Esercizi per Complementi di Algebra - foglio 4

Esercizio 1. Si consideri in S_6 la permutazione $\tau = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

1. Si calcolino il segno, le orbite, la scomposizione in cicli disgiunti e una scomposizione in trasposizioni delle seguenti permutazioni τ, τ^2, τ^3, τ^4, τ^5 e τ^6.

2. Cosa posso dire di τ^k con k generico elemento di $\mathbb{Z}$?

Esercizio 2.

1. Si verifichi che se τ è il ciclo $(i_1, i_2, \cdots, i_{l-1}, i_l)$ allora τ^{-1} sarà il ciclo $(i_l, i_{l-1}, \cdots, i_2, i_1)$.

2. Si calcoli in S_9 l'inverso della permutazione $(1, 2, 3, 4)(2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9)$.

Esercizio 3. Si considerino in S_6 le permutazioni $\tau = (1, 2, 5, 6)$ e $\mu = (2, 3, 6)$. Si calcolino il segno, le orbite, la scomposizione in cicli disgiunti e una scomposizione in trasposizioni delle seguenti permutazioni $\tau \circ \mu$, $(\tau \circ \mu)^2$ e $(\tau \circ \mu)^3$.

Esercizio 4. Si dimostri che A_n con $n \geq 3$ è generato dai cicli di lunghezza tre.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{Z}_n^* = \{[z] \in \mathbb{Z}_n | \text{M.C.D.}(z, n) = 1\}$ il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili in $\mathbb{Z}_n$. Si consideri G un gruppo ciclico di ordine n e g un suo generatore. Sia f la seguente applicazione:

$$f : \text{Aut}(G) \to \mathbb{Z}_n^* \text{ con } f(\alpha) = [k] \text{ dove } \alpha(g) = g^k$$

Si dimostri che f è ben definita ed è un isomorfismo.

Esercizio 6. Per il gruppo “adottato” si cerchino di descrivere le classi di coniugio. Per i gruppi di matrici il compito è arduo, provare a ottenere qualche classe di coniugio.