1.10 Equazioni di affinità e cambi di riferimento

Vediamo ora come esprimere esplicitamente un'affinità. Per fare questo, bisogna fissare due sistemi di riferimento affine (che supponiamo lo stesso per semplicità) nel dominio e nel codominio dell'affinità.

Come abbiamo visto nel Teorema 1.8.2, ogni affinità è determinata dalla sua parte lineare e dall'immagine di un punto fissato.

Si consideri dunque l'unica affinità $f: \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tale che $f(O) = O'$ (dove O e O' sono due punti fissati di $\mathbb{A}$) e avente $\varphi \in GL(V)$ come parte lineare. Come visto nella dimostrazione del Teorema 1.8.2, tale affinità è definita da

$$f(P) = O' + \varphi(P - O). \tag{1.6}$$

Sia $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base di V e si consideri il riferimento affine $(O, \mathcal{B})$ di $\mathbb{A}$. Rispetto ad esso, le coordinate del punto O sono ovviamente $(0, \dots, 0)$ e si denotino con $(c_1, \dots, c_n)$ le coordinate di O'. Inoltre siano $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_n)$ le coordinate del generico punto $P \in \mathbb{A}$ e della sua immagine $f(P)$, rispettivamente.

Infine si osservi che $P - O$ è il vettore di V di componenti $(x_1, \dots, x_n)$ sulla base fissata $\mathcal{B}$ e quindi $\varphi(P - O)$ si può esprimere come prodotto della matrice $M := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ per la matrice colonna ${}^t(x_1, \dots, x_n)$.

Pertanto l'espressione (1.6) diventa esplicitamente

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

cioè, avendo posto $Y := {}^t(y_1, \dots, y_n)$, $X := {}^t(x_1, \dots, x_n)$ e $C := {}^t(c_1, \dots, c_n)$,

$$Y = MX + C. \tag{1.7}$$

Ponendo $M = (m_{ij})$, tale relazione, espressa scalarmente, diventa

$$\begin{cases} y_1 & = & m_{11}x_1 + \cdots + m_{1n}x_n & + & c_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_n & = & m_{n1}x_1 + \cdots + m_{nn}x_n & + & c_n \end{cases}. \tag{1.8}$$

Definizione 1.10.1. Le espressioni (1.7) e (1.8) sono dette, rispettivamente, *equazione vettoriale dell'affinità* e *equazione scalare dell'affinità*.

Esempio 1.10.1. L'affinità f di $\mathbb{A}^2$ di equazione vettoriale $Y = MX + C$, dove

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ha equazione scalare

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 - 3x_2 - 2 \\ y_2 &= 2x_1 + x_2 + 5 \end{cases}.$$

Vediamo, nelle seguenti classi di esempi, alcuni casi particolari.

Esempio 1.10.2. Si consideri un'affinità f di equazione (1.7).

(a) $M = \mathbb{I}_n$ se e solo se f è una traslazione. In tal caso, $f = t_v$ dove $v = (c_1, \dots, c_n)$;

(b) $C = 0_{\mathbb{K}^n}$ se e solo se $O = O'$ se e solo se $f \in \mathrm{Aff}_O(\mathbb{A})$;

(c) $C = 0_{\mathbb{K}^n}$ e $M = -\mathbb{I}_n$: in tal caso $f = \sigma_O$, simmetria di centro O.

Esercizio A9. Determinare le equazioni vettoriali e scalari di σ_O.
Se $B \in \mathbb{A}$ è un qualunque punto, definire la *simmetria di centro* B dandone le equazioni vettoriali e scalari.

Si può dare una forma ancora più compatta dell'equazione (1.7) di un'affinità. Osserviamo che i dati della matrice $M \in K^{n,n}$ e del vettore $C \in K^n$ possono essere inseriti in una matrice $(n+1) \times (n+1)$ nei seguenti due modi.
I) Siano $\overline{X} := {}^t(1, x_1, \dots, x_n)$ e $\overline{Y} := {}^t(1, y_1, \dots, y_n)$ e sia

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & & & \\ \vdots & & M & \\ c_n & & & \end{pmatrix}.$$

Allora l'equazione (1.7) è equivalente a

$$\overline{Y} = Q\,\overline{X}. \tag{1.9}$$

II) Siano $\widetilde{X} := {}^t(x_1, \dots, x_n, 1)$ e $\widetilde{Y} := {}^t(y_1, \dots, y_n, 1)$ e sia

$$\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} & & & c_1 \\ & M & & \vdots \\ & & & c_n \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora l'equazione (1.7) è equivalente a

$$\widetilde{Y} = \widetilde{Q}\,\widetilde{X}. \tag{1.10}$$

Ognuna delle espressioni (1.9) e (1.10) è detta *equazione matriciale dell'affinità*.

Esempio 1.10.3. L'affinità f di $\mathbb{A}^2$ data nell'Esempio 1.10.1 ha equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora il seguente problema: se in uno spazio affine $\mathbb{A}$ sono dati due sistemi di riferimento affine (vedi Definizione 1.1.5), come variano le coordinate di un punto rispetto ai due riferimenti? Vedremo che la risposta a tale domanda è legata alle equazioni di una affinità.

Sia dunque $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale V.
Siano $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ e $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ due basi di V e $O, O' \in \mathbb{A}$.
Indichiamo con $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ e $\Sigma' = (O', \mathcal{B}')$ i corrispondenti riferimenti affini.
Se un punto $P \in \mathbb{A}$ ha coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ rispetto a Σ e coordinate $(y_1, \dots, y_n)$ rispetto a Σ', quale legame c'è tra le due n-uple di coordinate?

Per definizione di sistema di riferimento affine, si ha

$$P - O = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, \quad P - O' = y_1 e'_1 + \cdots + y_n e'_n.$$

Inoltre, dalla Relazione di Chasles si ha l'uguaglianza tra vettori di V:

$$P - O' = (P - O) + (O - O') \tag{1.11}$$

da cui segue l'uguaglianza delle componenti di ambo i membri sulla base $\mathcal{B}'$.
Ponendo

$$O - O' := c_1 e'_1 + \cdots + c_n e'_n$$

restano da individuare le componenti di $P - O$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

Ricordiamo, dall'Algebra lineare, che il cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ nello spazio vettoriale V è individuato da (e individua univocamente) una matrice $n \times n$

$$A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_V)$$

le cui colonne sono, ordinatamente, le componenti, rispetto a $\mathcal{B}'$, dei vettori della base $\mathcal{B}$. Esplicitamente, ponendo $A = (a_{ij})$, si ha

$$\begin{cases} e_1 &= a_{11} e'_1 + \cdots + a_{n1} e'_n \\ \vdots & \qquad \vdots \\ e_n &= a_{1n} e'_1 + \cdots + a_{nn} e'_n \end{cases}.$$

È noto inoltre, che se un vettore $v \in V$ ha componenti $(x_1, \dots, x_n)$ sulla base $\mathcal{B}$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sulla base $\mathcal{B}'$, cioè

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \cdots + x'_n e'_n$$

allora, posti $X := {}^t(x_1, \dots, x_n)$ e $X' := {}^t(x'_1, \dots, x'_n)$ si ha

$$X' = AX. \tag{1.12}$$

In questo contesto, $v = P - O$, quindi l'uguaglianza delle componenti di ambo i membri di (1.11) sulla base $\mathcal{B}'$ diventa

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

e quindi, usando (1.12),

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Abbiamo dunque provato il seguente risultato

Teorema 1.10.1. *Siano $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ e $\Sigma' = (O', \mathcal{B}')$ due sistemi di riferimento affine di $\mathbb{A}$ e siano $(c_1, \dots, c_n)$ le coordinate del punto O nel riferimento Σ'. Se un punto $P \in \mathbb{A}$ ha coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ rispetto a Σ e coordinate $(y_1, \dots, y_n)$ rispetto a Σ', allora, posti*

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

si ha

$$Y = AX + C.$$

□

È evidente che la precedente espressione del *cambio di coordinate affini* è dello stesso tipo dell'equazione vettoriale di una affinità.

1.11 Proprietà affini

Intendiamo con *proprietà affini* quelle proprietà (nozioni, relazioni, ecc.) che vengono mantenute attraverso un'affinità. In sintesi, in questo paragrafo vedremo che si conservano per affinità:

- essere un sottospazio affine;
- la dimensione di un sottospazio affine;
- essere un insieme di punti allineati;
- essere sottospazi paralleli.

In questa sezione $\mathbb{A}$ denota uno spazio affine su un K-spazio vettoriale V con $n = \dim(\mathbb{A}) = \dim_K(V)$. In alcuni teoremi considereremo, per semplicità, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^n_K$ e $V = K^n$: abbiamo visto (cfr. Osservazione 1.8.3) che non è restrittivo supporlo.

Proposizione 1.11.1. *Sia $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ di parte lineare $\varphi \in GL(V)$. Se $S = P + W \subseteq \mathbb{A}$ è un sottospazio affine di giacitura W e passante per il punto P, allora*

$$f(S) = f(P) + \varphi(W)$$

è il sottospazio affine di giacitura $\varphi(W)$ e passante per il punto $f(P)$.

Dimostrazione. " $\subseteq$ " Sia $Q \in S$ cioè $Q = P + w$ per un opportuno $w \in W$. Dunque $w = Q - P$ e, per la Definizione 1.8.1, si ha $\varphi(w) = f(Q) - f(P)$. Poiché $\varphi(w) \in \varphi(W)$, si conclude che $f(Q) = f(P) + \varphi(w) \in f(P) + \varphi(W)$, come si voleva.
" $\supseteq$ " Sia $R \in f(P) + \varphi(W)$ cioè $R = f(P) + \varphi(w)$ per un opportuno $w \in W$. Per l'assioma SA1 (vedi Definizione 1.1.1) esiste un unico punto $Q \in \mathbb{A}$ tale che $w = Q - P$. Quindi, per la citata definizione di affinità, $\varphi(w) = f(Q) - f(P)$. In conclusione

$$R = f(P) + \varphi(w) = f(P) + (f(Q) - f(P)) = f(Q)$$

e $Q = P + w \in P + W = S$, come volevamo. $\square$

Corollario 1.11.2. *Se $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ e $S \subseteq \mathbb{A}$ è un sottospazio affine con $\dim(S) = s$ allora $f(S) \subseteq \mathbb{A}$ è un sottospazio affine di dimensione s.*

Dimostrazione. Dalla Proposizione precedente si ha che la giacitura di S e quella di $f(S)$ sono sottospazi di V che risultano isomorfi tramite la parte lineare di f. $\square$

Corollario 1.11.3. *Se $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ e $\{P_1, \ldots, P_m\}$ è un un insieme di punti distinti allineati allora anche $\{f(P_1), \ldots, f(P_m)\}$ è un un insieme di punti distinti allineati. (Si dice sinteticamente che ogni affinità è una* collineazione*).*

Dimostrazione. Sia L la retta contenente $P_1, \ldots, P_m$. Poiché un'applicazione mantiene le inclusioni, si ha che $f(L)$ contiene $f(P_1), \ldots, f(P_m)$. Dalla Proposizione 1.11.1 si ha che $f(L)$ è un sottospazio affine e, dal Corollario 1.11.2, segue in particolare che $\dim(f(L)) = 1$. □

Corollario 1.11.4. *Se $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ e $S, S' \subseteq \mathbb{A}$ sono due sottospazi affini paralleli allora $f(S)$ e $f(S')$ sono sottospazi affini paralleli.*

Dimostrazione. Se S e S' hanno giaciture, rispettivamente, W e W', per ipotesi si ha $W \subseteq W'$ (o $W \supseteq W'$). Quindi $\varphi(W) \subseteq \varphi(W')$ (o $\varphi(W) \supseteq \varphi(W')$).
D'altro canto, dalla Proposizione 1.11.1 segue che la giacitura di $f(S)$ è $\varphi(W)$ e quella di $f(S')$ è $\varphi(W')$ e questo conclude la dimostrazione. □

Definizione 1.11.1. Due sottoinsiemi X e X' di $\mathbb{A}$ si dicono *affinemente equivalenti* se esiste un'affinità f di $\mathbb{A}$ tale che $f(X) = X'$.

Abbiamo visto nel Corollario 1.11.2 che due sottospazi affinemente equivalenti hanno la stessa dimensione. Si prova facilmente che vale il viceversa.

Proposizione 1.11.5. *Siano S e S' sottospazi affini di $\mathbb{A}$ con $\dim(S) = \dim(S')$. Allora esiste $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ tale che $f(S) = S'$.*

Dimostrazione. Per ipotesi, $S = P + W$ e $S' = P' + W'$ con $\dim(W) = \dim(W')$. Per un noto risultato di Algebra Lineare, tenendo conto che W e W' sono sottospazi vettoriali di V, esiste un isomorfismo di K-spazi vettoriali $\varphi \in GL(V)$ tale che $\varphi(W) = W'$. Pertanto, per il Teorema 1.8.2 (di determinazione di una affinità), esiste un'affinità f avente φ come parte lineare e tale che $f(P) = P'$. Applicando a tale f la Proposizione 1.11.1, si ottiene

$$f(S) = f(P) + \varphi(W) = P' + W' = S'.$$

□

Nel seguente risultato si utilizza la nozione di punti affinemente indipendenti introdotta nella Definizione 1.4.2.

Teorema 1.11.6 (Determinazione di un'affinità mediante punti)**.** *Siano $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ e $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_n\}$ due $(n+1)$-uple di punti di $\mathbb{A}^n$ affinemente indipendenti. Allora esiste un'unica affinità f tale che $f(P_i) = Q_i$, per ogni $i = 0, \ldots, n$. In altre parole, tali due $(n+1)$-uple sono affinemente equivalenti e in modo unico (a meno di permutazioni).*

Dimostrazione. Per ipotesi gli n vettori $P_1 - P_0, \ldots, P_n - P_0$ di K^n sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di K^n. Analogamente lo sono $Q_1 - Q_0, \ldots, Q_n - Q_0$. Pertanto esiste un unico isomorfismo φ di K^n in sé tale che $\varphi(P_i - P_0) = Q_i - Q_0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.
Per il Teorema 1.8.2 esiste un'unica $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A}^n)$ avente φ come parte lineare e tale che $f(P_0) = Q_0$. Precisamente (vedi dimostrazione del teorema citato) tale affinità è definita su ogni $P \in \mathbb{A}^n$ come

$$f(P) = Q_0 + \varphi(P - P_0).$$

Dobbiamo verificare che tale affinità verifica le condizioni richieste. Ma, per ogni $i = 1, \ldots, n$, si ha

$$f(P_i) - f(P_0) = \varphi(P_i - P_0) = Q_i - Q_0$$

da cui segue $f(P_i) = Q_i - Q_0 + f(P_0) = Q_i$, come volevamo.
Infine occorre dimostrare l'unicità di tale affinità, cioè che, se $g \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A}^n)$ e $g(P_i) = Q_i$, per ogni $i = 0, \ldots, n$, allora $g = f$ (traccia: si provi dapprima che g ha la stessa parte lineare di f e si concluda applicando il Teorema 1.8.2 ✍). $\square$

Esercizio A10. Provare che due r-uple di punti affinemente indipendenti di $\mathbb{A}^n$ sono affinemente equivalenti, per ogni $r \leq n + 1$.

Esercizio A11. Provare che se $A, B, C, D \in \mathbb{A}^2$ sono i vertici di un parallelogramma (cioè $B - A = C - D$ e $C - B = D - A$) e $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A}^2)$, allora $f(A), f(B), f(C), f(D)$ sono anch'essi vertici di un parallelogramma.

Ricordiamo alcune nozioni di Algebra Lineare.

In uno spazio vettoriale V, due sottospazi U e W si dicono *complementari* se $V = U \oplus W$. Equivalentemente, se ogni vettore $v \in V$ si può scrivere in modo unico come $v = u + w$, per opportuni $u \in U$ e $w \in W$. Si noti anche che, in tal caso, $U \cap W = \{0_V\}$.

Inoltre sono definite due applicazioni lineari, dette *proiezioni*,

$$\pi_1 : V \to U, \quad \text{data da} \quad v = u + w \mapsto u$$

e

$$\pi_2 : V \to W, \quad \text{data da} \quad v = u + w \mapsto w.$$

Vediamo come rileggere queste nozioni nella Geometria affine.

Definizione 1.11.2. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale $V = U \oplus W$ e sia $S = Q + W$ un sottospazio affine di giacitura W. Diciamo *proiezione su S parallela a U* l'applicazione

$$p_U : \mathbb{A} \longrightarrow S, \quad \text{data da} \quad P \mapsto (P + U) \cap S.$$

In modo del tutto analogo, posto $S' = Q' + U$, si definisce la *proiezione su S' parallela a W*.

Esempio 1.11.1. In $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, spazio affine su $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$, dove $U = \langle(1,0)\rangle$ e $W = \langle(0,1)\rangle$, posto $S(= W)$ l'asse y, la proiezione su S parallela a U è

$$p_U(x,y) = y.$$

Se invece poniamo $S'(= U)$ l'asse x, la proiezione su S' parallela a W è

$$p_W(x,y) = x.$$

Proposizione 1.11.7. *Con le notazioni precedenti, l'applicazione p_U è ben definita ed è un'applicazione affine avente π_2 come parte lineare.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.2.4, $(P+U) \cap (Q+W) \neq \emptyset$, in quanto $U + W = V$, e inoltre

$$\dim((P+U) \cap (Q+W)) = \dim_K U + \dim_K W - n = 0.$$

Pertanto p_U è ben definita.
Resta da provare che, comunque scelti $A, B \in \mathbb{A}$, si ha $p_U(B) - p_U(A) = \pi_2(B-A)$. Tale verifica è lasciata come esercizio. *(Traccia: osservare dapprima che ogni punto $P \in \mathbb{A}$ si può scrivere come $P = Q + v$ per un opportuno $v \in V = U \oplus W$; quindi $P = Q + u + w$. Si dimostri che $p_U(P) = Q + w$...)*
□

Ora possiamo studiare le equazioni di una proiezione. Per fare questo, conviene introdurre le estensioni delle proiezioni a tutto lo spazio affine. Per semplicità consideriamo lo spazio affine numerico $\mathbb{A}^n_K$ su K^n, con riferimento affine standard $(O, \mathcal{E})$, dove $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ è la base canonica di K^n. Non è restrittivo supporre $U = \langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ e $W = \langle e_{r+1}, \ldots, e_n\rangle$. Sia infine $S = Q + W$, ove $Q = (q_1, \ldots, q_n)$.

Definiamo dunque

$$P_U : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n, \quad \text{data da} \quad P \mapsto (P+U) \cap S.$$

La sua parte lineare è

$$\Pi_2 : K^n = U \oplus W \longrightarrow K^n = U \oplus W, \quad \text{data da} \quad v = u + w \mapsto w.$$

Ovvero

$$\Pi_2 : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto (0, \ldots, 0, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Si osservi che $P_U(Q) = (Q+U) \cap S = Q$, dunque per ogni $P \in \mathbb{A}^n$

$$P_U(P) = Q + \Pi_2(P - Q).$$

Pertanto, se il generico punto $P \in \mathbb{A}^n$ ha coordinate $P = (x_1, \ldots, x_n)$ allora

$$P_U : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (q_1, \ldots, q_n) + \Pi_2((x_1, \ldots, x_n) - (q_1, \ldots, q_n))$$

cioè

$$P_U : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (q_1, \ldots, q_n) + (0, \ldots, 0, x_{r+1} - q_{r+1}, \ldots, x_n - q_n)$$

e quindi

$$P_U : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (q_1, \ldots, q_r, x_{r+1}, \ldots, x_n).$$

1.12 Spazi affini reali

Se il campo K relativo a uno spazio affine è il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali, oltre a tutto quanto visto in precedenza, si danno nozioni e risultati ulteriori, possibili in quanto $\mathbb{R}$ è dotato di una relazione d'ordine che lo rende un *campo ordinato*.

Definizione 1.12.1. Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V, diremo che $\mathbb{A}$ è uno *spazio affine reale*. In particolare, se $n = \dim(\mathbb{A})$, si può supporre che $\mathbb{A} = \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$.

Un primo fatto peculiare di tali spazi è il seguente. Abbiamo menzionato nel paragrafo precedente la nozione di collineazione (cioè di applicazione biunivoca $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tale che, per ogni retta $L \subset \mathbb{A}$ anche $f(L)$ è una retta) e abbiamo provato che ogni affinità è una collineazione (vedi Corollario 1.11.3). Nel caso degli spazi affini reali di dimensione almeno 2 vale anche il viceversa (non proveremo questo risultato).

Introduciamo ora alcune nozioni specifiche degli spazi affini reali e vediamo quali di queste si mantengono per affinità.

D'ora in poi, in questo paragrafo, con $\mathbb{A}$ denoteremo uno spazio affine reale su un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V.

Definizione 1.12.2. La *semiretta di origine* $Q \in \mathbb{A}$ *e direzione* $v \in V \setminus \{0_V\}$ è l'insieme

$$\{P \in \mathbb{A} \mid P = Q + tv,\ t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}.$$

Chiaramente tale semiretta è contenuta nella retta $Q + \langle v \rangle$.

Si prova facilmente che l'immagine per affinità di una semiretta è ancora una semiretta. La dimostrazione è analoga a quella della seguente Proposizione 1.12.1.

Definizione 1.12.3. Diciamo *segmento di estremi* $Q, R \in \mathbb{A}$ l'insieme

$$\overline{QR} := \{P \in \mathbb{A} \mid P = Q + t(R - Q),\ t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Esercizio A12. Provare che $\overline{QR} = \overline{RQ}$.

Esercizio A13. È vero che $\overline{QR}$ si può scrivere anche come $\{P \in \mathbb{A} \mid P = Q + t(Q - R),\ t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}$? In caso negativo, esibire un controesempio numerico.

Proposizione 1.12.1. *Sia* $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ *e* $Q, R \in \mathbb{A}$ *siano due punti qualunque. Allora* $f(\overline{QR}) = \overline{f(Q)f(R)}$. *In altre parole, l'immagine per affinità di un segmento è ancora un segmento, avente per estremi le immagini degli estremi del segmento di partenza.*

Dimostrazione. " $\subseteq$ " Si denoti con $\varphi \in GL(V)$ la parte lineare di f. Se $P \in \overline{QR}$ allora $P = Q + t(R - Q)$ per un opportuno $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 1$. Dunque $P - Q = t(R - Q) \in V$ ed essendo φ lineare si ha

$$\varphi(P - Q) = t\varphi(R - Q).$$

D'altro canto, essendo f un'affinità di parte lineare φ, si ha

$$f(P) - f(Q) = \varphi(P - Q).$$

Dalle due precedenti relazioni si ottiene immediatamente che

$$f(P) - f(Q) = t\varphi(R - Q) = t(f(R) - f(Q))$$

e quindi

$$f(P) = f(Q) + t(f(R) - f(Q))$$

cioè $f(P) \in \overline{f(Q)f(R)}$. Quindi la prima inclusione è dimostrata.
" $\supseteq$ " Basta applicare l'inclusione appena dimostrata all'affinità f^{-1} e al segmento di estremi $f(R)$ e $f(Q)$, ottenendo che

$$f^{-1}(\overline{f(Q)f(R)}) \subseteq \overline{f^{-1}(f(Q))f^{-1}(f(R))} = \overline{QR}.$$

Applicando infine f ad ambo i membri si ottiene la tesi. $\square$

Si può definire il *punto medio* di un segmento $\overline{QR}$ (anche se il termine non ha alcuna valenza metrica, che assumerà invece negli spazi euclidei!) quel punto M definito da

$$M := Q + \frac{1}{2}(R - Q)$$

Esercizio A14. Provare che il punto medio M del segmento $\overline{QR}$ verifica le uguaglianze vettoriali

$$(M - Q) + (R - M) = R - Q \quad \text{e} \quad M - Q = R - M.$$

Esercizio A15. Provare che il punto medio M di un segmento $\overline{QR}$ viene preservato dalle affinità, cioè che, se $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ allora $f(M)$ è il punto medio del segmento $f(\overline{QR})$.

La naturale generalizzazione della nozione di segmento a una "dimensione" maggiore è la seguente.

Definizione 1.12.4. Se $A, B, C \in \mathbb{A}$ sono tre punti non allineati, diciamo *triangolo di vertici* A, B, C l'insieme

$$\overline{ABC} := \{P \in \mathbb{A} \mid P = A + t(B - A) + u(C - A),\ t, u \in \mathbb{R}_+, t + u \leq 1\}$$

dove $\mathbb{R}_+$ denota l'insieme dei numeri reali non negativi.

In modo analogo a quanto visto nella Proposizione 1.12.1, si prova il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 1.12.2. *Se $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ e $A, B, C \in \mathbb{A}$ sono tre punti non allineati, allora $f(\overline{ABC}) = \overline{f(A)f(B)f(C)}$. In altre parole, l'immagine per affinità di un triangolo è ancora un triangolo, avente per vertici le immagini dei vertici del triangolo di partenza.*

Si possono generalizzare le nozioni di segmento (con 2 estremi) e di triangolo (con 3 vertici) a un oggetto determinato da un insieme (sufficientemente generale) di punti . Si definisce infatti *k-simplesso* di vertici $A_0, \ldots, A_k$ (dove tali punti sono affinemente indipendenti e dunque necessariamente $k \leq n$) l'insieme

$$\left\{ P \in \mathbb{A} \mid P = A_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i(A_i - A_0),\ t_i \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^{k} t_i \leq 1 \right\}.$$

Un'altra nozione tipica degli spazi affini reali è quella di convessità.

Definizione 1.12.5. Un insieme $X \subseteq \mathbb{A}$ si dice *convesso* se, comunque scelti $A, B \in X$, il segmento di estremi A e B è contenuto in X.

Esercizio A16. Provare che un segmento è convesso.

Esercizio A17. Provare che un triangolo è convesso.

Osservazione 1.12.1. L'unione di due sottospazi affini $L, M \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ è convessa se e solo se $L \subset M$ oppure $M \subset L$.

La convessità è una proprietà affine, come provato nel seguente risultato.

Teorema 1.12.3. *Sia $X \subseteq \mathbb{A}$ un insieme convesso e sia $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$. Allora $f(X)$ è convesso.*

Dimostrazione. Siano $f(A), f(B) \in f(X)$ due punti qualunque. Vogliamo provare che

$$\overline{f(A)f(B)} \subseteq f(X).$$

Poiché $A, B \in X$ e X è convesso per ipotesi, allora $\overline{AB} \subseteq X$. Pertanto $f(\overline{AB}) \subseteq f(X)$. Ma, per la Proposizione 1.12.1, si ha

$$f(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}$$

e dunque la tesi. □

Appendice - Cenni sul rango di una matrice

Sia K un campo e $A \in K^{m,n}$ una matrice $m \times n$.

Definizione 1.12.6. Se $p \leq \min\{m, n\}$, si dice *minore di ordine* p *di* A una sua sottomatrice $p \times p$ ottenuta intersecando p righe e p colonne di A.
Un minore M di ordine p di A si dice *degenere* se $\det(M) = 0$. Altrimenti si dice *non degenere*.

Definizione 1.12.7. Se M è un minore di ordine p di A si dice *minore orlato di* M un minore di A di ordine $p+1$ che contiene M.

Esempio 1.12.1. Sia

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Un minore di ordine 2 di A è

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

I suoi minori orlati sono 2, e precisamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Un altro minore di ordine 2 di A è

$$N := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

I suoi minori orlati sono 2, e precisamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Le seguenti "definizioni" equivalenti possono essere usate, in modo opportuno, per determinare il rango di una matrice.

Proposizione 1.12.4. *Se $A \in K^{m,n}$, i seguenti numeri interi sono uguali e tale numero è detto* rango di A.

- *Il massimo numero di righe di A linearmente indipendenti.*
- *Il massimo numero di colonne di A linearmente indipendenti.*
- *Il numero dei pivot di una matrice ridotta (a scalini) ottenuta da A mediante riduzione per righe.*
- *Il massimo ordine di un minore non degenere di A.*
- *L'ordine di un minore non degenere i cui minori orlati sono tutti degeneri (vedi* Teorema degli orlati*).*