

# ES.) PARTICELLA IN CAMPO MAGNETICO COSTANTE

Prendiamo particelle di carica  $e^-$  in campo magnetico cost.

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \quad \leftarrow \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{con} \quad \vec{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -By \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

↑ in base  
{ $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ }

Abbiamo visto che la Lagrangiana è data da

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - e \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} \quad (\text{teniamo } \vec{E} = 0)$$

Quo  $A$  è dato da (\*), abbiamo

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{eB}{2} (x \dot{y} - y \dot{x})$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{eB}{2} (x \dot{y} - y \dot{x})$$

Passiamo a coord CILINDRICHE  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$

$$\Rightarrow x \dot{y} - y \dot{x} = r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi) - r \sin \varphi (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)$$

$$= r^2 \dot{\varphi}$$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{eB}{2} r^2 \dot{\varphi}$$

→ In queste coordinate ci accorgiamo che c'è una  
COORDINATA CICLICA  $\varphi$

Possiamo usare la coord. ciclica  $\varphi$  per ridurre il problema:

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} - \frac{eB}{2} r^2 \quad \text{chiamiamo q la costante } l$$

$$\rightarrow \dot{\varphi} = \frac{l}{m r^2} + \frac{eB}{2m} \quad (*)$$

$$\begin{aligned}
L^* &= L(r, \dot{\varphi}, \dot{z}) - \dot{\varphi} P_{\dot{\varphi}} \\
&= \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} \dot{z}^2 + \frac{m}{2} r^2 \left( \frac{\dot{\varphi}}{mr^2} + \frac{eB}{2m} \right)^2 - \frac{eB r^2}{2} \left( \frac{\dot{\varphi}}{mr^2} + \frac{eB}{2m} \right) \\
&\quad - l \left( \frac{\dot{\varphi}}{mr^2} + \frac{eB}{2m} \right) = \\
&= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + \left( \frac{l}{mr^2} + \frac{eB}{2m} \right) \left[ \frac{l}{2} + \frac{eB r^2}{4} - \frac{eB r^2}{2} - l \right] \\
&= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2mr^2} \left( l + \frac{eB r^2}{2} \right)^2
\end{aligned}$$

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{2mr^2} \left( l + \frac{eB r^2}{2} \right)^2 = \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{eB l}{2m} + \frac{(eB)^2 r^2}{8m}$$

Possiamo studiare questo potenziale.

$$V_{eff}'(r) = -\frac{l^2}{mr^3} + \frac{e^2 B^2}{4m} r$$

$$V_{eff}'(r) = 0 \quad \text{quando} \quad r^4 = \frac{4l^2}{(eB)^2} \quad \leadsto \quad r_* = \sqrt{\frac{2l}{eB}}$$

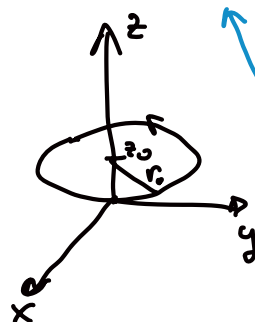
$$V_{eff}''(r) = \frac{3l^2}{mr^4} + \frac{e^2 B^2}{4m} \quad \rightarrow \quad V_{eff}''(r_*) = \frac{(eB)^2}{m}$$

Esiste traiettoria con  $z(t) = z_0$   $r(t) = r_*$

vediamo cos'è  $\varphi(t)$ , usando  $\dot{\varphi}(t) = \frac{l}{mr(t)^2} + \frac{eB}{2m}$  e  $r(t) = r_*$

$$\leadsto \dot{\varphi}(t) = \frac{eB}{m} \quad \rightarrow \quad \varphi(t) = \left( \frac{eB}{m} \right) t + \varphi_0$$

$\rightarrow$  TRAIETTORIA CIRCOLARE



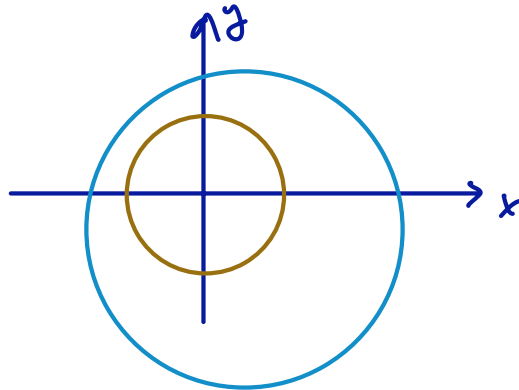
$\nwarrow$  PERIODO (tempo  $\varphi$  va da 0 a  $2\pi$ ):

$$\frac{2\pi m}{eB}$$

FREQUENZA ANGOLARE DI CICLOTRONE

Noi sappiamo che una carica in campo magnetico cost.,  
se  $\vec{v}_0 \perp \mathbf{B}$ , compie sempre una traiettoria circolare.

Il fatto è che in qt. coord. polari, le altre traiettorie  
circolari sono difficili da vedere, perché  $r(t)$  e  $\varphi(t)$   
sono funzioni non banali di  $t$ :



Solo quando scegliamo  
l'origine del sist. di  
rif. come il centro  
della traiettoria  
circolare, abbiamo  
 $r(t) = r_0$   $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$

Osservazione: Quanto visto finora (cioè la relazione tra coordinate cicliche e cost. del moto) può essere formulato nel seguente modo. Prendiamo  $q_c$  coord. cicliche:

-  $L$  invariante sotto la seguente transf.

$$\bar{q} \mapsto \bar{q}' = \bar{\Phi}(\alpha, \bar{q})$$

$$\dot{\bar{q}} \mapsto \dot{\bar{q}}' = \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}})$$

dove (nel caso sopra)

$$\Phi_n(\alpha, \bar{q}) = q_n + \alpha \delta_{ne} \quad (*)$$

$$\Psi_n(\alpha, \bar{q}) = \dot{q}_n$$

$L$  indep.  $q_c \iff L$  è INVARIANTE sotto la transf. (\*)

$\Downarrow$   
 $\exists$  cost. del moto  
 (suo mom. con.)

$$L(\bar{\Phi}(\alpha, \bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}), t) = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Legge di conservazione  
 ( $\exists$  cost. del moto)



Proprietà di INVARIANZA di  $L$   
 (SINMETRIA)

## Prop. TEOREMA DI NÖTHER

Sia  $\bar{q} \mapsto \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q})$  una trasformazione di simmetria CONTINUA\*  
(una famiglia di diffeomorfismi locali dipendenti da  
un parametro  $\alpha$ )

che sia definita e differenziabile in  $\alpha$  in  
un intorno di  $\alpha = 0$ , e soddisfacente

$$\bar{\Psi}(0, \bar{q}) = \bar{q}$$

$$\text{Inoltre sia } \dot{\bar{q}} \mapsto \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \sum_k \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k$$

\* [ES]    trasf. continue     $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad \alpha \in [0, 2\pi]$   
            trasf. discrete     $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha q_1 \\ \alpha q_2 \end{pmatrix} \quad \alpha = 1, -1$  ]

Se per ogni scelta di  $\bar{q}$ ,  $\dot{\bar{q}}$  e  $\alpha$  risulta che

$$L(\bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}), t) = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \quad **$$

allora la funzione (variabile d'azione)

$$P(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}_m(0, \bar{q})}{\partial \alpha} p_m(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \quad p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}$$

è una COSTANTE DEL MOTO per le eq. di  
Lag. associate a  $L$ .

[\*\* ES]  $L$  invariante sotto rotazioni

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{m\omega^2}{2} (q_1^2 + q_2^2)$$

$$\bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \bar{q} = \begin{pmatrix} \cos \alpha q_1 + \sin \alpha q_2 \\ -\sin \alpha q_1 + \cos \alpha q_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \dot{\bar{q}}$$

$$\begin{aligned} L(\bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}})) &= \frac{\mu}{2} \left( (\cos \alpha \dot{q}_1 + \sin \alpha \dot{q}_2)^2 + (-\sin \alpha \dot{q}_1 + \cos \alpha \dot{q}_2)^2 \right) \\ &\quad - \frac{\mu \omega^2}{2} \left( (\cos \alpha q_1 + \sin \alpha q_2)^2 + (-\sin \alpha q_1 + \cos \alpha q_2)^2 \right) \\ &= \frac{\mu}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{\mu \omega^2}{2} (q_1^2 + q_2^2) = \\ &= L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \end{aligned}$$

Dim del teorema di Noether.

$$L(\bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}), t) = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \quad \swarrow \text{indip da } \alpha$$

Derivo entrambi i membri  $\mu \frac{d}{d\alpha}$  e alla fine faccio  $\alpha=0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\alpha} L(\bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}), t) \Big|_{\alpha=0} = \psi_h = \sum_k \frac{\partial \psi_h}{\partial q_k} \dot{q}_k \\ &= \sum_{h=1}^m \left[ \frac{\partial L(\bar{\Psi}, \bar{\Psi}, t)}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \psi_h(\alpha, \bar{q})}{\partial \alpha} + \frac{\partial L(\bar{\Psi}, \bar{\Psi}, t)}{\partial \dot{q}_h} \cdot \frac{\partial \psi_h(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}})}{\partial \alpha} \right] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{h=1}^m \left[ \frac{\partial L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \psi_h(0, \bar{q})}{\partial \alpha} + \frac{\partial L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}{\partial \dot{q}_h} \cdot \frac{\partial \psi_h(0, \bar{q}, \dot{\bar{q}})}{\partial \alpha} \right] \end{aligned}$$

Valutiamo il termine a destra dell'uguale (che è una funzione nelle  $2n+1$  variabili  $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t$ ) lungo un traiettoria che soddisfa le EQ. di LAGR. di L

$$0 = \sum_{h=1}^n \left[ \underbrace{\frac{\partial L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)}{\partial q_h}}_{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}} \frac{\partial \phi_h(0, \bar{q}(t))}{\partial \alpha} + \frac{\partial L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)}{\partial \dot{q}_h} \underbrace{\frac{\partial \psi_h(0, \bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t))}{\partial \alpha}}_{\sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{\partial \psi_h}{\partial \alpha} \right) \cdot \dot{q}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi_h}{\partial \alpha}} \right]$$

$$= \sum_{h=1}^n \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \right) \frac{\partial \phi_h}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi_h}{\partial \alpha} \right) \right] =$$

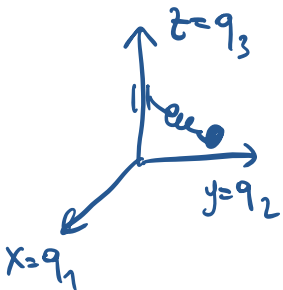
$$= \frac{d}{dt} \sum_{h=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \frac{\partial \phi_h}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \sum_{h=1}^n P_h(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) \frac{\partial \phi_h(0, \bar{q}(t))}{\partial \alpha}$$

soddisfano eq. di Lagr.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} P(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = 0 \Rightarrow P \text{ è cost. del moto. //}$$

ES. : INVARIANZA PER ROTAZIONI

$$L = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - \frac{m\omega^2}{2} (q_1^2 + q_2^2) - mgq_3$$



$L$  è invariante sotto ROTAZIONI nel piano  $xy$

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$\psi_3 = q_3 \quad \phi_3 = \dot{q}_3$$

$$P = \sum_{h=1}^3 \frac{\partial \phi_h(0, \bar{q})}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$$

$$\psi_1 = \cos \alpha q_1 + \sin \alpha q_2$$

$$\psi_2 = -\sin \alpha q_1 + \cos \alpha q_2$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = -\sin \alpha q_1 + \cos \alpha q_2 \Big|_{\alpha=0} = q_2$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = -\cos \alpha q_1 - \sin \alpha q_2 \Big|_{\alpha=0} = -q_1$$

$$\varphi_3 = q_3$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m \dot{q}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m \dot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = m \dot{q}_3$$

$$P = q_2 \cdot m \dot{q}_1 + (-q_1) \cdot m \dot{q}_2 + (0) - m \dot{q}_3 =$$

$$= m(\dot{q}_1 q_2 - \dot{q}_2 q_1) = -m \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ij3} q_i \dot{q}_j =$$

$$= - (\bar{q} \times m \dot{\bar{q}})_3 = - M_z$$

$$\bar{r} \times m \bar{v} = M$$

COMPONENTE DEL MOMENTO  
ANGOLARE LUNGO  
L'ASSE DI ROTAZIONE

→ Se un sistema (L) è invariante per ROTAZIONI attorno a un asse, la componente lungo tale asse del MOMENTO ANGOLARE è CONSERVATA lungo il moto

Invariante per  
ROTAZIONI



Conserv. del  
MOMENTO ANGOLARE

Invariante per  
TRASLAZIONI  
SPAZIALI



Conserv. della  
QUANTITA' DI MOTO

Invariante per  
TRASLAZIONI  
TEMPORALI



Conserv. dell'  
ENERGIA