Geometria 2

Anno accademico 2024-2025

Foglio di esercizi n.5

5 aprile 2025

1) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n, e sia $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di V. Dimostrare che esiste un unico prodotto scalare su V che rende $\mathcal{E}$ una base ortonormale.

2) In $\mathbb{E}^2$ si determini la distanza tra il punto $Q = (1, -2)$ e la retta r di equazione $r: 2x - y = 1$. Determinare il punto $A \in r$ a distanza minima da Q.

3) Nello spazio Euclideo $\mathbb{E}^3$ si determini la distanza tra il punto $P = (1, -1, 2)$ e la retta r di equazione

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + z = 0. \end{cases}$$

Si determini il punto $A \in r$ a distanza minima da P.

4) Calcolare l'angolo, la distanza e il segmento di minima distanza tra le due rette r e s di $\mathbb{E}^3$, dove

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x + y = 1 \\ y + z = -2. \end{cases}$$

5) Si considerino i punti $A = (2, -1)$ e $Q = (1, 1)$ di $\mathbb{E}^2$. Determinare la retta del fascio proprio di centro Q a massima distanza da A.

6) Determinare la distanza e i punti di minima distanza tra le rette

$$r: \begin{cases} x - y + z = -1 \\ z - 2y = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y + z = 2. \end{cases}$$

7) Si consideri il piano in $\mathbb{E}^4_{\mathbb{R}}$ di equazioni cartesiane

$$L: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ 2x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

Determinare le equazioni cartesiane del piano H ortogonale a L e passante per il punto $Q = (1, 1, 0, 2)$. Si calcoli la distanza tra Q e L.

8) Si consideri il piano $\pi\colon\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1$ in $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$. Determinare le equazioni cartesiane dei due piani a distanza 1 da π.

9) Sia $r: y = mx + q$ una retta in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$, e sia $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ l'angolo acuto che r forma con l'asse x. Dimostrare che $\tan\theta = |m|$.

10) Dire se la forma sesquilineare Hermitiana su $\mathbb{C}^2$ rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 5 \end{pmatrix}$$

è definita positiva.