

Università di Trieste
Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di
Progettazione e riabilitazione
Sismica delle Strutture

Modulo 1: Progettazione strutturale in zona sismica

MODELLAZIONE NON LINEARE

Prof. Ing. Natalino Gattesco

ANALISI DELLA STRUTTURA

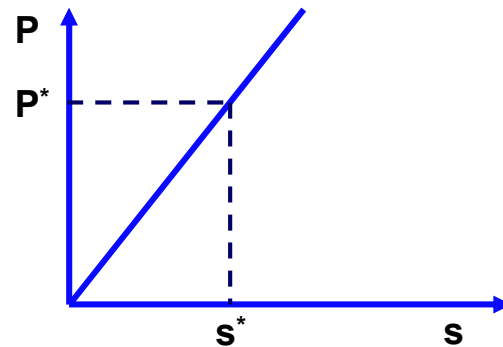
Il problema strutturale si può risolvere con un analisi lineare se:

- Il materiale di cui è composta la struttura è elastico lineare
- gli spostamenti sono piccoli: le equazioni di equilibrio si possono scrivere nella configurazione indeformata della struttura, trascurando il fatto che per la struttura l'equilibrio si instaura in una configurazione deformata
- I vincoli presenti nella struttura sono bilateri.

ANALISI LINEARE

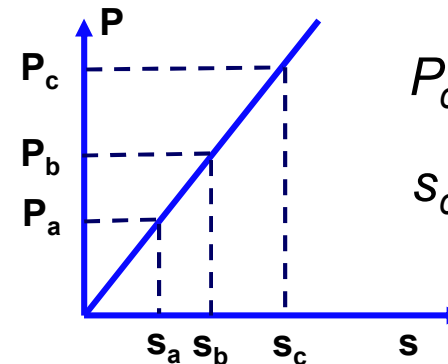
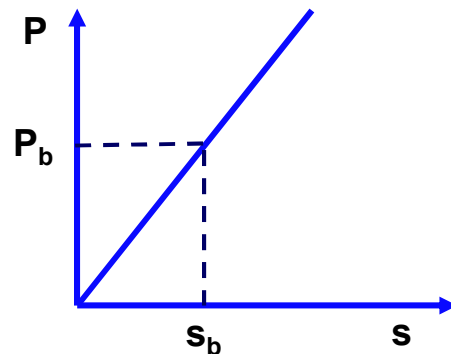
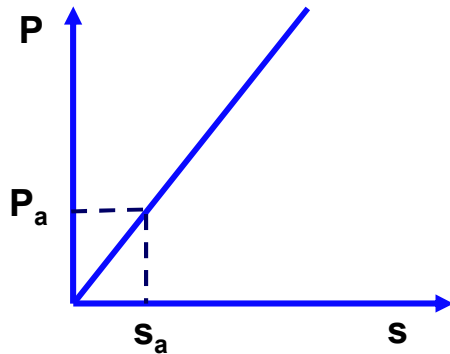
In queste condizioni si ha che:

- La soluzione del problema strutturale esiste ed è unica



$$P^* \Rightarrow s^*$$

- Vale il principio di sovrapposizione degli effetti



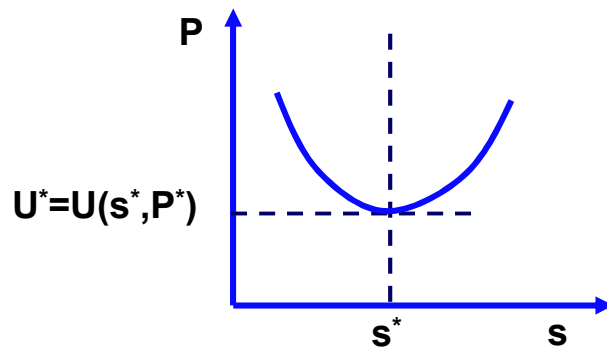
$$P_c = P_a + P_b$$

$$S_c = S_a + S_b$$

ANALISI LINEARE

In queste condizioni si ha che:

- **Il sistema strutturale**, inteso come struttura formata da materiale e insieme dei carichi agenti, **è conservativo** ed è definita l'energia potenziale totale U , che risulta essere minima nell'unico punto di stazionarietà, corrispondente all'equilibrio della struttura sotto il sistema di carichi assegnato



$$U^* = \min U(s, P)$$

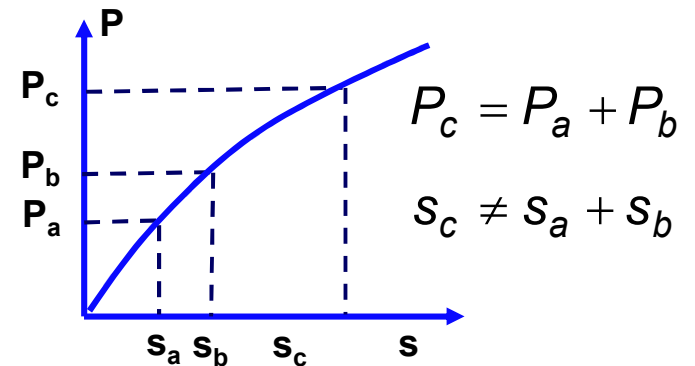
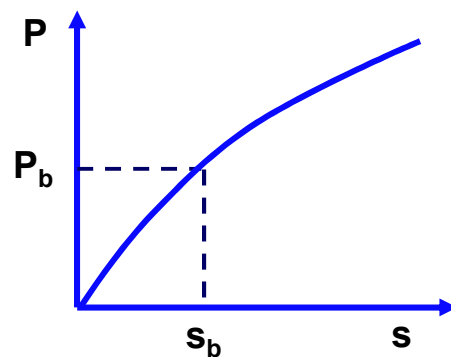
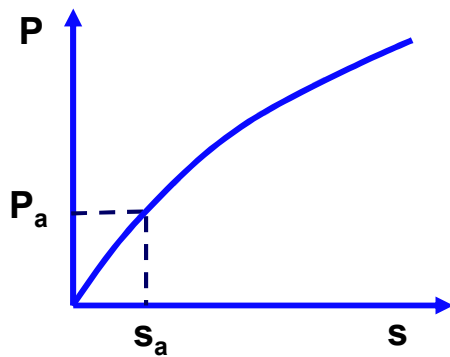
NON LINEARITA'

Le caratteristiche proprie della linearità possono essere alterate

- **Non linearità di materiale**, *il materiale di cui è composta la struttura risponde in modo differente al crescere della deformazione*
- **Non linearità geometrica**, *gli spostamenti che la struttura subisce non possono essere considerati piccoli e se ne deve tenere conto nella scrittura delle equazioni di equilibrio (effetti di second'ordine)*
- **Non linearità dei vincoli**, *le condizioni di vincolo della struttura si modificano al crescere del carico (es. vincoli unilateri)*

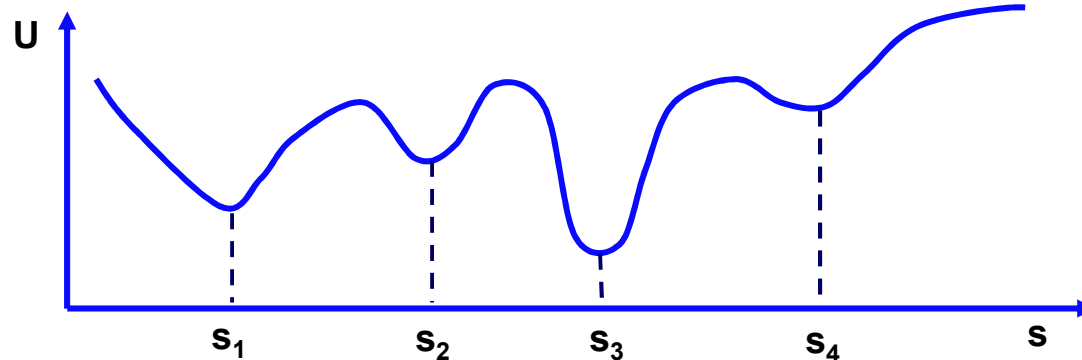
CONSEGUENZE NON LINEARITA'

- La soluzione del problema strutturale può non esistere
- Se la soluzione esiste può non essere unica
- Non vale il principio di sovrapposizione degli effetti



ENERGIA POTENZIALE TOTALE

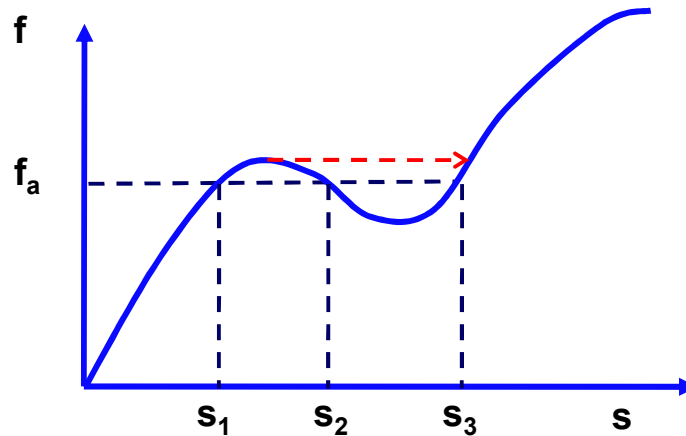
- In generale, **il sistema non è conservativo**, per cui non si può definire un'energia potenziale totale.
- **Se esiste la funzione energia potenziale totale, può presentare numerosi minimi**; questi minimi sono situazioni di equilibrio stabile, anche se solamente una s_3 è stabile in senso assoluto (minimo assoluto) mentre le altre sono metastabili, in quanto possono instabilizzarsi per effetto di una perturbazione più o meno intensa.



NON UNICITA'

La soluzione ottenuta per un problema non lineare, minimizzando l'energia potenziale totale o scrivendo direttamente le equazioni di equilibrio del metodo degli spostamenti, non essendo unica, non è detto che sia la soluzione cercata

Per individuare la soluzione cercata è quindi necessario utilizzare metodi di soluzione passo-passo



EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

Il problema strutturale affrontato utilizzando il metodo degli spostamenti, nel caso di sola non linearità meccanica dei materiali, è risolto con il sistema di equazioni di equilibrio

$$\Psi(s) = P(s) - f = 0$$

f è il vettore delle forze nodali equivalenti ai carichi

P è il vettore delle forze nodali interne (risposta della struttura)

Ψ è il vettore dello squilibrio ai nodi (out-of-balance vector)

Nel caso lineare il vettore *P* dipende linearmente dagli spostamenti ed il sistema ammette soluzione unica

$$K s = f$$

METODO DI NEWTON-RAPSON

Il metodo consiste nella soluzione di numerosi problemi lineari.
 Si sviluppa l'espressione dello squilibrio in serie di Taylor fino al prim'ordine

$$\Psi_{n+1}^{i+1} \equiv \Psi(s_{n+1}^{i+1}) \approx \Psi(s_{n+1}^i) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} \right)_{n+1}^i \cdot \delta s_n^i = 0$$

n rappresenta lo step di carico

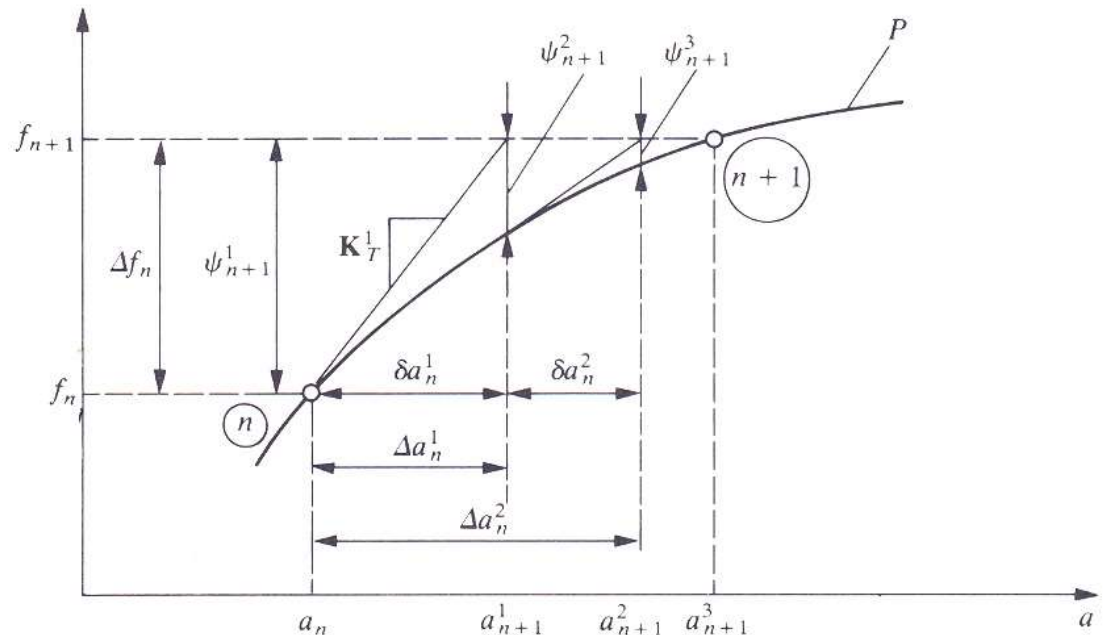
i rappresenta il contatore di iterazione

δs^i è la variazione di spostamento nell'iterazione i

$$\Psi_{n+1}^1 = \Delta f_n$$

$$f_{n+1} = f_n + \Delta f_n$$

$$s_{n+1}^1 = s_n$$



Nota: nel diagramma sono indicati con a gli spostamenti s .

METODO DI NEWTON-RAPSON

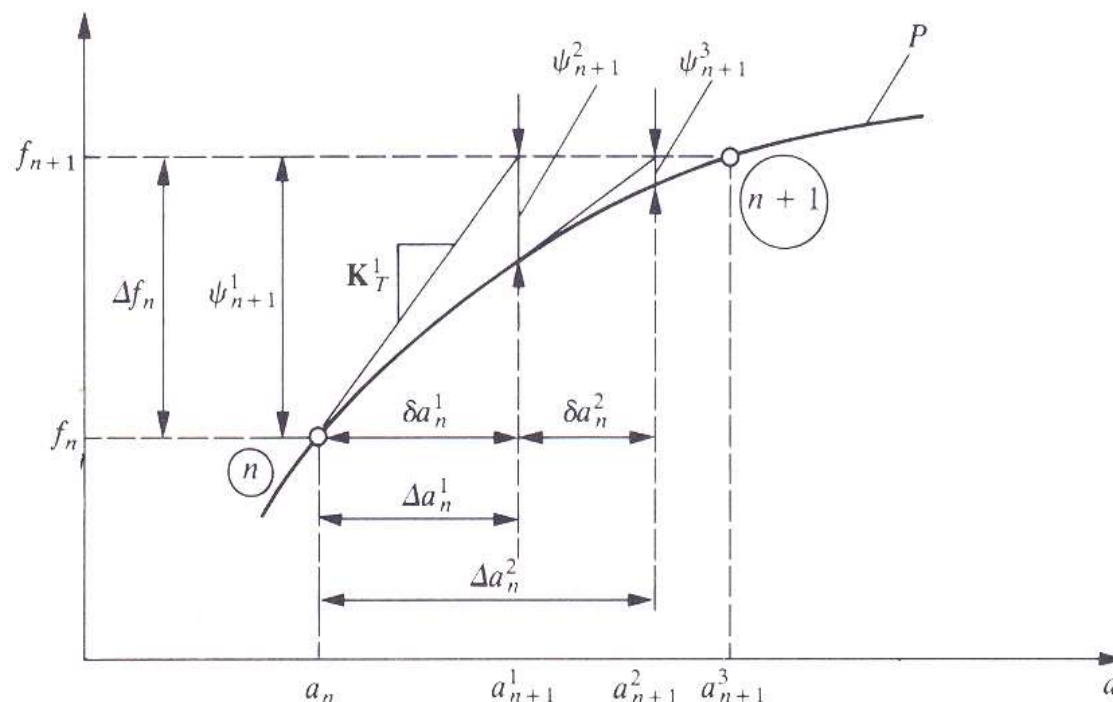
Sostituendo a Ψ la sua espressione si ottiene

$$\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{n+1}^i \delta s_n^i = -P(s_{n+1}^i) + f_n \quad K_{T(n+1)}^i = \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{n+1}^i$$

$$\delta s_n^i = -\left(K_{T(n+1)}^i\right)^{-1} \Psi_{n+1}^i$$

Stima dello spostamento totale all'iterazione (i+1)-esima

$$s_{n+1}^{i+1} = s_n + \Delta s_n^i = s_{n+1}^i + \delta s_n^i$$



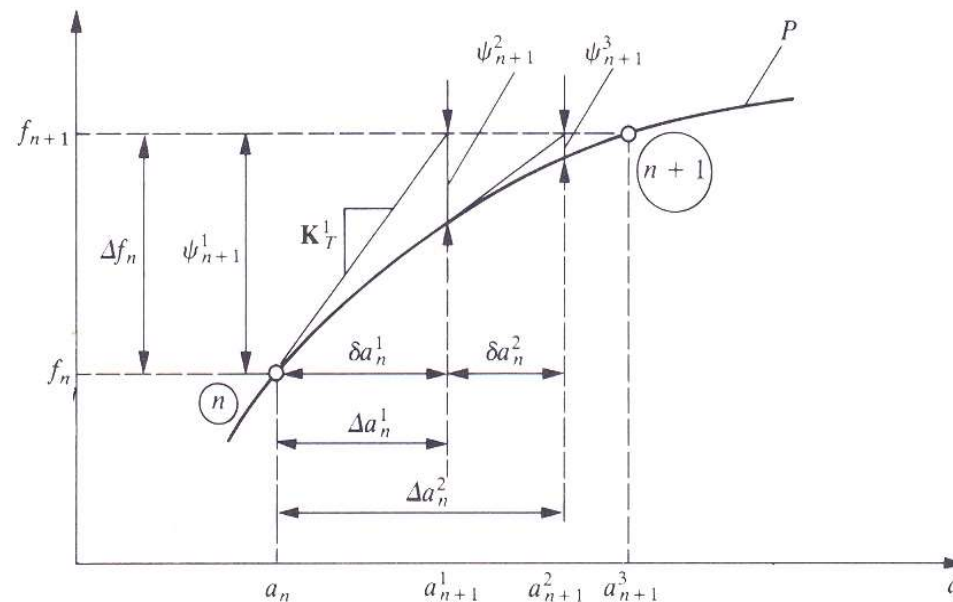
Nota: nel diagramma sono indicati con a gli spostamenti s .

METODO DI NEWTON-RAPSON

Pregi: convergenza rapida

Difetti: onere computazionale molto elevato per la richiesta di fattorizzazione della matrice di rigidezza ad ogni iterazione

Necessario ridurre il numero di volte che viene rifattorizzata la matrice del sistema risolvete



Nota: nel diagramma sono indicati con a gli spostamenti s .

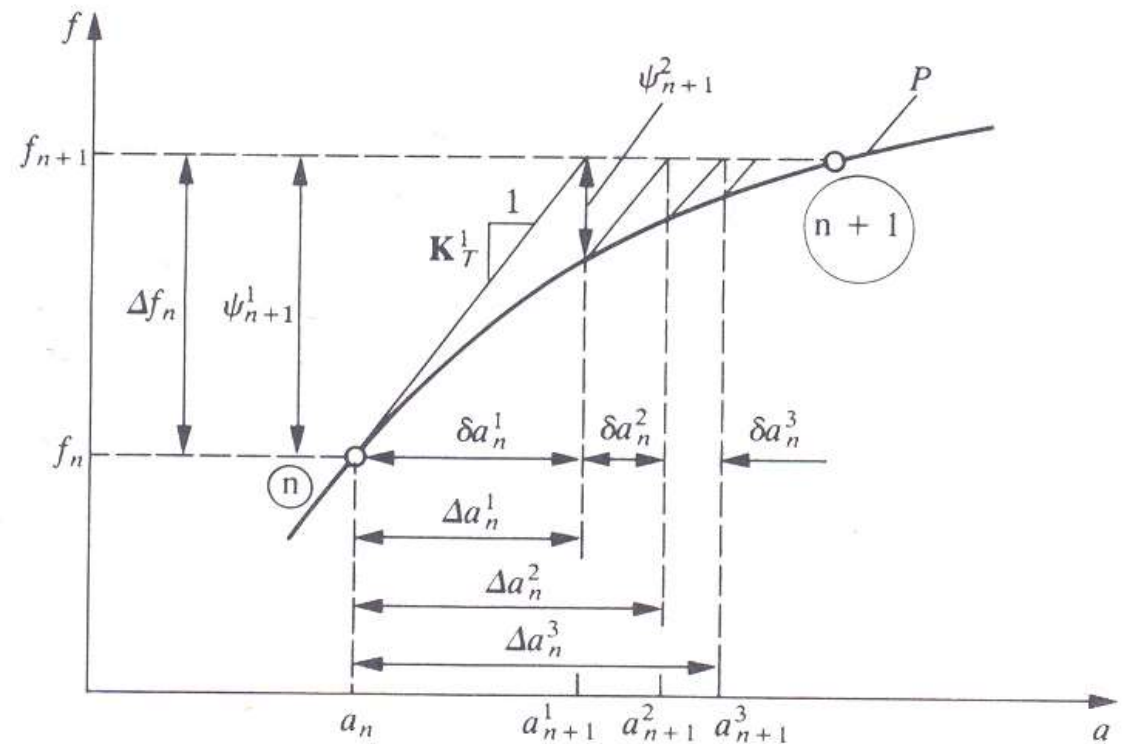
METODO DI NEWTON-RAPSON MODIFICATO

Matrice di rigidezza tangente mantenuta costante all'interno del passo di carico

$$K_{T(n+1)} = \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_{n+1}^1$$

Convergenza più lenta ma l'onere per la fattorizzazione della matrice globale è molto inferiore

Molti programmi di calcolo automatico per l'analisi non lineare utilizzano questo metodo



Nota: nel diagramma sono indicati con a gli spostamenti s.

METODI “ARC-LENGTH”

I metodi visti non convergono se si hanno problemi con ramo decrescente “softening”. In questi casi è necessario che il problema iterativo sia condotto a controllo di spostamento, oppure bisogna ricorrere ai metodi “*arc-length*”.

Se si considerano carichi proporzionali tra loro il sistema di equazioni di equilibrio può scriversi

$$\Psi_n = P(s_n) - \lambda_n f_0 = 0$$

$$s_{n+1} = s_n + \Delta s_n$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta \lambda_n$$

Il moltiplicatore dei carichi $\Delta \lambda_n$ costituisce un'incognita in più e quindi è richiesta un'ulteriore equazione

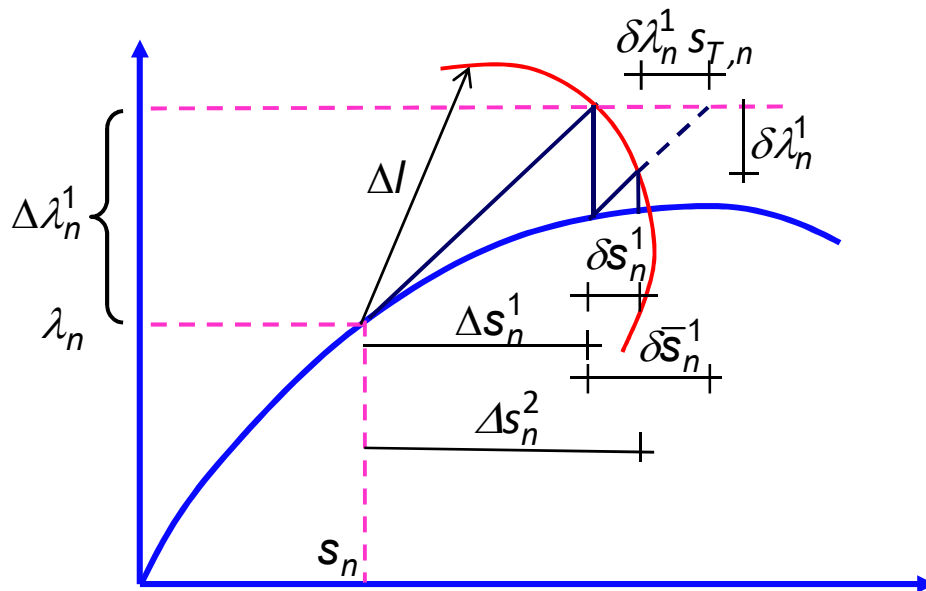
METODI “ARC-LENGTH”

Si assume che ogni incremento rispetti la relazione

$$\Delta s_n^T \Delta s_n + \Delta \lambda_n^2 f_0^T f_0 = \Delta l^2$$

dove Δl è una prescritta “lunghezza” nello spazio a N+1 dimensioni

In questo modo però il sistema perde la simmetria e non è più a banda. Si preferisce quindi adottare un procedimento



$$\delta \bar{s}_n^i = -K_T^{-1} \Psi(s_n^i, \lambda_n^i)$$

$$s_{T,n} = K_{T,n}^{-1} \Delta \lambda_n^1 f_0$$

$$\delta s_n^i = \delta \bar{s}_n^i + \delta \lambda_n^i s_{T,n}$$

$$\Delta s_n^{i+1} = \Delta s_n^i + \delta \bar{s}_n^i + \delta \lambda_n^i s_{T,n}$$

$$\Delta \lambda_n^{i+1} = \Delta \lambda_n^i + \delta \lambda_n^i$$

CRITERI DI CONVERGENZA

E' necessario fissare adeguate tolleranze per arrestare il processo iterativo.

$$\left\| \Psi(\mathbf{s}_{n+1}^{i+1}) \right\| \leq \varepsilon \left\| \mathbf{f}_{n+1} \right\|$$

Norma sullo squilibrio

Non funziona bene per K molto piccola

$$\left\| \mathbf{s}_{n+1}^{i+1} - \mathbf{s}_{n+1}^i \right\| \leq \varepsilon \left\| \mathbf{s}_{n+1}^{i+1} \right\|$$

Norma sugli spostamenti

Non funziona bene per K molto alta,
troppo restrittivo in altri casi

$$\left\| \Psi(\mathbf{s}_{n+1}^{i+1}) \mathbf{s}_{n+1}^{i+1} \right\| \leq \varepsilon \left\| \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{s}_{n+1}^{i+1} \right\|$$

Norma sul lavoro

Verificare che la norma a destra non
sia troppo piccola

$$\varepsilon = 1\% \div 0.1\%$$

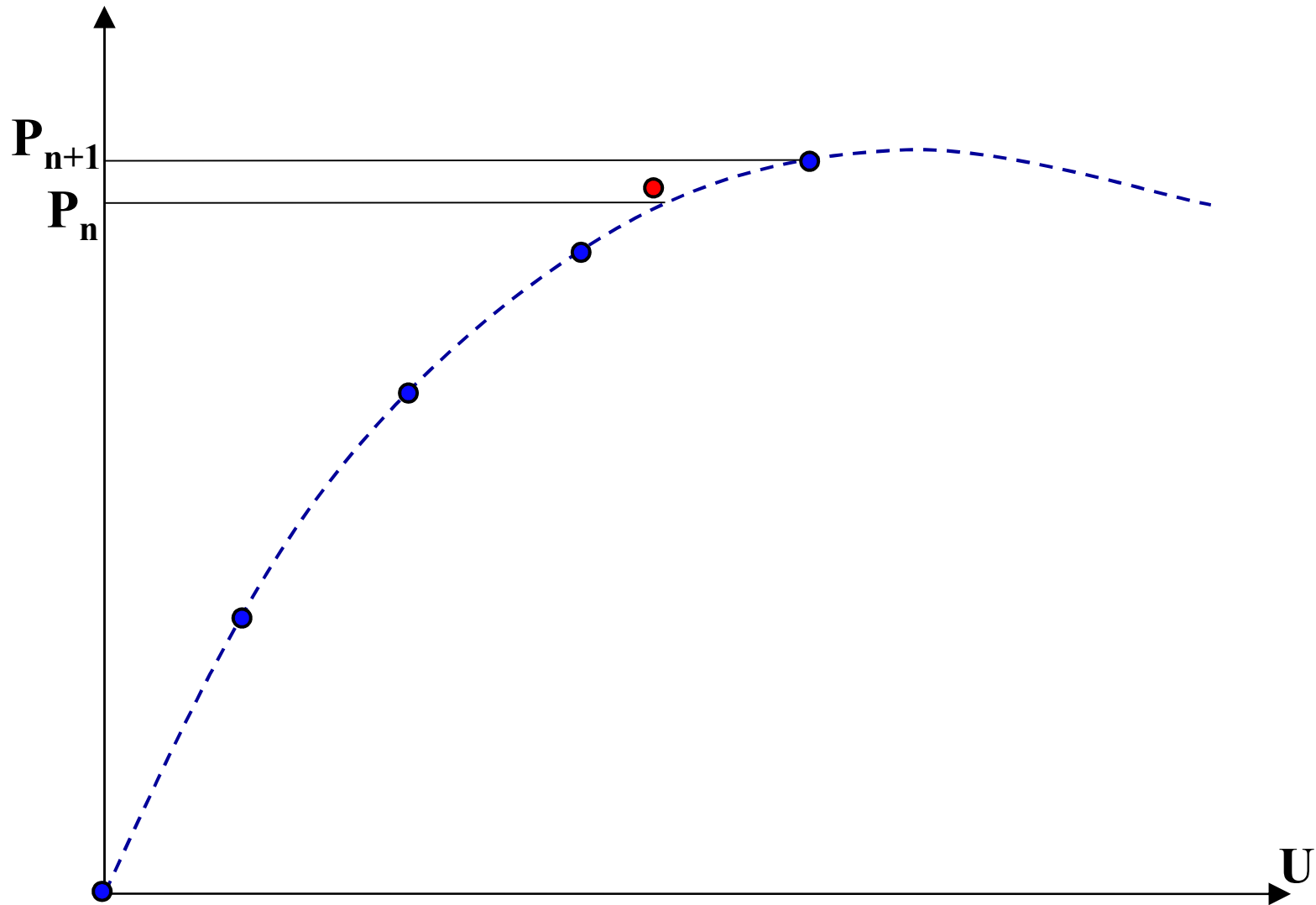
CONVERGENZA

- **Quante iterazioni all'interno di un passo di carico?**
 - I programmi fissano un limite di default e/o chiedono all'utente di fissarlo (per esempio $i \leq 10$)
 - Se il criterio di convergenza è soddisfatto con $i \leq 10$ il passo di carico è concluso e si incrementa il carico passando al passo successivo
 - Se il criterio di convergenza non è soddisfatto a $i = 10$, o il programma si ferma, o avanza segnalando però il problema, o avanza e non dice niente (!)

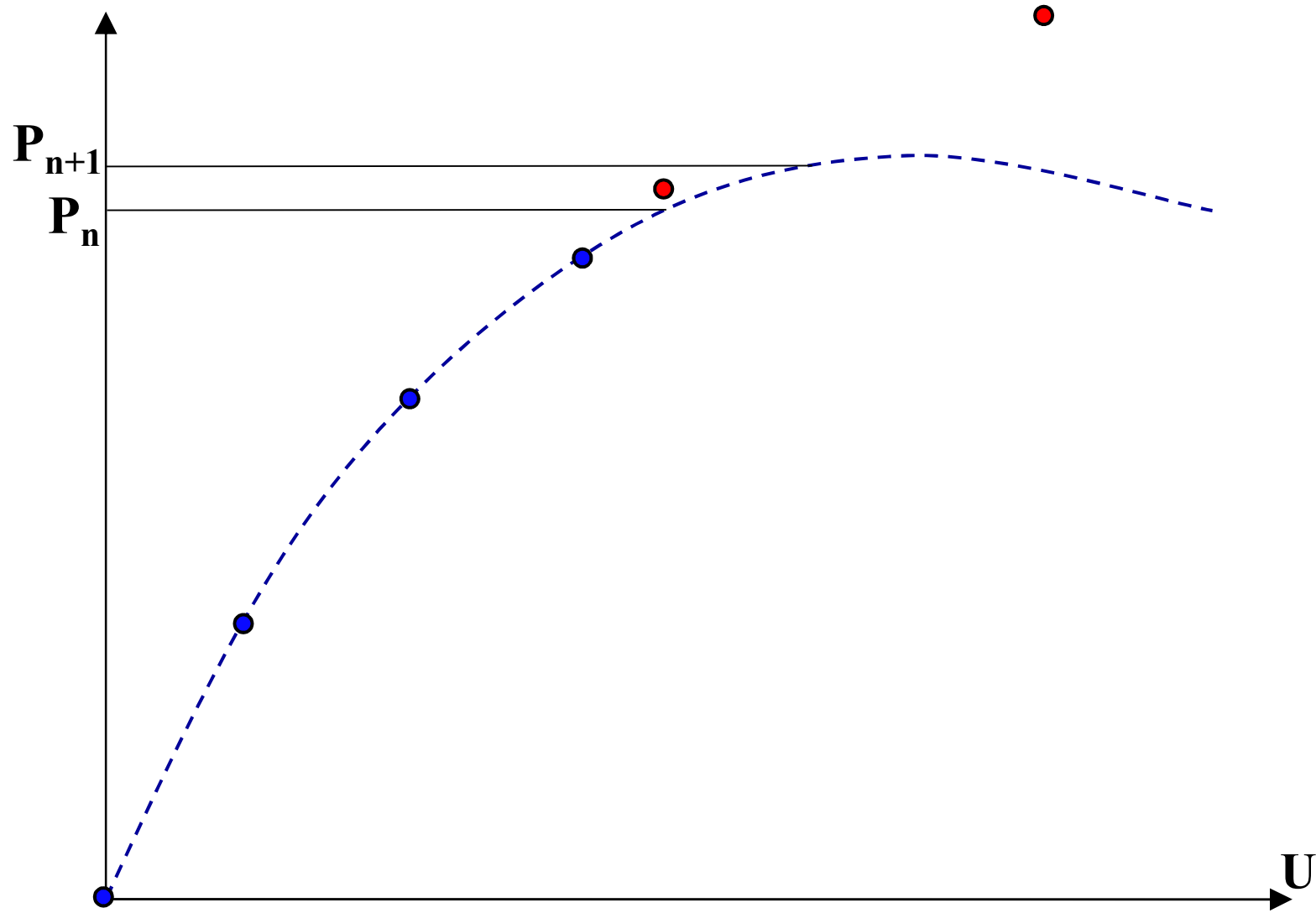
CONVERGENZA

- CONVEGENZA? **SI** → Avanza al passo di carico successivo
 $n=n+1$
- CONVERGENZA? **NO**
 - Il programma si ferma. Si ripete l'analisi rinfittendo il passo di carico
 - Alcuni programmi hanno il comando RESTART che permette di ripartire dall'ultimo punto di convergenza
 - Il programma continua segnalando o no il problema
 - Divergenza
 - Convergenza ritardata al passo successivo (controllare se convergenza su un altro ramo di equilibrio)

CONVERGENZA RITARDATA AL PASSO SUCCESSIVO



DIVERGENZA



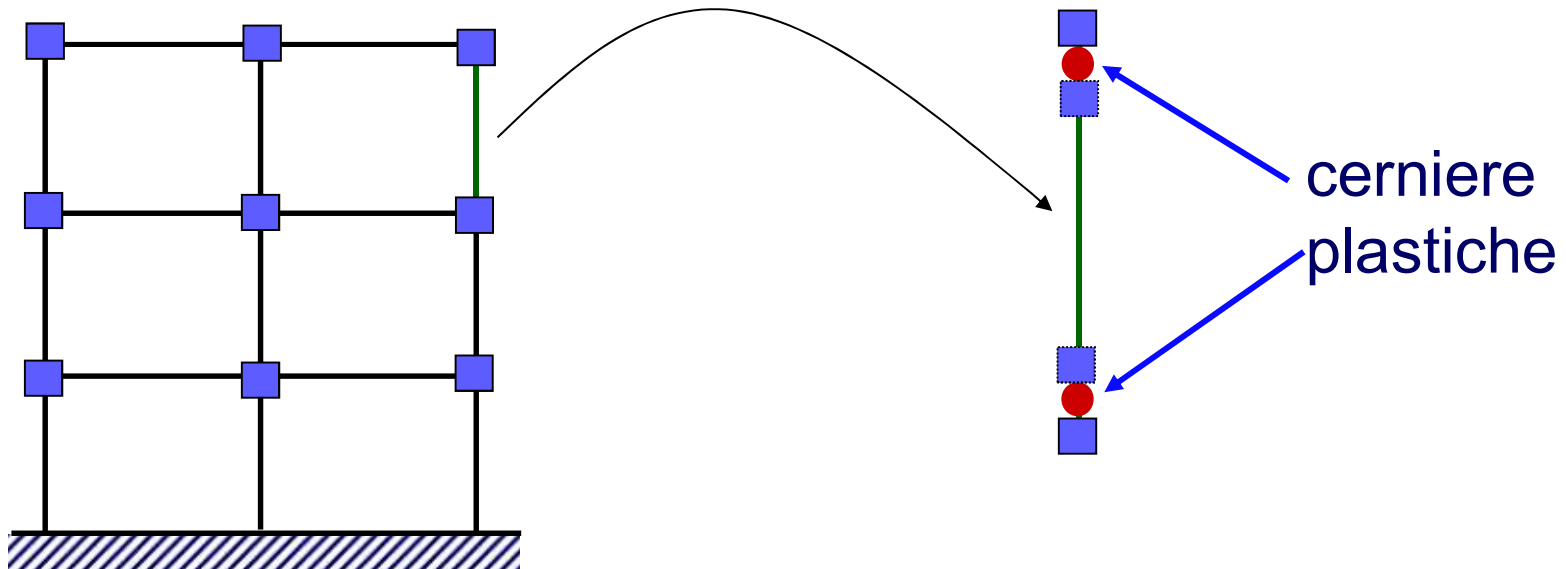
ANALISI NON LINEARE

Per la determinazione di un legame forza-spostamento generalizzato tra la risultante delle forze applicate (*taglio alla base*) e lo spostamento di un “*punto di controllo*” dell’edificio tenendo conto dell’effettivo comportamento della struttura si possono utilizzare diversi modelli non lineari.

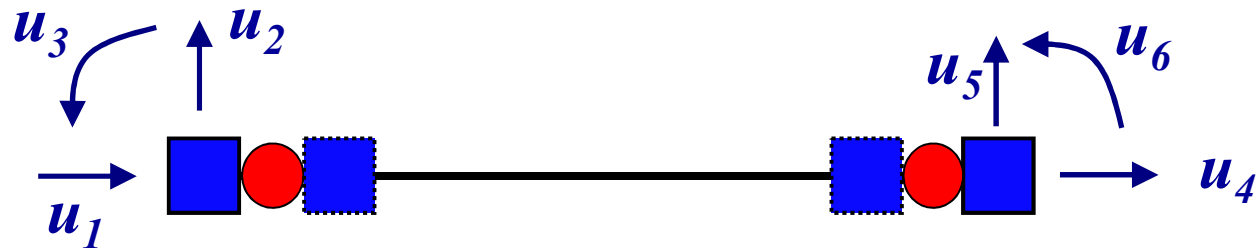
- **Elementi a Plasticità Concentrata**
- **Elementi a Plasticità Distribuita**

ELEMENTI A PLASTICITA' CONCENTRATA

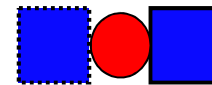
- Si concentrano le deformazioni plastiche della struttura in opportune zone caratterizzate da un legame rigido-plastico (cerniere plastiche)
- Si impiegano quindi elementi elastici ai quali sono collegati alle estremità elementi rigido-plastici che raccolgono tutte le non linearità dell'asta.



ELEMENTI A PLASTICITA' CONCENTRATA

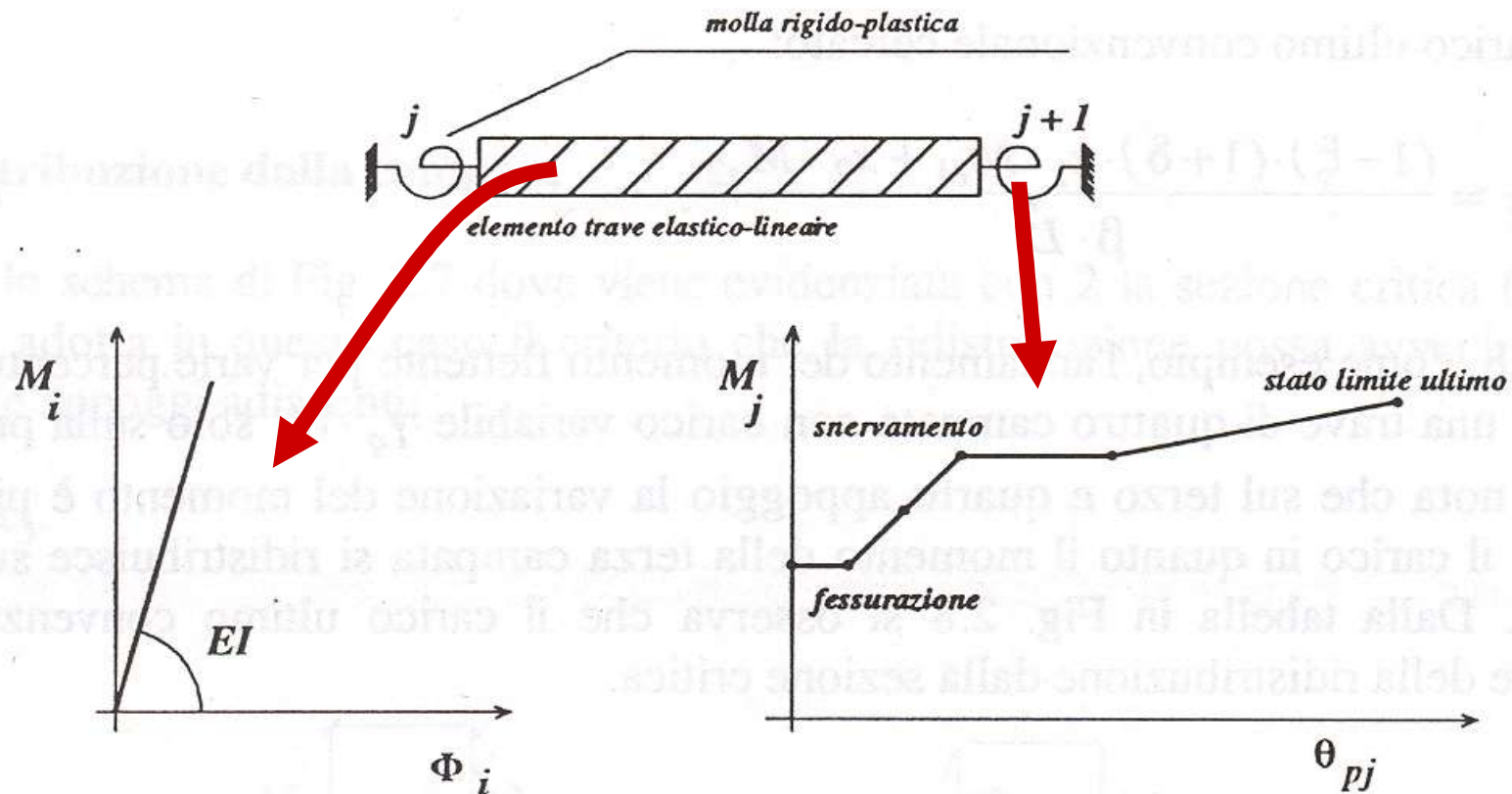


**elemento
lineare elastico**



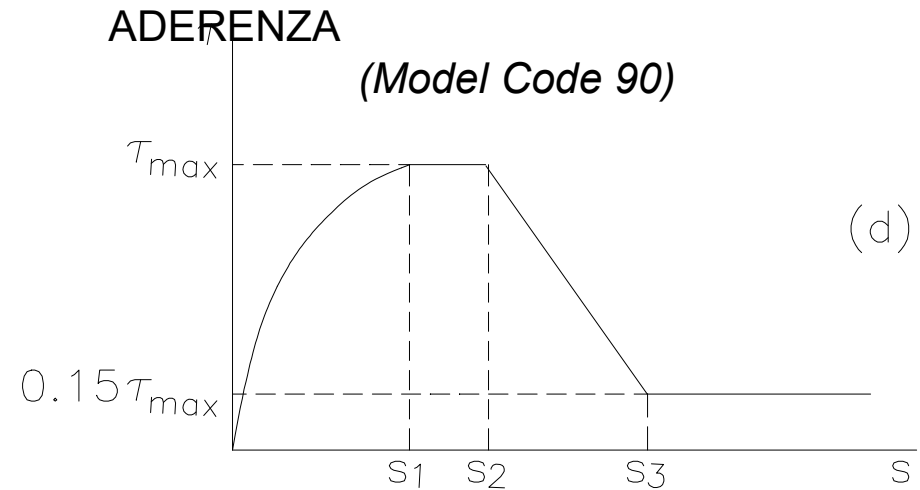
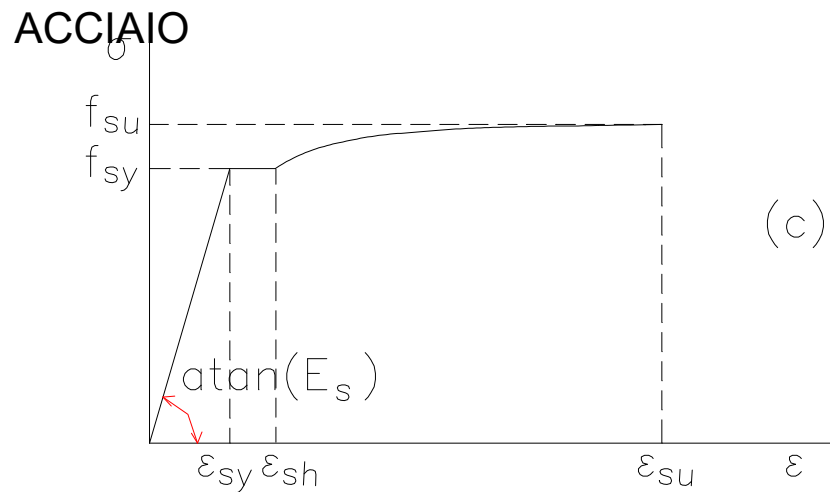
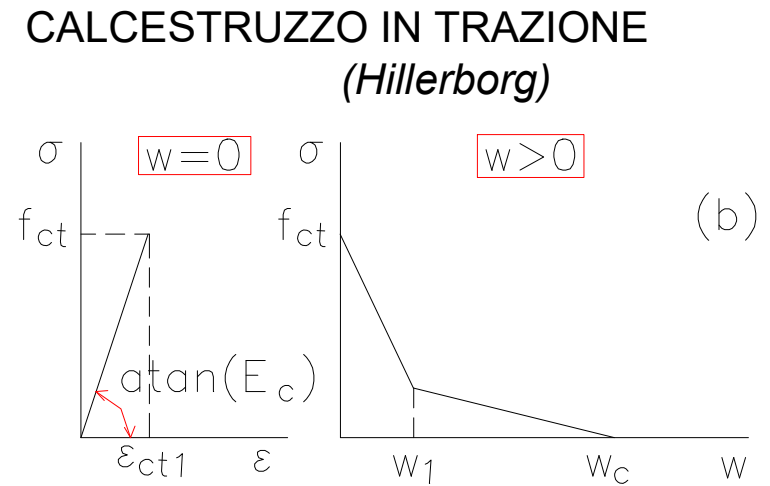
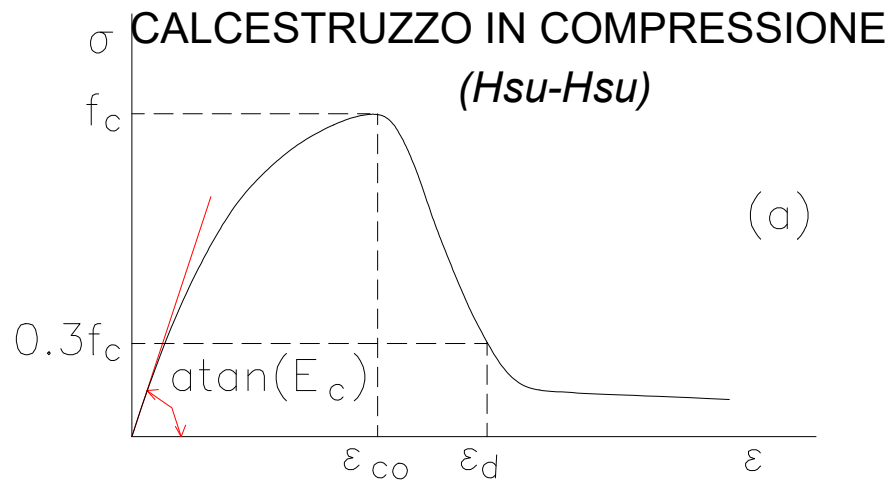
**cerniere
plastiche**

ELEMENTI A PLASTICITA' CONCENTRATA

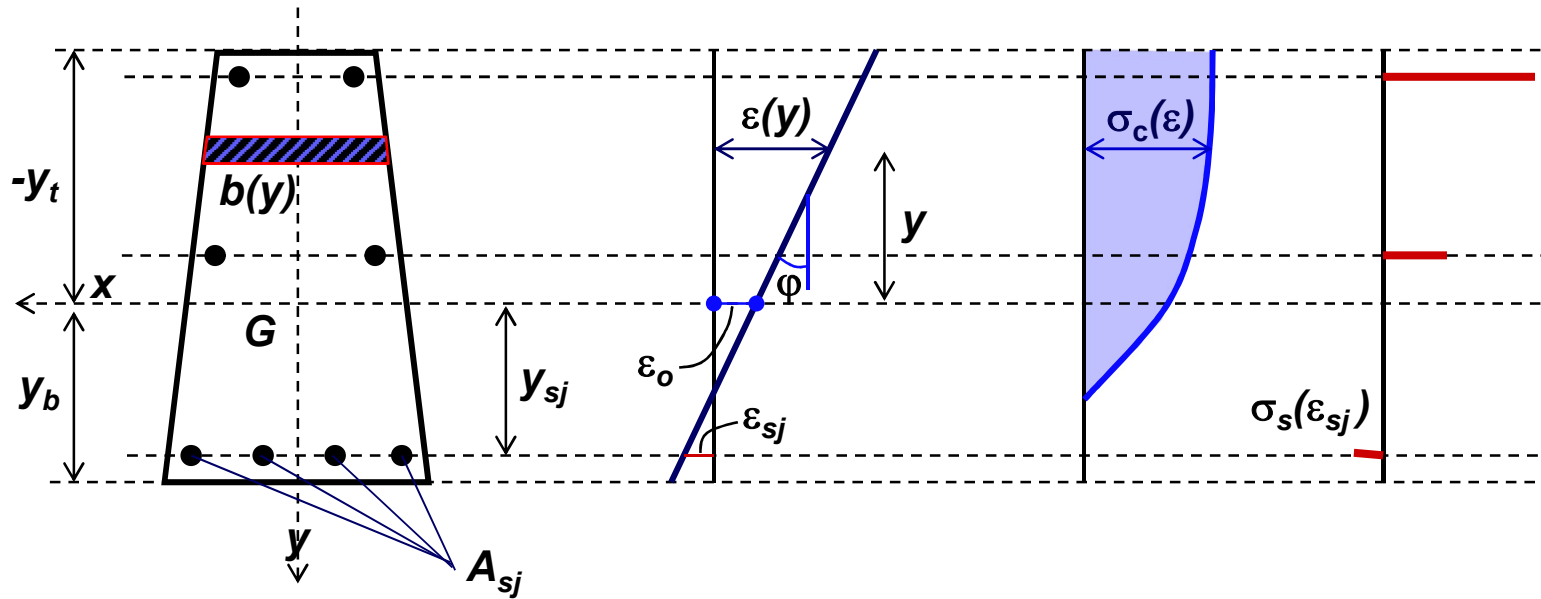


- Per le cerniere plastiche è necessario definire un legame momento-rotazione di tipo rigido-plastico. Tale legame si deve determinare mediante il diagramma momento-curvatura della sezione.

LEGAMI COSTITUTIVI DEI MATERIALI



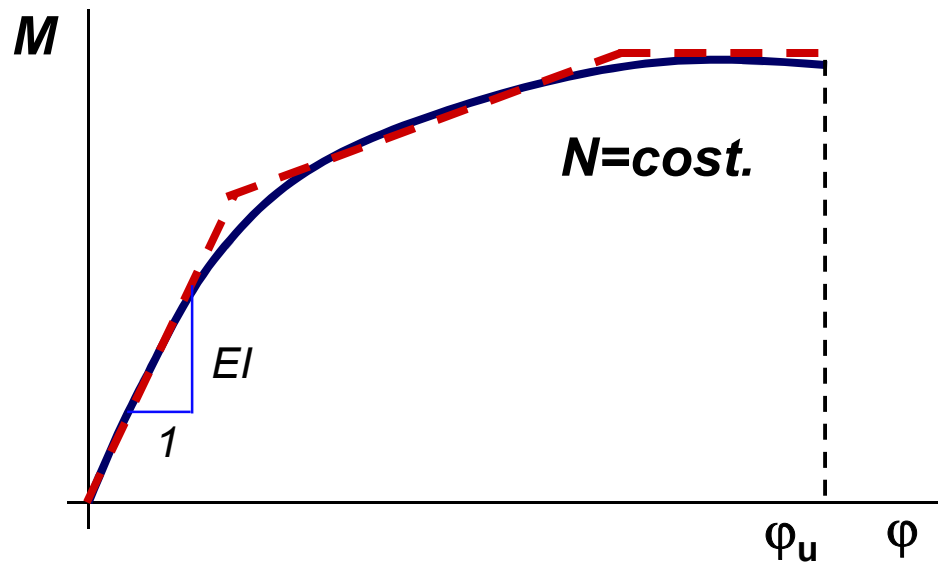
CALCOLO DIAGRAMMI $M-\phi-N$



$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon = \epsilon_o - \phi \cdot y \\ N = \int_{-y_t}^{y_b} b(y) \cdot \sigma_c(\epsilon) \cdot dy + \sum_{j=1}^m A_{sj} \cdot \sigma_s(\epsilon_{sj}) \\ M = \int_{-y_t}^{y_b} y \cdot b(y) \cdot \sigma_c(\epsilon) \cdot dy + \sum_{j=1}^m y_{sj} \cdot A_{sj} \cdot \sigma_s(\epsilon_{sj}) \end{array} \right.$$

DIAGRAMMA $M-\phi-N$

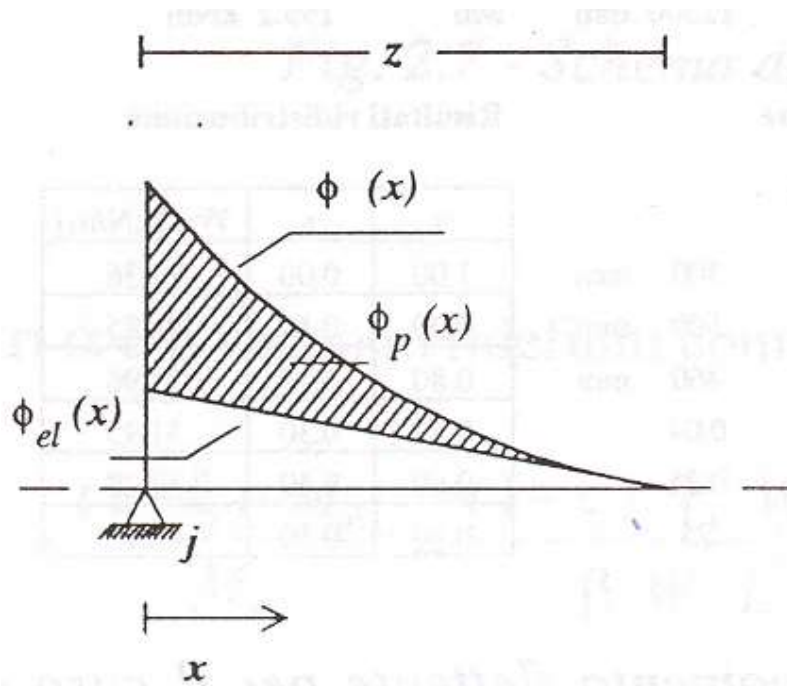
I diagrammi momento-curvatura sono ricavati per punti dalle equazioni di equilibrio sulla sezione. *Per semplicità può anche essere approssimato con una trilineare.*



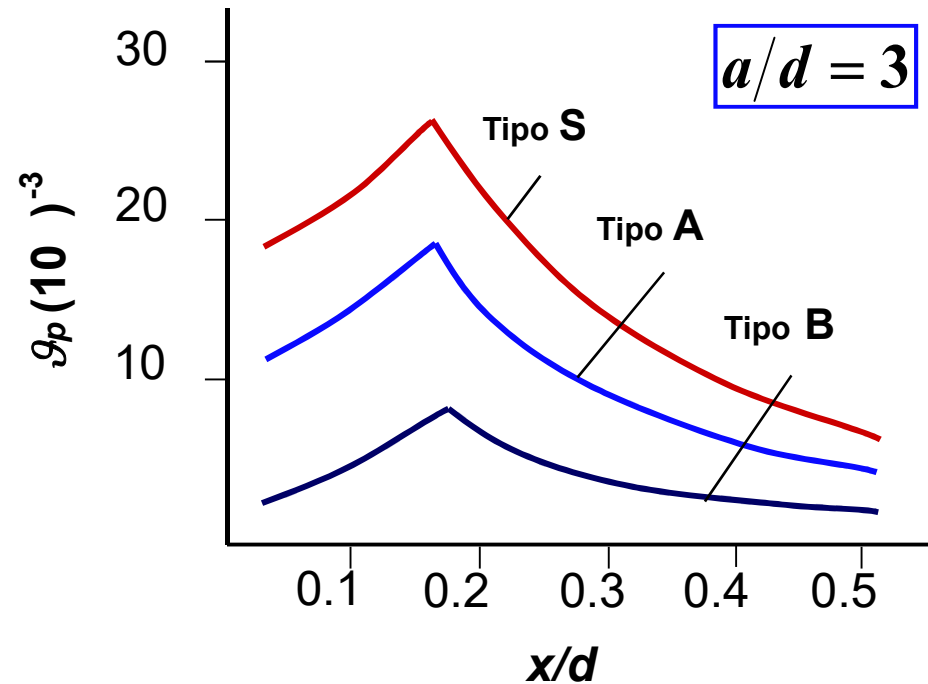
ROTAZIONE PLASTICA

Per definire il legame momento-rotazione relativo agli elementi a plasticità concentrata è necessario integrare le curvature non lineari sul tratto compreso tra la sezione critica e quella di momento nullo

$$\mathcal{G}_{pj} = \int_0^z [\varphi(x) - \varphi_{el}(x)] \cdot dx$$



Relazione MC 90



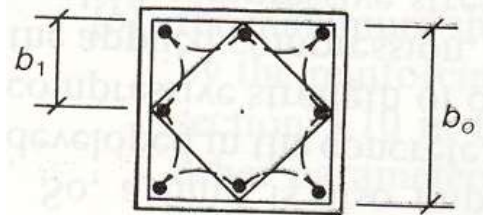
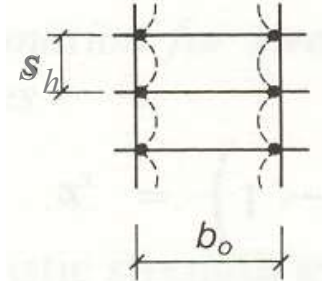
ROTAZIONE PLASTICA

Nella Circolare 2019 la rotazione ultima è data dalla relazione

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0.016 \cdot 0.3^{\nu} \left[\frac{\max(0.01; \omega')}{\max(0.01; \omega)} f_c \right]^{0.225} \left(\frac{L_V}{h} \right)^{0.35} 25^{\left(\alpha \rho_{sx} \frac{f_{yw}}{f_c} \right)} \cdot 1.25^{100 \rho_d}$$

$$\nu = \frac{N}{f_c A_c} \quad \omega = \frac{f_y A_s}{f_c A_c} \quad \omega' = \frac{f_y A'_s}{f_c A_c} \quad \rho_{sx} = \frac{A_{sx}}{b_w s_h} \quad \text{Armature trasversali (staffe)}$$

$$\alpha = \left(1 - \frac{s_h}{2b_0} \right) \left(1 - \frac{s_h}{2h_0} \right) \left(1 - \frac{\sum b_i^2}{6h_0 b_0} \right) \quad \text{Fattore di efficienza del confinamento}$$



ρ_d è la percentuale di eventuali armature diagonali

$$L_V = M/V = \text{luce di taglio}$$

ROTAZIONE PLASTICA

Nell'OPCM 3431 viene fornita una seconda relazione per ϑ_u

$$\vartheta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} \left(\vartheta_y + (\varphi_u - \varphi_y) L_{pl} \left(1 - \frac{0.5 L_{pl}}{L_V} \right) \right)$$

$$\vartheta_y = \varphi_y \frac{L_V}{3} + 0.0013 \left(1 + 1.5 \frac{h}{L_V} \right) + 0.13 \varphi_y \frac{d_b f_y}{\sqrt{f_c}} \quad \text{Per travi e pilastri}$$

$$\vartheta_y = \varphi_y \frac{L_V}{3} + 0.002 \left(1 - 0.125 \frac{L_V}{h} \right) + 0.13 \varphi_y \frac{d_b f_y}{\sqrt{f_c}} \quad \text{Per pareti}$$

d_b = diametro medio barre longitudinali

φ_y = curvatura di snervamento sezione terminale

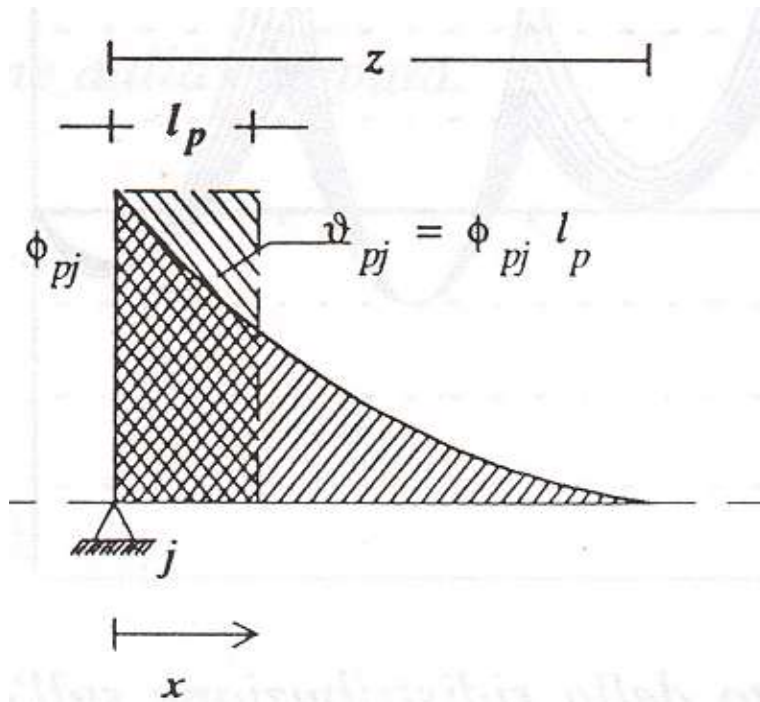
LUNGHEZZA CERNIERA PLASTICA

Anziché integrare le curvature si può calcolare la rotazione plastica ipotizzando una zona di trave di lunghezza l_p a curvatura plastica costante definita lunghezza cerniera plastica

$$l_{pj} = \frac{1}{\varphi_j - \varphi_{el}} \cdot \int_0^z [\varphi(x) - \varphi_{el}(x)] \cdot dx$$

$$\mathcal{G}_{pj} = \varphi_{pj} \cdot l_p$$

$$l_p = \left[\frac{E \cdot \varphi_{py}}{\varphi_p} \cdot (1.25 \omega)^F + G \left(\frac{M_u}{M_y} - 1 \right) \right] \cdot z$$



schema di trave	E	F	G
	0.92	0.16	1.89
	0.60	0.19	0.54
	0.37	0.23	0.28

(Riva, Cohn)

LUNGHEZZA CERNIERA PLASTICA

(Circolare 2019)

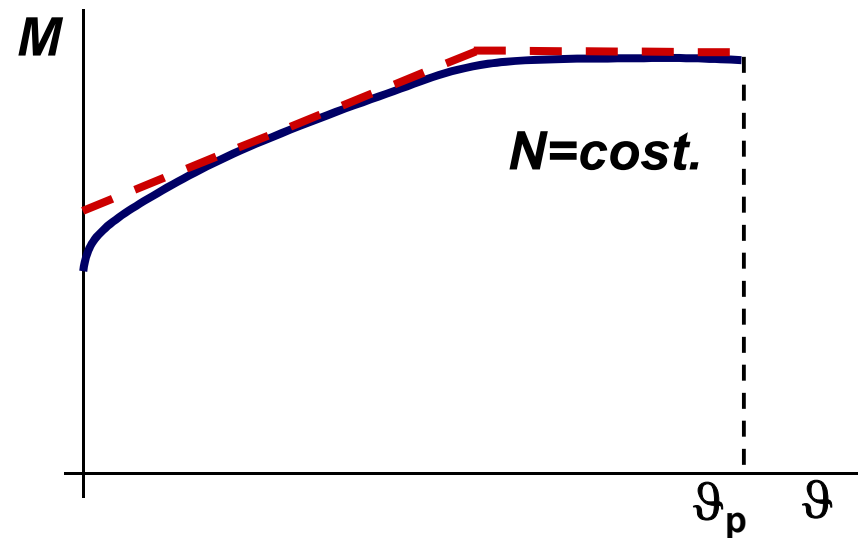
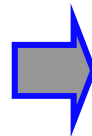
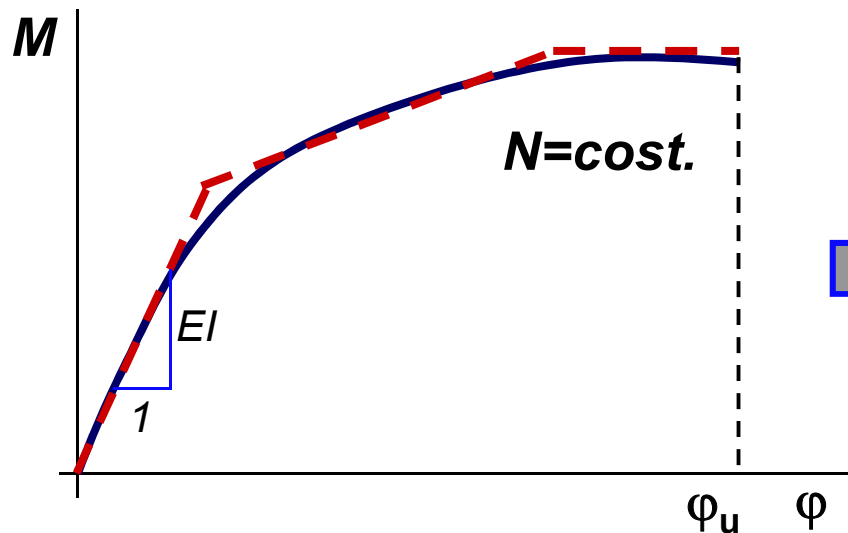
$$L_{pl} = 0,1L_V + 0,17h + 0,24 \frac{d_{bL} f_y}{\sqrt{f_c}}$$

f_y, f_c in MPa

$L_V = M/V =$ luce di taglio

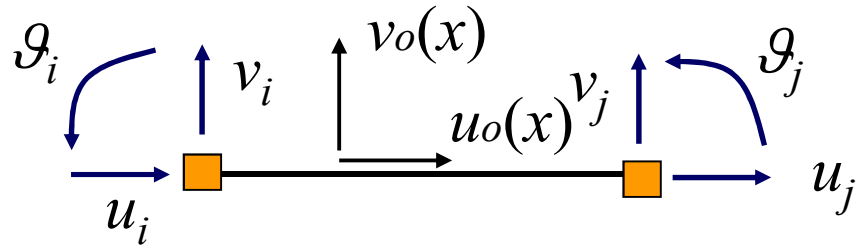
d_{bL} = diametro barre longitudinali

$$\vartheta_{pj} = \varphi_{pj} \cdot L_{pl}$$

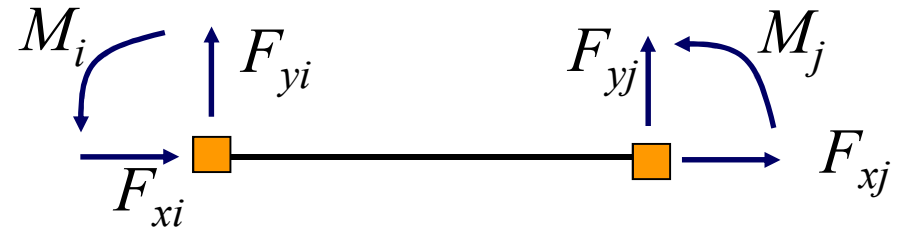


ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

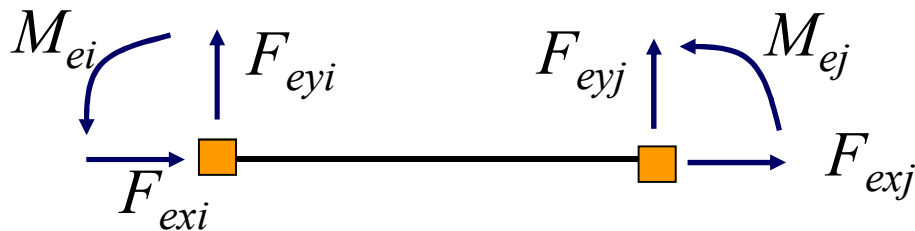
Spostamenti, forze nodali e forze nodali equivalenti ai carichi



$$S^T = [u_i \quad u_j \quad v_i \quad G_i \quad v_j \quad G_j]$$



$$F^T = [F_{xi} \quad F_{xj} \quad F_{yi} \quad M_i \quad F_{yj} \quad M_j]$$



$$F_e^T = [F_{exi} \quad F_{exj} \quad F_{eyi} \quad M_{ei} \quad F_{eyj} \quad M_{ej}]$$

Elemento di tipo Eulero-Bernoulli.

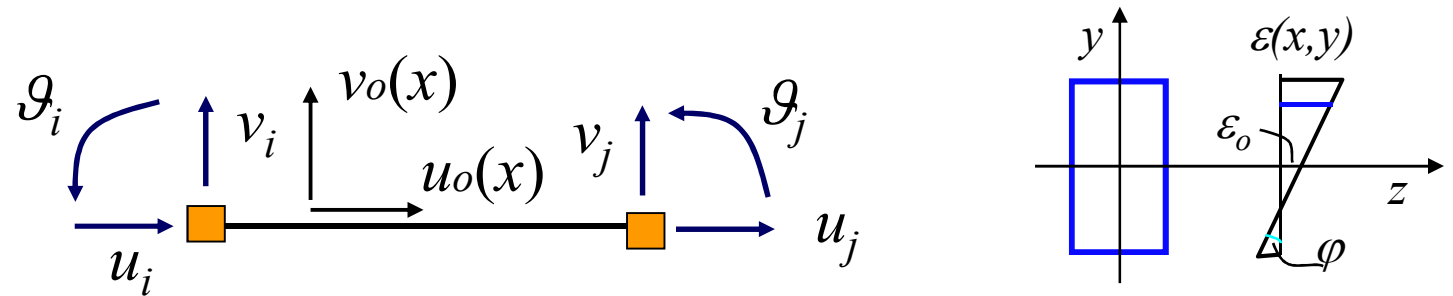
$$u(x) = \begin{bmatrix} u_o(x) \\ v_o(x) \end{bmatrix} \quad \varepsilon(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon_o(x) \\ \varphi(x) \end{bmatrix}$$

$$u(x, y) = [1 \quad -y] \begin{bmatrix} u_o(x) \\ \frac{\partial v_o(x)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon(x, y) = \underbrace{[1 \quad -y]}_{L(y)} \begin{bmatrix} \varepsilon_o(x) \\ \varphi(x) \end{bmatrix}$$

CAMPI DI SPOSTAMENTO

Operando con la formulazione in spostamenti si ha



Nell'elemento classico a due nodi, si fanno le seguenti ipotesi sui campi di spostamento

$$u_o(x) = \textit{lineare}$$

$$v_o(x) = \textit{cubico}$$

$$u(x) = N(x) S$$

Per cui le deformazioni sulla sezione risultano

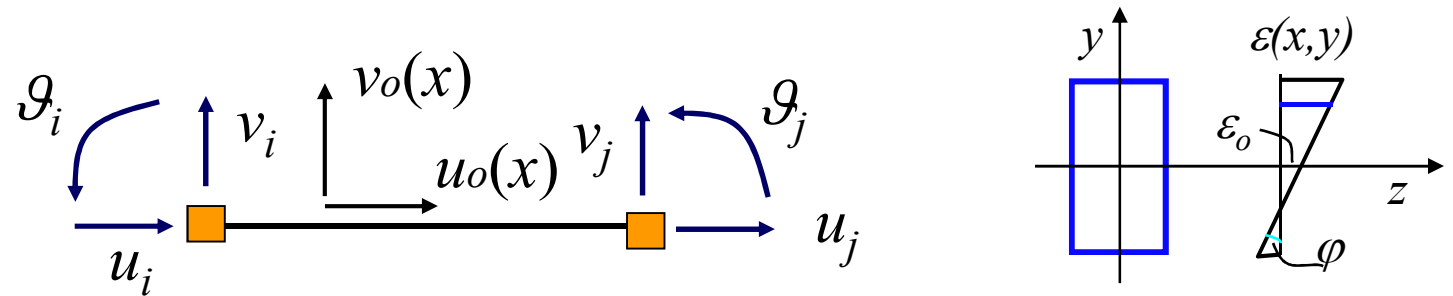
$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'(x) \\ v''(x) \end{Bmatrix} \begin{matrix} \textit{costante} \\ \textit{lineare} \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = B(x) S$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = L(y) B(x) S$$

FORMA APPROSSIMATA PER A.N.L.

Operando con la formulazione in spostamenti si ha



La **formulazione è approssimata** perché le equazioni differenziali della trave:

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = 0 \qquad \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) = 0$$

ammettono soluzione

$$u(x) = \textit{lineare} \qquad v(x) = \textit{cubico}$$

solo nel caso di comportamento elastico lineare e sezione costante ($EA = \text{cost}$, $EI = \text{cost}$).

Nel caso di comportamento nonlineare, la soluzione è tanto più approx quanto maggiore è la non linearità

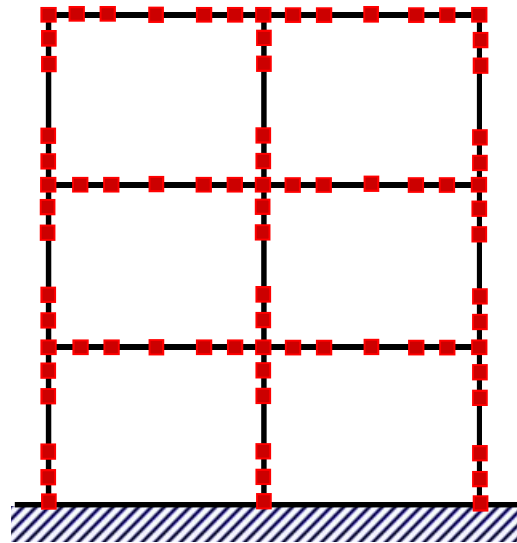
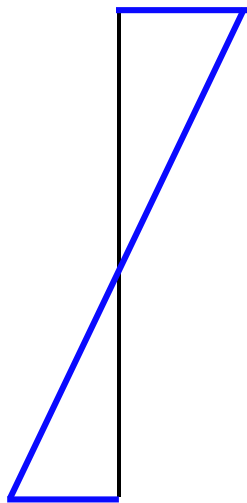
ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

- **Formulazione in spostamenti**
 - Gli elementi sono approssimati nel caso di comportamento materiale non lineare
 - Non esistono elementi più sofisticati che funzionino veramente bene
 - Bisogna infittire la mesh, cioè usare più di un elemento per ogni trave o colonna
 - Quanti elementi?

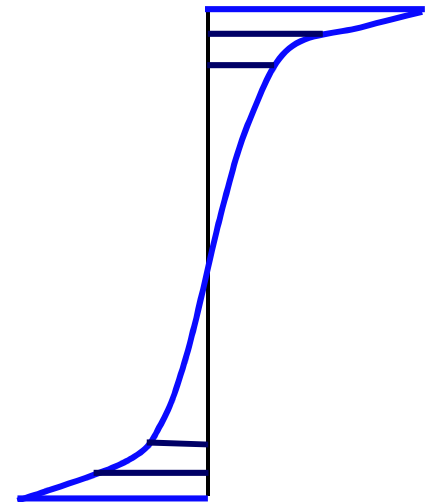
ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

- **Formulazione in spostamenti**

Curvature lineari



Curvature non lineari



- **Si cerca di infittire la mesh nei punti di maggiore non linearità**
- **Alcuni programmi seguono procedure di re-mesh adattativa**
- **Possibili problemi di localizzazione delle deformazioni**

ANALISI NON LINEARE - OSSERVAZIONI

Per l'analisi non lineare delle strutture a telaio si possono usare metodi a plasticità concentrata e metodi a plasticità distribuita

I metodi a plasticità concentrata sono più semplici ma richiedono la definizione a priori dei legami momento-rotazione per le zone plastiche (cerniere plastiche)

I metodi a plasticità distribuita basati sulla formulazione in spostamenti richiedono un maggiore onere computazionale. Per migliorare la soluzione è necessario infittire la mesh nelle zone di maggiore non linearità.