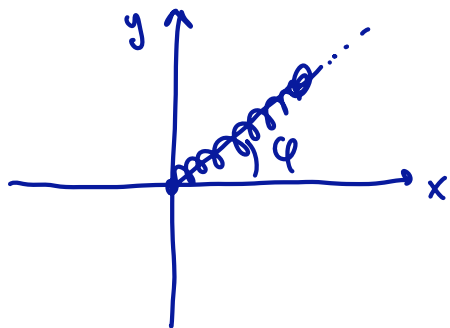
$$\sum_n \dot{q}_n Q_n = \sum_{l, h} \frac{\partial \Omega_l}{\partial q_h} \dot{q}_l \dot{q}_h - \sum_{k, h} \dot{q}_h \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_h} \dot{q}_h = 0$$

entrambi sono modi diversi
di scrivere

$$\sum_{a, b} \frac{\partial \Omega_a}{\partial q_b} \dot{q}_a \dot{q}_b$$

Siccome $\bar{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$, la forza $\bar{\mathbf{Q}}$ non compie lavoro sul pt materiale e quindi non contribuisce al bilancio energetico del pt materiale stesso.

ESEMPIO: oscillatore armonico bidimensionale



$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

$$\omega^2 = k/m$$

Eq. di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \quad \leadsto \quad x(t) = A_x \cos(\omega t + \phi_x)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \rightarrow \ddot{y} = -\omega^2 y \quad \leadsto \quad y(t) = A_y \cos(\omega t + \phi_y)$$

Passiamo a coord. polari:

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \frac{m\omega^2}{2} r^2 \quad \leftarrow L \text{ non dep. esplicitam. dalle coord. } \phi$$

$\rightarrow$ eq. Lagr.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \rightarrow \ddot{r} = -\omega^2 r + r \dot{\phi}^2$$

$$p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\phi}) = 0 \Rightarrow m r^2 \dot{\phi} \text{ è una COST. DEL MOT}$$

$\uparrow$
 $=0$

Sapendo che $m r^2 \dot{\phi} = l \xleftarrow{\text{cost.}} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{l}{m r^2}$ che posso sostituire

in prima eq. $\ddot{r} = -\omega^2 r + \frac{l^2}{m^2 r^3}$

$\hookrightarrow$ Equazione in incognita $r(t)$.

Viene da Lagrangiana

$$L_{\text{eff.}} = \frac{m}{2} \dot{r}^2 - \frac{m\omega^2}{2} r^2 - \frac{l^2}{2mr^2}$$

come si arriva a questa Lagrangiana?

COORDINATE CICLICHE o IGNORABILI

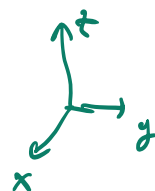
Consideriamo un sist. Lagr. a n gradi di lib. e supponiamo che L non dip. esplicitam. da alcune coordinate (dette **COORDINATE CICLICHE**), $q_{m+1}, \dots, q_n$

$$L = L(q_1, \dots, q_m, \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n}_{\text{velocità}}, t)$$

Se L non dipendesse da una q , la matrice cinetica avrebbe una riga e una colonna di zeri e non sarebbe strettamente definita positiva.

ES. Pt. materiale soggetto a forze d'inerzia.

$$T = \frac{1}{2} m (\underbrace{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}_{\dot{q}_{1,2,3}}) \quad V = mgz$$



$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz = L(z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$\rightarrow x \text{ e } y \text{ sono COORD. CICLICHE}$

OSSERVAZIONE: quando $q_{\hat{i}}$ è coordinata ciclica, la Lagrangiana è invariante sotto la trasformazione

$$\begin{aligned} q_h &\mapsto q_h & h \neq \hat{i} & & \dot{q}_h &\mapsto \dot{q}_h & \forall h \\ q_{\hat{i}} &\mapsto q_{\hat{i}} + c & c \text{ cost.} & \end{aligned}$$

[Possiamo definire delle funzioni (VARIABILI DINAMICHE)

$$p_{\ell}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\ell}}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

dette **MOMENTI CONIUGATI**.]

Se $q_{m+1}, \dots, q_n$ sono coordinate cicliche, allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_l(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) &= \quad \quad \quad l = m+1, \dots, n \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{se il moto } \bar{q}(t) \\ \text{soddisfa le eq. d'eq.}}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) \stackrel{\substack{\uparrow \\ q_l \text{ è} \\ \text{ciclica}}}{=} 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ i momenti coniugati p_l ($l = m+1, \dots, n$), relativi alle coord. cicliche, sono **COSTANTI DEL MOTO**

[p_l è detto momento coniugato di q_l]

ES) $L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$

x è ciclica $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$
 y " " $p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$ $\rightarrow$ quantità di moto lungo x e y è conservate

Usiamo ora queste cost. del moto per "ridurre i gradi di libertà"

- Prendiamo $p_l(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$

- Insieme di livello (def. da scelta del valore della cost. del moto) su cui il moto si muove è dato dal luogo dei pt. t.c.

(*) $\tilde{p}_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \underbrace{\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n}_{\text{prendiamo queste come le } n-m \text{ incognite delle } n-m \text{ equazioni}})$ $l = m+1, \dots, n$
 $\rightarrow$ è una cost.

- Risolviamo $\uparrow$ nelle $\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n$

$$\Rightarrow \dot{q}_e = u_e(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t)$$

- Definiamo una **Lagrangiana efficace** (o Lagrangiana RIDOTTA)

$$L^*(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t; \underbrace{\tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n}_{\text{PARAMETRI}}) \equiv$$

$$\equiv L(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, u_{m+1}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t)$$

$$\dots u_n(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t)$$

$$- \sum_{l=m+1}^n \tilde{p}_l u_l(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t)$$



$$L^* = \left(L - \sum_{k=m+1}^n \tilde{p}_k \dot{q}_k \right) \Big|_{\dot{q}_{l=m+1, \dots, n} = u_l}$$

Prendiamo L^* e lo trattiamo come la Lagrangiana di un sistema (ausiliario) a m gradi di libertà ($m < n$).

Eq. di Lagrange per L^* $h = 1, \dots, \underline{m}$

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_h} = \frac{\partial L}{\partial q_h} + \sum_{l=m+1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial u_l}{\partial q_h} - \sum_{l=m+1}^n \tilde{p}_l \frac{\partial u_l}{\partial q_h}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} + \sum_{l=m+1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial u_l}{\partial \dot{q}_h} - \sum_{l=m+1}^n \tilde{p}_l \frac{\partial u_l}{\partial \dot{q}_h} \right]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \Big|_{\text{valutati in } q_h(t)}$$

$h = 1, \dots, \underline{m}$

$\Rightarrow$ Le equazioni di Lagr. di L^* coincidono con le prime m ep. di Lagr. di L (usando le $(*)$)

$\leadsto$ le funz. $q_k(t)$ ($k=1, \dots, m$) che risolvono le equazioni di Lagrange di L^* , risolvono anche le ep. di Lagr. di L .

Come determiniamo le $q_k(t)$ $k=m+1, \dots, n$?

Le rispettive ep. di Lagrange sono state utilizzate per ricavare $\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n$ in funz. delle $q_k, \dot{q}_k$ $k=1, \dots, m$ (u_k)

$$\rightarrow \dot{q}_k(t) = \underbrace{u_k(q_1(t), \dots, q_m(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_m(t), \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t)}_{\text{Funzione di } t \text{ nota una volta risolte le } m \text{ ep. di Lagr. di } L^* \text{ e inventato } \tilde{p}_k(q, \dot{q}, t) = \tilde{p}_k}$$

$\downarrow$
ep. diff. del 1° ordine in le $q_k(t)$,
del tipo $\dot{x} = f(t)$, cioè sono risolvibili
per integrazione (quadratura).

ES) $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgyz$ $m=3 \quad m=1$

$$\tilde{p}_x = m\dot{x} \leadsto \dot{x} = \tilde{p}_x/m \quad \tilde{p}_y = m\dot{y} \leadsto \dot{y} = \tilde{p}_y/m$$

$$L^* = L - \tilde{p}_x \dot{x} - \tilde{p}_y \dot{y} \Big|_{\dot{x} = \frac{\tilde{p}_x}{m}, \dot{y} = \frac{\tilde{p}_y}{m}} = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{\tilde{p}_x}{m} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{p}_y}{m} \right)^2 + \dot{z}^2 \right] - mgyz - \frac{\tilde{p}_x \tilde{p}_y}{m} - \tilde{p}_y \frac{\tilde{p}_x}{m}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgyz - \frac{\tilde{p}_x^2}{2m} - \frac{\tilde{p}_y^2}{2m} = L^*(z, \tilde{p}_x, \tilde{p}_y)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z} \quad \frac{\partial L^*}{\partial z} = -mg \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} = -g \rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0$$

$$x(t), y(t)? \text{ usiamo } \begin{cases} \dot{x} = \tilde{p}_x/m \\ \dot{y} = \tilde{p}_y/m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{\tilde{p}_x}{m}t + x_0 \\ y(t) = \frac{\tilde{p}_y}{m}t + y_0 \end{cases}$$