Capitolo 2

GEOMETRIA EUCLIDEA

2.1 Spazi vettoriali euclidei

Riprendiamo alcune nozioni di Algebra Lineare sugli spazi vettoriali euclidei. Dovremo distinguere i due casi: quello reale e quello complesso.

Definizione 2.1.1. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Una *forma bilineare simmetrica su* V è una applicazione

$$\langle -, - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

dove l'immagine di una coppia ordinata (v, w) si denota con $\langle v, w \rangle$, che verifica le seguenti proprietà:

i) bilinearità, cioè

- $\forall v \in V$, l'applicazione $\langle v, - \rangle : V \to \mathbb{R}$ è lineare;
- $\forall w \in V$, l'applicazione $\langle -, w \rangle : V \to \mathbb{R}$ è lineare;

ii) simmetria, cioè $\forall v, w \in V$, vale $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$.

Infine, tale forma bilineare si dice *definita positiva* o *prodotto scalare reale* se $\forall v \in V$, si ha $\langle v, v \rangle \geq 0$ e inoltre $\langle v, v \rangle = 0$ se e solo se $v = 0_V$.

In questo caso, diciamo che V è uno *spazio vettoriale reale euclideo* o un $\mathbb{R}$- *spazio vettoriale euclideo.*

In modo analogo, ma con i dovuti adattamenti, vediamo la corrispondente nozione relativa ai numeri complessi.

Utilizzeremo le seguenti notazioni: se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, denotiamo il suo coniugato $a - ib$ con $\overline{z}$ e il suo modulo $\sqrt{a^2 + b^2}$ con $|z|$. Chiaramente, se $z \in \mathbb{R}$, il suo modulo coincide col valore assoluto.

Definizione 2.1.2. Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Una *forma sesquilineare hermitiana su* V è una applicazione

$$\langle -, - \rangle :\ V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$

che verifica le seguenti proprietà:

i) sequilinearità, cioè

- $\forall v \in V$, l'applicazione $\langle v, - \rangle :\ V \to \mathbb{C}$ è additiva e verifica
$$\langle v, \lambda w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle,$$
per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e $w \in V$;
- $\forall w \in V$, l'applicazione $\langle -, w \rangle :\ V \to \mathbb{C}$ è lineare;

ii) simmetria coniugata, cioè $\forall v, w \in V$, vale $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$.

Infine, tale forma si dice *definita positiva* o *prodotto hermitiano complesso* se $\forall v \in V$, si ha $\langle v, v \rangle \geq 0$ e inoltre $\langle v, v \rangle = 0$ se e solo se $v = 0_V$.

In questo caso, diciamo che V è uno *spazio vettoriale complesso euclideo* o un $\mathbb{C}$- *spazio vettoriale euclideo.*

Si osservi che la richiesta $\langle v, v \rangle \geq 0$ ha senso in quanto, per la simmetria coniugata, $\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle}$, dunque $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$.

Ricordiamo inoltre che, come accade per le applicazioni lineari, anche alle forme bilineari si può associare una matrice, una volta che si è fissata una base per lo spazio vettoriale. Infatti, se V è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è una sua base, a ogni forma bilineare

$$\tau :\ V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

si associa la matrice

$$M_{\mathcal{B}}(\tau) := \left(\tau(v_i, v_j)\right)_{i,j}\ \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Viceversa, a una matrice $M = (m_{ij})\ \in \mathbb{R}^{n,n}$ si associa, rispetto a $\mathcal{B}$, la forma bilineare definita, su una qualunque coppia di vettori $v = a_1 v_1 + \cdots a_n v_n$ e $w = b_1 v_1 + \cdots b_n v_n$, da:

$$\tau(v, w) := \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij} a_i b_j.$$

Associando ad ogni vettore v la matrice colonna $a := {}^t(a_1, \dots, a_n)$ delle sue componenti rispetto alla base scelta, e analogamente a w la matrice colonna $b := {}^t(b_1, \dots, b_n)$, l'uguaglianza precedente si scrive sinteticamente come

$$\tau(v, w) = {}^t a M b.$$

È noto, inoltre, che τ è una forma bilineare simmetrica se e solo se $M = M_{\mathcal{B}}(\tau)$ è una matrice simmetrica (cioè tale che ${}^tM = M$).

In particolare, se V è uno spazio vettoriale reale euclideo, si associa al prodotto scalare, rispetto a una base fissata $\mathcal{B}$, una matrice M simmetrica reale definita positiva che verifica

$$\langle v, w \rangle = {}^t aMb.$$

e viceversa.

Esempio 2.1.1. Se $V = \mathbb{R}^n$, il *prodotto scalare standard* è quello associato alla matrice identica rispetto alla base canonica.
Pertanto, se $v = {}^t(a_1, \ldots, a_n)$ e $w = {}^t(b_1, \ldots, b_n)$, allora

$$\langle v, w \rangle = {}^t v \mathbb{I}_n w = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

In modo analogo si prova la corrispondenza tra un prodotto hermitiano complesso in un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale euclideo e una matrice $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ hermitiana (cioè tale che ${}^tM = \overline{M}$) definita positiva, data da

$$\langle v, w \rangle = {}^t v M \overline{w}.$$

Ricordiamo un risultato fondamentale, di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 2.1.1. *Se V è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale euclideo, comunque scelti $v, w \in V$, vale*

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle.$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se v e w sono linearmente dipendenti.

Definizione 2.1.3. Se V è un $\mathbb{R}$ (rispettivamente, $\mathbb{C}$)-spazio vettoriale euclideo, diciamo *norma* di $v \in V$ il numero reale non negativo

$$\| v \| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Con tale nozione, possiamo riscrivere il risultato precedente nella sua formulazione più generale (che vale anche sui numeri complessi).

Teorema 2.1.2 (Disuguaglianza di Schwarz)**.** *Se V è un spazio vettoriale euclideo reale o complesso, comunque scelti $v, w \in V$, si ha*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \| v \| \| w \| .$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se v e w sono linearmente dipendenti.

Esercizio E1. Sia V un spazio vettoriale euclideo reale o complesso. Provare che, per ogni $v \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (rispettivamente, $\mathbb{C}$) valgono le seguenti proprietà:

a) $\| v \| \geq 0$ *(qui* 0 *denota* $0_{\mathbb{R}}$*)*;

b) $\| v \| = 0 \iff v = 0_V$;

c) $\| \lambda v \| = |\lambda| \| v \|$.

Dalla Disuguaglianza di Schwarz discende un'altra nota relazione.

Teorema 2.1.3 (Disuguaglianza triangolare)**.** *Se V è un spazio vettoriale euclideo reale o complesso, comunque scelti $v, w \in V$, si ha*

$$\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \| .$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza allora v e w sono linearmente dipendenti.

Esercizio E2. Provare che, se V è uno spazio vettoriale euclideo *reale*, vale un parziale viceversa dell'ultima affermazione, cioè se $w = \lambda v$, dove $\lambda \in \mathbb{R}_+$, allora $\| v + w \| = \| v \| + \| w \|$. Cercare un controesempio se $\lambda < 0$.

In uno spazio vettoriale euclideo si può introdurre la nozione di ortogonalità fra vettori e, di conseguenza, anche fra sottospazi vettoriali.

Definizione 2.1.4. Diciamo che due vettori $v, w \in V$ sono *ortogonali* se $\langle v, w \rangle = 0$.

Osservazione 2.1.1. Si noti che in uno spazio vettoriale euclideo reale vale

$$\| v + w \|^2 = \| v \|^2 + \| w \|^2 + 2\langle v, w \rangle.$$

Dunque, se v e w sono ortogonali si ha

$$\| v + w \|^2 = \| v \|^2 + \| w \|^2,$$

cioè il Teorema di Pitagora, che dunque vale in un qualunque spazio vettoriale euclideo.

In uno spazio vettoriale euclideo si rivela essenziale la nozione di *base ortonormale*, cioè di una base costituita da vettori di norma 1 e a due a due ortogonali. Se $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ è una base ortonormale, allora per ogni $v \in V$ si ha

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n \rangle e_n.$$

Inoltre ogni cambiamento di base tra basi ortonormali è associato a una matrice ortogonale M (cioè tale che ${}^tM = M^{-1}$), nel caso reale. Mentre nel caso complesso M è unitaria (cioè tale che $\overline{{}^tM} = M^{-1}$).

Infine ricordiamo la seguente nozione

Definizione 2.1.5. Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V. Diciamo *complemento ortogonale di* W l'insieme

$$W^\perp := \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \quad \forall w \in W\}.$$

Il nome di "complemento ortogonale" è giustificato dalle seguenti proprietà, le cui dimostrazioni sono già state viste nel corso di Algebra Lineare.

Proposizione 2.1.4. *Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora valgono i seguenti fatti:*

i) $W^\perp$ *è un sottospazio vettoriale di* V*;*

ii) $W^\perp \cap W = \{0_V\}$*;*

iii) $W^\perp + W = V$.

In particolare, la somma $W^\perp + W$ è diretta e si denota dunque con $W^\perp \oplus W$. Conseguentemente, $\dim(W^\perp) + \dim(W) = \dim(V)$.

Esercizio E3. Se W_1 e W_2 sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale euclideo V, provare che

$$W_1 \subseteq W_2^\perp \iff W_2 \subseteq W_1^\perp.$$

Pertanto è naturale dire che due sottospazi vettoriali W_1 e W_2 di uno spazio vettoriale euclideo V sono *ortogonali* se $W_1 \subseteq W_2^\perp$ oppure $W_2 \subseteq W_1^\perp$.

Osservazione 2.1.2. Chiaramente, per la Proposizione precedente, W_1 e W_2 possono essere ortogonali solo se $\dim(W_1) + \dim(W_2) \leq \dim(V)$.

Esempio 2.1.2. Sia W un iperpiano dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con prodotto scalare standard. La sua equazione cartesiana è del tipo

$$W: \ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Ovviamente il vettore $(a_1, \ldots, a_n) \in W^\perp$. D'altro canto, $\dim(W) = n - 1$ dunque $\dim(W^\perp) = 1$. Pertanto $W^\perp$ è la retta vettoriale $\langle(a_1, \ldots, a_n)\rangle$.

Concludiamo il paragrafo con una nozione relativa solo al caso reale.

Definizione 2.1.6. Siano v, w due vettori non nulli di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale euclideo V. Si dice *angolo convesso tra v e w* l'unico angolo θ, con $0 \leq \theta \leq \pi$ tale che

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w\rangle}{\| v \| \| w \|}.$$

Si noti che, per la Disuguaglianza di Schwarz, tale frazione è compresa tra -1 e 1. Si osservi infine che, se v e w sono proporzionali, cioè se $w = \lambda v$, allora

$$\cos\theta = \frac{\langle v, \lambda v\rangle}{\| v \| \| \lambda v \|} = \frac{\lambda \| v \|^2}{|\lambda| \| v \|^2} = \pm 1$$

dove $\cos\theta = 1 \iff \theta = 0 \iff \lambda > 0$, $\cos\theta = -1 \iff \theta = \pi \iff \lambda < 0$.

2.2 Spazi affini euclidei

Introduciamo ora un nuovo ambiente geometrico relativamente ai due casi, reale e complesso, anche se focalizzeremo il seguente studio sul primo caso.

Definizione 2.2.1. Se V è uno spazio vettoriale reale (rispettivamente, complesso) euclideo, diciamo *spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario)* lo spazio affine $\mathbb{A}(V)$ su V che verrà denotato con $\mathbb{E}$. I sottospazi affini di $\mathbb{E}$ sono detti suoi *sottospazi euclidei (rispettivamente, unitari)*.
In particolare, se $V = \mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare standard, il corrispondente *spazio affine euclideo canonico* si denota con $\mathbb{E}^n_{\mathbb{R}}$ (se $V = \mathbb{C}^n$, il corrispondente *spazio affine unitario canonico* si denota $\mathbb{E}^n_{\mathbb{C}}$).

Grazie al prodotto scalare su V, è possibile definire l'ortogonalità e gli angoli tra sottospazi euclidei (risp. unitari).

Definizione 2.2.2. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario) e $S, T \subseteq \mathbb{E}$ due suoi sottospazi euclidei (rispettivamente, unitari) di dimensione ≥ 1. Diciamo che S e T sono *ortogonali* se lo sono le rispettive giaciture come sottospazi di V e scriveremo $S \perp T$.

Si osservi che, se S e T sono ortogonali in $\mathbb{E}$, con $n = \dim(\mathbb{E})$, allora $\dim(S) + \dim(T) \leq n$ per l'Osservazione 2.1.2.

Per poter fare calcoli, come nel caso affine, occorre introdurre un sistema di riferimento. Ma qui terremo conto che lo spazio vettoriale soggiacente è euclideo.

Definizione 2.2.3. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio affine euclideo sullo spazio vettoriale euclideo V. Si dice *riferimento cartesiano* in $\mathbb{E}$ un riferimento affine $(O, \mathcal{B})$, dove $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di V.

Esempio 2.2.1. Si consideri un iperpiano H di $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}^n_{\mathbb{R}}$ che, rispetto a un fissato riferimento cartesiano, abbia equazione

$$H: \ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b.$$

La sua giacitura è $H_0: \ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$.
Per definizione, un sottospazio euclideo $S = Q + S_0$ è ortogonale a H se e solo se $\dim(S_0) \geq 1$ e $S_0 \subseteq H_0^{\perp}$. Ma, per la Proposizione 2.1.4, $H_0^{\perp}$ è una retta vettoriale e precisamente (vedi Esempio 2.1.2), $H_0^{\perp} = \langle v \rangle$, dove $v = (a_1, \ldots, a_n)$. Dunque S è necessariamente una retta affine di giacitura $S_0 = \langle v \rangle$.
Ad esempio, il piano H e la retta r di $\mathbb{E}^3$ dati da

$$H: \ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \quad r: \ (x_1, x_2, x_3) = (1 + 2t, 2 - 3t, 43 + t)$$

sono ortogonali.

Esempio 2.2.2. Si considerino due rette r e s di $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}^n_{\mathbb{R}}$ aventi come vettori direzionali (rispetto a un riferimento cartesiano) $v_r = (a_1, \ldots, a_n)$ e $v_s = (b_1, \ldots, b_n)$, rispettivamente. Per definizione, $r \perp s$ se e solo se $\langle v_r \rangle \subseteq \langle v_s \rangle^{\perp}$ e questo si verifica se e solo se $v_r \perp v_s$ cioè se e solo se

$$\langle (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = 0.$$

Ad esempio le rette r e s di $\mathbb{E}^2$, dove $r : (x, y) = (2, -3) + \lambda(3, -1)$ e $s : (x, y) = (1, 1) + \lambda(2, 1)$, non sono ortogonali in quanto

$$\langle (3, -1), (2, 1) \rangle = 6 - 1 = 5 \neq 0.$$

Come visto nell'Osservazione 2.1.2, se S e T sono ortogonali in $\mathbb{E}^n$, allora necessariamente $\dim(S) + \dim(T) \leq n$. Volendo estendere tale nozione a sottospazi di dimensione qualunque, partiamo dalla seguente osservazione. Siano $S = P + S_0$ e $T = Q + T_0$ due sottospazi euclidei di giaciture rispettive S_0 e T_0 e denotiamo le rispettive dimensioni con

$$s := \dim(S) = \dim_{\mathbb{R}}(S_0), \quad t := \dim(T) = \dim_{\mathbb{R}}(T_0).$$

Se accade che

$$\dim(S) + \dim(T) \geq n \quad \text{cioè} \quad s + t \geq n$$

allora

$$\dim(S_0^{\perp}) + \dim(T_0^{\perp}) = (n - s) + (n - t) = 2n - (s + t) \leq n.$$

Questo induce a introdurre la seguente nozione.

Definizione 2.2.4. Siano $S = P + S_0$ e $T = Q + T_0$ due sottospazi euclidei di $\mathbb{E}^n$ di giaciture rispettive S_0 e T_0. Se $\dim(S) + \dim(T) \geq n$, diciamo che S e T sono *perpendicolari* se $S_0^{\perp}$ e $T_0^{\perp}$ sono ortogonali.

Esempio 2.2.3. Si considerino i due piani di $\mathbb{E}^3$ di equazioni

$$S : \ ax + by + cz + d = 0, \quad T : \ a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Per definizione, essi sono perpendicolari se e solo se le rette vettoriali

$$S_0^{\perp} = \langle (a, b, c) \rangle, \quad T_0^{\perp} = \langle (a', b', c') \rangle$$

sono ortogonali. E tale condizione equivale a $\langle (a, b, c), (a', b', c') \rangle = 0$, cioè $aa' + bb' + cc' = 0$.

Osservazione 2.2.1. Si vede immediatamente che, se $\dim(S) + \dim(T) = n$, l'ortogonalità equivale alla perpendicolarità.

Per quanto riguarda l'angolo tra due sottospazi euclidei, ci limiteremo a due classi di esempi: l'angolo fra due rette e quello fra una retta e un iperpiano.

Tenendo presente la Definizione 2.1.6, dove si introduce l'angolo fra due vettori di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale euclideo (e in questo caso si tratta di un angolo θ tale che $0 \leq \theta \leq \pi$), si noti che due rette individuano due angoli, uno acuto e uno ottuso. Sceglieremo quello acuto, per convenzione. In tal caso, se l'angolo minore tra i due vettori direzionali fosse ottuso, sarà sufficiente considerare il vettore opposto di uno dei due. Dunque introduciamo la seguente nozione.

Definizione 2.2.5. Siano r e s due rette nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^n$ di vettori direzionali rispettivi v_r e v_s. Si dice *angolo fra le rette r e s*, e si denota con $\widehat{rs}$, l'unico angolo $\theta \in [0, \pi/2]$ tale che

$$\cos\theta = \frac{|\langle v_r, v_s\rangle|}{\| v_r \| \| v_s \|}.$$

Si osservi che, nella definizione precedente, $0 \leq \cos\theta \leq 1$ e dunque $\widehat{rs}$ è un angolo acuto. Inoltre è chiaro che $r \perp s$ se e solo se $\widehat{rs} = \pi/2$.

Osservazione 2.2.2. Si noti che l'angolo fra due rette, come accadeva con l'ortogonalità, non ha nulla a che vedere con l'incidenza delle due rette: infatti lo si può definire e calcolare sia nel caso in cui le rette siano incidenti, sia nel caso in cui siano sghembe.

Definizione 2.2.6. Siano r una retta e H un iperpiano nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^n$; sia inoltre t una retta ortogonale a H. Si dice *angolo fra r e H*, e si denota con $\widehat{rH}$, l'unico angolo α complementare dell'angolo $\widehat{rt}$.
In altre parole, posti v_r e n due vettori direzionali di r e t, rispettivamente,

$$\widehat{rH} := \pi/2 - \widehat{rt}$$

ove $\widehat{rt}$ è l'unico angolo (tra 0 e $\pi/2$) tale che

$$\cos\widehat{rt} = \frac{|\langle v_r, n\rangle|}{\| v_r \| \| n \|}.$$

Si osservi che anche $\widehat{rH}$ è un angolo acuto.

2.3 Distanze negli spazi affini euclidei

Grazie al prodotto scalare su V, è possibile definire anche una "distanza" in $\mathbb{E}$, rendendolo uno *spazio metrico* e, di conseguenza, uno *spazio topologico*.

Definizione 2.3.1. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario). Se $P, Q \in \mathbb{E}$, diciamo *distanza tra P e Q* il numero reale non negativo

$$d(P,Q) := \| Q - P \| .$$

Proposizione 2.3.1. *Se $P, Q, R \in \mathbb{E}$ allora:*

i) $d(P,Q) \geq 0$ *e vale* $d(P,Q) = 0$ *se e solo se* $P = Q$*;*

ii) $d(P,Q) = d(Q,P)$*;*

iii) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$.

Dimostrazione. (i) e (ii) sono lasciate per esercizio, in quanto immediate.
(iii) Per la Relazione di Chasles si ha $Q - P = (Q - R) + (R - P)$, dunque

$$\| Q - P \| = \| (Q - R) + (R - P) \| \leq \| (Q - R) \| + \| (R - P) \|,$$

dove la disuguaglianza segue da Teorema 2.1.3. □

Più in generale, diamo la seguente nozione.

Definizione 2.3.2. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario). Se $X, Y \subseteq \mathbb{E}$ sono due sottoinsiemi non vuoti, diciamo *distanza tra X e Y* il numero reale non negativo

$$d(X,Y) := \inf \{d(P,Q) \,|\, P \in X, Q \in Y\}.$$

Si osservi che tale estremo inferiore esiste in quanto l'insieme su cui si calcola è costituito da numeri reali maggiori o uguali di zero.

Per i sottospazi euclidei vale il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione; ne vedremo un caso particolare nel prossimo Teorema 2.3.5.

Teorema 2.3.2. *In uno spazio euclideo $\mathbb{E}$ sullo spazio vettoriale euclideo V, si considerino due sottospazi euclidei $X = A + U$ e $Y = B + W$, dove $A, B \in \mathbb{E}$ e U, W sono sottospazi vettoriali di V. Allora esistono $P_0 \in X$ e $Q_0 \in Y$ tali che il vettore $Q_0 - P_0$ è ortogonale sia a U che a W e, per ogni $P \in X$ e $Q \in Y$, si ha $\| Q_0 - P_0 \| \leq \| Q - P \|$. Pertanto $d(X,Y) = d(P_0, Q_0)$.*

Esercizio E4. Siano $X, Y \subseteq \mathbb{E}$ due sottoinsiemi. Provare che $X \cap Y \neq \emptyset$ implica $d(X, Y) = 0$.

Si può provare che il viceversa, falso in generale, vale ad esempio se X e Y sono due sottospazi euclidei.

In quanto segue considereremo come ambiente lo spazio affine euclideo canonico $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}^n_{\mathbb{R}}$ con un riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$.

In tale ambito, diamo la seguente nozione.

Definizione 2.3.3. Se $A, B \in \mathbb{E}^n$ diciamo *punto medio del segmento* $\overline{AB}$ l'unico punto $M \in \overline{AB}$ tale che

$$d(A, M) = d(M, B).$$

Esercizio E5. Provare che tale definizione coincide con quella di punto medio data nell'ambito degli spazi affini, nel paragrafo 1.12.
Provare inoltre che, posti $A = (a_1, \ldots, a_n)$ e $B = (b_1, \ldots, b_n)$, allora

$$M = \frac{A+B}{2} := \frac{(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)}{2}.$$

Nel capitolo precedente (vedi Definizione 1.11.2) abbiamo introdotto la proiezione, su un sottospazio affine S di $\mathbb{A}^n$, parallela a un sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^n$ (complementare alla giacitura di S).

In uno spazio euclideo possiamo considerare la situazione particolare in cui U è l'ortogonale della giacitura di S e dare la seguente nozione.

Definizione 2.3.4. Sia $S = Q + W$ un sottospazio euclideo di $\mathbb{E}^n$. Si dice *proiezione ortogonale su* S l'applicazione

$$p_U : \mathbb{E}^n \longrightarrow S \quad \text{data da} \quad P \mapsto (P + U) \cap S$$

dove $U = W^{\perp}$. In particolare, se $P \in \mathbb{E}^n$, la *proiezione ortogonale di* P *su* S è il punto $p_U(P)$ cioè

$$P_0 := (P + W^{\perp}) \cap S.$$

Esempio 2.3.1. Si considerino il punto $P = (1, 2, 3) \in \mathbb{E}^3$ e il piano di equazione $H :\ x - y + 3z + 1 = 0$. Per determinare la proiezione ortogonale P_0 di P su H, calcoliamo anzitutto la giacitura W di H e il sottospazio $W^{\perp}$. Chiaramente quest'ultimo è la retta vettoriale $W^{\perp} = \langle (1, -1, 3) \rangle$. Per definizione

$$P_0 = (P + W^{\perp}) \cap H$$

si ottiene intersecando la retta $r = P + W^{\perp}$ e il piano H.

Poiché $r: \ (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, -1, 3) = (1+\lambda, 2-\lambda, 3+3\lambda)$, bisogna determinare λ in modo che

$$(1 + \lambda) - (2 - \lambda) + 3(3 + 3\lambda) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -9/11.$$

Sostituendo nell'equazione parametrica di r si ottiene infine

$$P_0 = (1 - 9/11, 2 + 9/11, 3 - 27/11) = (2/11, 31/11, 6/11).$$

Esempio 2.3.2. Si considerino il punto $P = (1, 2, 3) \in \mathbb{E}^3$ e la retta di equazione $r: \ (x, y, z) = (1, 0, 0)+\lambda(2, -1, 2)$. Per determinare la proiezione ortogonale P_0 di P su r, calcoliamo anzitutto la giacitura W di r e il sottospazio $W^{\perp}$. Chiaramente quest'ultimo è il piano vettoriale $W^{\perp}: \ 2x - y + 2z = 0$. Per definizione

$$P_0 = (P + W^{\perp}) \cap r$$

si ottiene intersecando il piano $\pi = P + W^{\perp}$ e la retta r. È immediato verificare che $\pi: \ 2x - y + 2z - 6 = 0$ e quindi, essendo $r: \ (x, y, z) = (1 + 2\lambda, -\lambda, 2\lambda)$, si deve determinare λ in modo che

$$2(1 + 2\lambda) + \lambda + 4\lambda - 6 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = 4/9 \ \Rightarrow \ P_0 = (17/9, -4/9, 8/9).$$

La nozione di proiezione ortogonale verrà ora utilizzata nel trovare dei metodi per determinare alcune distanze.

Il primo caso è quello di distanza di un punto da un sottospazio euclideo.

Proposizione 2.3.3. *Siano S un sottospazio euclideo e Q un punto di $\mathbb{E}^n$. Allora, posta Q_0 la proiezione ortogonale di Q su S, si ha*

$$d(Q, S) = d(Q, Q_0).$$

Dimostrazione. Basta provare che, comunque scelto un punto $P \in S$, si ha $d(Q, P) \geq d(Q, Q_0)$ o, equivalentemente, che $\| Q - P \|^2 \geq \| Q - Q_0 \|^2$. Possiamo scrivere il sottospazio S come $S = P + W$ e osservare che (per la Proposizione 1.2.1) $P - Q_0 \in W$. D'altro canto, per definizione di proiezione ortogonale, $Q - Q_0 \in W^{\perp}$. Per la Relazione di Chasles si ha inoltre

$$Q - P = (Q - Q_0) + (Q_0 - P).$$

Pertanto, per l'Osservazione 2.1.1, si ottiene

$$\| Q - P \|^2 = \| Q - Q_0 \|^2 + \| Q_0 - P \|^2 \geq \| Q - Q_0 \|^2 .$$

□

Proposizione 2.3.4. *Si fissi un riferimento cartesiano di $\mathbb{E}^n$ e si considerino un punto $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ e un iperpiano $H: \ a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b = 0$. Allora*

$$d(Q, H) = \frac{|a_1q_1 + \cdots + a_nq_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

Dimostrazione. Si consideri un versore (cioè un vettore di norma 1) ortogonale a H, ad esempio

$$n := \frac{(a_1, \ldots, a_n)}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

Essendo anche $Q - Q_0$ ortogonale a H, si ha

$$|\langle Q - Q_0, n\rangle| = \| Q - Q_0 \| = d(Q, Q_0) = d(Q, H),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla Proposizione precedente. Per calcolare il suddetto prodotto scalare, basta scegliere un qualunque punto $P \in H$, applicare la Relazione di Chasles e la bilinearità, ottenendo

$$\langle Q - Q_0, n\rangle = \langle Q - P, n\rangle + \langle P - Q_0, n\rangle.$$

Ma $\langle P - Q_0, n\rangle = 0$ in quanto $P - Q_0$ appartiene alla giacitura di H, che è $\langle n\rangle^\perp$. Pertanto

$$d(Q, H) = |\langle Q - Q_0, n\rangle| = |\langle Q - P, n\rangle|.$$

Denotando le coordinate di P con $(y_1, \ldots, y_n)$ e tenendo conto che $P \in H$, vale $a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = -b$. Quindi

$$d(Q, H) = \frac{|\langle (q_1 - y_1, \ldots, q_n - y_n), (a_1, \ldots, a_n)\rangle|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}$$

da cui la tesi. □

Osservazione 2.3.1. Se S e T sono due sottospazi paralleli di $\mathbb{E}^n$ e $S \cap T = \emptyset$ allora la loro distanza è non nulla. Vediamo come determinarla.
Sia $\dim(T) \leq \dim(S)$. Allora, scelto un qualunque punto $Q \in T$ e denotando con Q_0 la proiezione ortogonale di Q su S, si ha

$$d(T, S) = d(Q, S) = d(Q, Q_0).$$

Chiaramente, se $\dim(T) = \dim(S)$, i ruoli di S e T si possono scambiare.

Esempio 2.3.3. Si considerino la retta r e il piano π di $\mathbb{E}^3$ dati da

$$r: \ (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(2, -1, 2), \quad \pi: \ x + 2y + 4 = 0.$$

Poiché le rispettive giaciture sono $W_r = \langle(2,-1,2)\rangle$ e $W_\pi : \ x + 2y = 0$, si vede immediatamente che $W_r \subset W_\pi$ e dunque $r \parallel \pi$. Tenendo conto che $\dim(r) = 1 < 2 = \dim(\pi)$, per l'Osservazione 2.3.1 si ha che $d(r,\pi) = d(Q,\pi)$, dove Q è un qualunque punto di r. Ad esempio, si scelga $Q = (1,0,0)$ e si calcoli, per la Proposizione 2.3.4,

$$d(Q,\pi) = \frac{|1+4|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5}.$$

Esempio 2.3.4. Si considerino i due piani paralleli π_1 e π_2 di $\mathbb{E}^3$ dati da

$$\pi_1 : \ x + 2y - z + 4 = 0, \quad \pi_2 : \ x + 2y - z + 10 = 0.$$

Ancora per l'Osservazione 2.3.1 si ha

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(Q, \pi_2),$$

dove Q è un qualunque punto di π_1. Ad esempio, si scelga $Q = (0,0,4)$ e si calcoli, ancora per la Proposizione 2.3.4,

$$d(Q,\pi_2) = \frac{|-4+10|}{\sqrt{1+4+1}} = \sqrt{6}.$$

Esempio 2.3.5. Si considerino le due rette parallele r_1 e r_2 di $\mathbb{E}^3$ date da

$$r_1 : \ (x,y,z) = (3,-1,1)+\lambda(2,-1,2), \quad r_2 : \ (x,y,z) = (2,1,3)+\mu(2,-1,2).$$

In questo caso si deve procedere diversamente dai due precedenti esempi. Infatti una retta in $\mathbb{E}^3$ non è un iperpiano, quindi non si può utilizzare la formula della Proposizione 2.3.4. Un modo possibile è applicare la seconda uguaglianza dell'Osservazione 2.3.1:

$$d(r_1, r_2) = d(Q, Q_0),$$

dove $Q \in r_1$ e Q_0 è la proiezione ortogonale di Q su r_2. Invece di scegliere un punto su r_1, si noti che si può procedere ancora più rapidamente considerando un piano π ortogonale a entrambe le rette. Evidentemente π interseca ogni retta in un punto e questi due punti sono uno la proiezione ortogonale dell'altro sull'altra retta. Pertanto, posti $Q_1 := \pi \cap r_1$ e $Q_2 := \pi \cap r_2$, si ha

$$d(r_1, r_2) = d(Q_1, Q_2),$$

Si scelga, ad esempio, $\pi : \ 2x - y + 2z = 0$. Con facili calcoli si vede che

$$Q_1 := \pi \cap r_1 = (1,0,-1), \quad Q_2 := \pi \cap r_2 = (0,2,1).$$

Pertanto

$$d(r_1, r_2) = d(Q_1, Q_2) = \| Q_1 - Q_2 \| = \| (1,-2,-2) \| = 3.$$

Concludiamo questo paragrafo con la determinazione della distanza tra due rette sghembe dello spazio euclideo canonico $\mathbb{E}^3$, assieme alle nozioni di *retta e segmento di minima distanza.*

Teorema 2.3.5. *Siano r e s due rette sghembe di $\mathbb{E}^3$. Allora*

i) esiste un'unica coppia π_r e π_s di piani paralleli a entrambe le rette (e paralleli tra loro) tali che $r \subset \pi_r$ e $s \subset \pi_s$;

ii) esiste un'unica retta t ortogonale e incidente r e s (detta retta di minima distanza*);*

iii) posti $R := t \cap r$ e $S := t \cap s$, si ha

$$d(r,s) = d(\pi_r, \pi_s) = d(R,S),$$

dove il segmento RS è detto segmento di minima distanza *tra r e s.*

Dimostrazione. Siano $r = A + \langle v_r \rangle$ e $s = B + \langle v_s \rangle$.
i) Chiaramente $\pi_r = A + \langle v_r, v_s \rangle$ e $\pi_s = B + \langle v_r, v_s \rangle$. Si noti che questi sono veramente due piani in quanto $\dim_{\mathbb{R}} \langle v_r, v_s \rangle = 2$ poiché v_r e v_s non sono paralleli per ipotesi.
ii) Si consideri l'unica (a meno di multipli) direzione w ortogonale sia a r che a s (e quindi anche ortogonale a π_r e π_s), data da

$$\langle w \rangle := \langle v_r, v_s \rangle^{\perp}.$$

Denotiamo con ρ l'unico piano del fascio di piani $\mathcal{F}_r$ (di sostegno r) che è parallelo a w; e, analogamente, denotiamo con σ l'unico piano del fascio di piani $\mathcal{F}_s$ (di sostegno s) che è parallelo a w. Le loro giaciture sono

$$W_\rho = \langle v_r, w \rangle, \quad W_\sigma = \langle v_s, w \rangle.$$

Quindi, per la Proposizione 1.2.2, $t := \rho \cap \sigma$ è una retta di giacitura $W_\rho \cap W_\sigma = \langle w \rangle$, che risulta dunque ortogonale sia a r che a s.
Inoltre t e r giacciono entrambe sul piano ρ e sono ortogonali, quindi non parallele; pertanto sono incidenti. Analogamente t e s sono incidenti.
Per provare l'unicità di t, supponiamo che esista un'altra retta t' ortogonale e incidente r e s. Per quanto osservato all'inizio, c'è un'unica direzione w ortogonale a r e a s, dunque $t' \parallel t$. In particolare, t e t' sono complanari. Per questo, denotando con $R' := t' \cap r$ e $S' := t' \cap s$, si ha che i punti R, S, R', S' sono complanari. Il piano che li contiene, pertanto, deve contenere r (individuata da R e R') e analogamente s, mentre r e s sono sghembe per ipotesi.
iii) Si noti che

$$d(r,s) := \inf \{ d(P,Q) \mid P \in r, Q \in s \} \geq d(\pi_r, \pi_s).$$

Se si prova che $d(\pi_r, \pi_s)$ è raggiunta dalla coppia di punti $R \in r$ e $S \in s$, allora si ha la tesi. Per fare questo, basta osservare che la retta t è ortogonale a π_r e π_s per (ii) e che

$$R = t \cap r = t \cap \pi_r, \quad S = t \cap s = t \cap \pi_s.$$

Dunque S è la proiezione ortogonale di R su π_s (e viceversa); pertanto, per la Proposizione 2.3.3, $d(\pi_r, \pi_s) = d(R,S)$. □