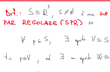
SUPERFICI REGOLARI in $\mathbb{R}^3$
PARAMETRIZZATE (SRP)

Def.: Un insieme $W \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto (o è un aperto) se $\forall\, w \in W$ $\exists$ palla aperta $B(w,r) \subseteq W$ di centro w e raggio r (r. $B(w,r) = W$

Def.: Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sottoinsieme, S si dice localmente connesso per archi se $\forall\, V \in S$ $\forall\, V, W \in S$ $\exists$ un arco $\gamma : [a,b] \to S$ tale che $\gamma(a) = V$ e $\gamma(b) = W$.

Def.: $S \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice connesso per archi se $\forall\, V, W \in S$ $\exists$ un arco $\gamma : [a,b] \to S$ tale che $\gamma(a) = V$ e $\gamma(b) = W$.

$V \subseteq S$ è aperto se $\exists\, U$ aperto di $\mathbb{R}^3$ t.c. $V = S \cap U$.



Def.: $S \subseteq \mathbb{R}^3$, $S \neq \emptyset$ è una SUP. PAR. REGOLARE (SPR) se

$\forall\, p \in S$, $\exists$ aperto $V \subseteq S$ t.c. $p \in V$, e $\exists\, W \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e una applicazione $f : W \longrightarrow V \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che:

① f è differenziabile

② $f : W \longrightarrow V$ è omeomorfismo (f è biiettiva e $f^{-1} : V \to W$ è continua)

(cioè f è biiettiva ed è una mappa aperta: $f(\text{aperto}) = \text{aperto}$)

③ $\forall\, z \in W$, $df(z)$ è applicazione lineare iniettiva $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (la mappa $J_f(z)$ ha rango massimo = 2)

$$J_f(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(z) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(z) \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad df(z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$f : W \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^3$

$f(x,y) = (x(x,y), y(x,y), z(x,y))$

Def.: Ogni mappa f è detta PARAM. LOCALE o SISTEMA DI COORD. LOCALI su S

- $f(W) = V$ INTORNO COORDINATO DI P
- $f^{-1} : V \longrightarrow W \subseteq \mathbb{R}^2$ CARTA LOCALE

OSS.:

Se cons. $\bigcup_{V \text{ intorno coordinato}} V = S$

(della notazione: $\bigcup_{p \in S} V_p = S$)

$W = W_p$ dove $f(z) = P$, $f_p = f$

Def.: $\{(f_p, W_p)\}_{p \in S}$ si dice ATLANTE di S

Cod. ⑤ $\forall z$ $J_f(z)_{3\times 2}$ ha rango massimo = 2

$\Rightarrow$ le 2 colonne di $J_f(z)$ sono LIN. INDIP.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x}(z) \\ \frac{\partial y}{\partial x}(z) \\ \frac{\partial z}{\partial x}(z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial y}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial z}{\partial y}(z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Segue che qualunque dei 2 vettori:

$J_f(z)_{3\times 2} \cdot \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}_{2\times 1} = f_{(z)}$

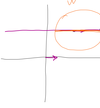
Sia $z = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$f(z) = P$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

DERIVATA DIREZ. nella direzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ed è la derivata della funzione $f\left(z + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (x(z+t\cdot(1)), y(z+t\cdot(1)), z(z+t\cdot(1)))$



$= f|_{L \cap W}$, con L retta $\begin{matrix} x = z \\ y = f(z) \end{matrix}$

inoltre: $f|_{L\cap W}$ è definita

definita su un opp. intervallo I in cui vale t

$f|_{L\cap W} : I \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ ed è una curva PAR. $\mathcal{C}^1$, e $df(z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è il suo vett. tg. in $f(z)$; S regolare $\Longrightarrow f|_{L\cap W}$ è regolare

Analogo discorso per 2^a colonna

$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial y}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial z}{\partial y}(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} = df(z)\cdot(*) = l_{f(z)}$

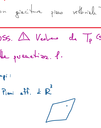
tgo $\parallel$ alla 2^a col. in $f(z)$ regolare

$f|_{L\cap W} = (x(z+t(0)), y(z+t(0)), z(z+t(0)))_{t\in I} : I \to \mathbb{R}^3$

M alla retta $y = f(z)$

OSS. S regolare (SR) $\Rightarrow$ $\dim \mathrm{Span}\left(f_x(z), f_y(z)\right) = 2$ (in modo $\forall\, z \in W$)

Def.: $T_f(z) := \mathrm{Span}(f_x(z), f_y(z))$ si dice PIANO VETT. TG. a S in $P = f(z)$



Il PIANO AFF. TG a S in P è $H_f(z)$ ed è il piano affine passante per P e giacente piano vettoriale $T_f(z)$

OSS. ⚠ Valore di $T_f(z)$ è indip. dalla parametrizz. f.

Esempi:

① Piani aff. di $\mathbb{R}^3$

Cons. H piano per $P \in \mathbb{R}^3$ e giacitura $\mathrm{Span}(v_1, v_2)$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ non nulli e non $\parallel$ tra loro

$P + t_1 v_1 + t_2 v_2$ è di H

$t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$

$f(t_1, t_2) = P + t_1 v_1 + t_2 v_2$

$P = (x_0, y_0, z_0)$

$v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$

③ $df(z) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ matrice di rango massimo (= 2 perché v_1, v_2 non $\parallel$)

$T_f(z) = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$

$H_f(z) = H$

② $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow H_f = \mathbb{R}^3$

W

biiettiva? sì

$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in H$, $P = f(t_1, t_2)$

$P = (x, y, z) \in H$

$z = (t_1, t_2)$

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t_1 + a_2 t_2 \\ y = y_0 + b_1 t_1 + b_2 t_2 \\ z = z_0 + c_1 t_1 + c_2 t_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_1 x + a_2 y + \ldots = x_0 \\ b_1 x + b_2 y + \ldots = y_0 \\ c_1 x + c_2 y + \ldots = z_0 \end{cases}$$

SE è angolo tra $v_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ allora $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ ha rango $= 1 < 2$

$v_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$ per ipotesi

$\Rightarrow \exists$ soluzione con $t \neq 0$?

Eccezione! $\Rightarrow$ posso esplicitare (t_1, t_2) con la FORMULA DI CRAMER

$A\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = b \qquad \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = A^{-1} b$