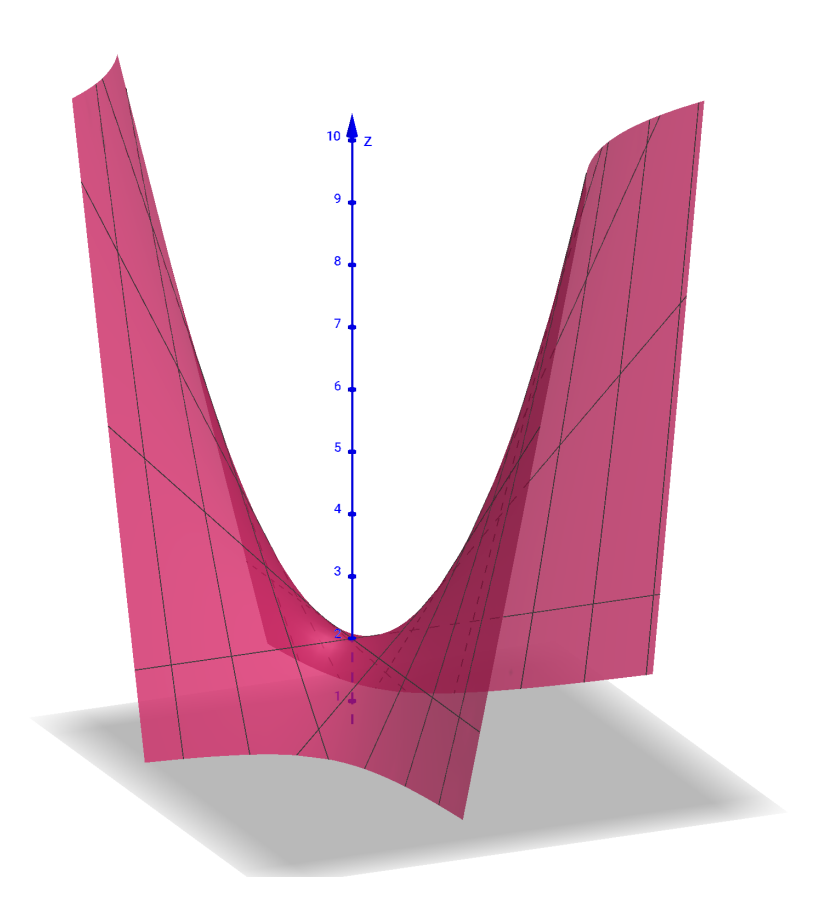
Lezione 2 aprile 2025

mercoledì 2 aprile 2025 09:23

Es ⓪ $H \subseteq \mathbb{R}^3$ è sup. regolare

① Sia $V \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : V \to \mathbb{R}$ diff.

Cons. il grafico $\Gamma_f := \{(u,v,f(u,v)) : (u,v) \in V\}$



Γ_f è SPR

con una parametrizzazione (globale)

$\varphi : V \to \Gamma_f$
$\varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))$

① φ è diff. perché lo sono le 3 componenti

② φ è invertibile con $\varphi^{-1} : \Gamma_f \to V$ continua?

sì: $\varphi^{-1} : \Gamma_f \to V$

$\varphi^{-1}((u,v,f(u,v))) = (u,v)$

è la restrizione della proiezione $p_1 : \underset{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}}{\mathbb{R}^3} \to \mathbb{R}^2$

$(f : A \to B,\ \Gamma_f \subseteq A \times B,\ \Gamma_f = \{(a, f(a))\})$

e φ^{-1} è continua (verifica facile)

③ $\varphi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix}$, $\varphi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$

sono sempre LIN. INDIP.

RICHIAMO:

piano tg. al grafico in $(u_0, v_0, f(u_0,v_0)) = P_0$

$$z = f(u_0,v_0) + \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)\cdot(x-u_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)(y-v_0)$$

$$\boxed{z = f(u_0,v_0) + \nabla f(u_0,v_0)\cdot\begin{pmatrix} x-u_0 \\ y-v_0 \end{pmatrix}} \ (*)$$

CONFRONTO con NOSTRA DEF.: piano tg vettoriale

$$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}\right) = T_{P_0}\Gamma_f$$

piano tg. affine $H_{P_0}\Gamma_f$: $P_0 + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$

$s,t \in \mathbb{R}$ parametri

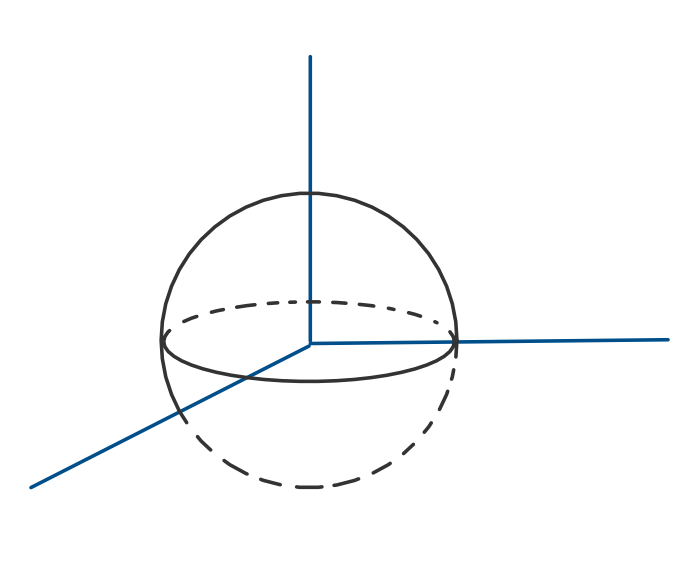
Un'equazione cartesiana di $H_{P_0}\Gamma_f$ è data da:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & x-u_0 \\ 0 & 1 & y-v_0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & z-f(u_0,v_0) \end{pmatrix} = 0$$

ESERCIZIO: Verificare che $H_{P_0}\Gamma_f$ coincide con $(*)$

② Sfera $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$



Cons. $z > 0$

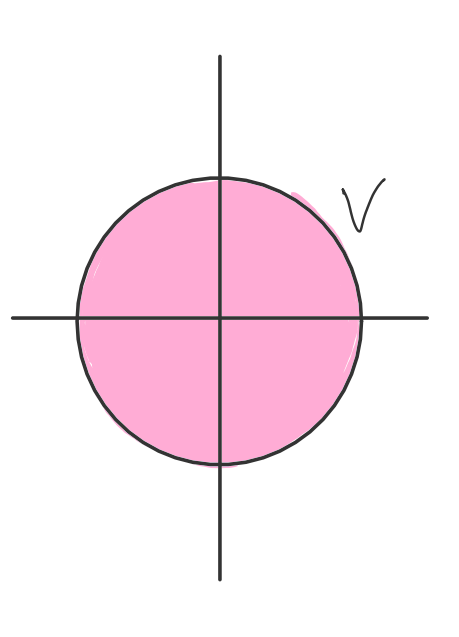
$\boxed{z^2 = 1 - x^2 - y^2}$

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

⟹ possiamo porre $\varphi_1(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$

$\varphi_1 : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$

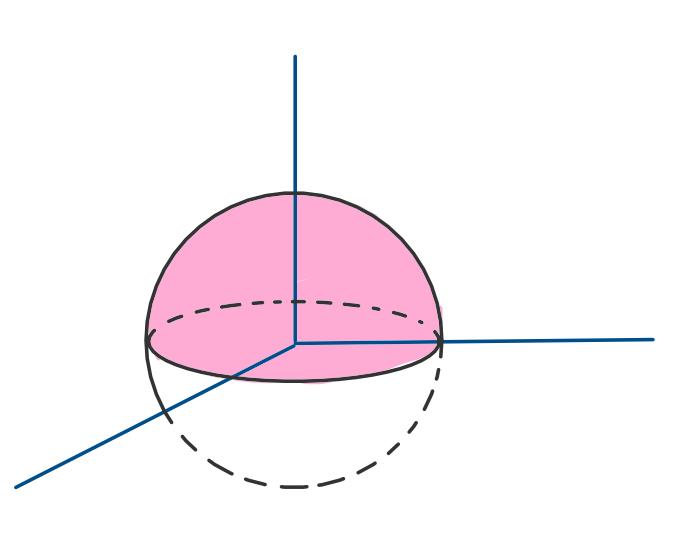
con $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 < 1\}$



$\varphi_1(V) \subseteq \mathbb{R}^3$, $\varphi_1(V) = \Gamma_f$

$f : V \to \mathbb{R}$, $f(u,v) = \sqrt{1-u^2-v^2}$ è diff.

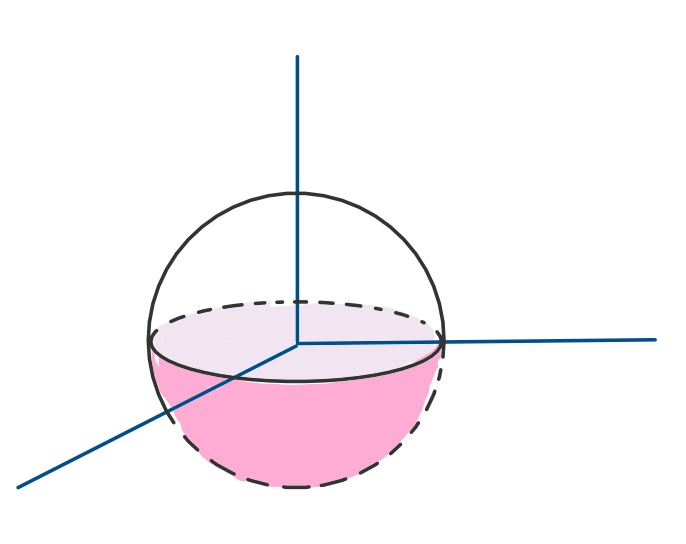
Per Es. ⓪, $\varphi_1(V)$ è sup. regolare ed è la semisfera superiore (aperta)



Analog. per $z < 0$

$\varphi_2(u,v) = (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2})$; $\varphi_2 : \overset{\text{stesso dominio}}{\overset{\downarrow}{V}} \to \mathbb{R}^3$

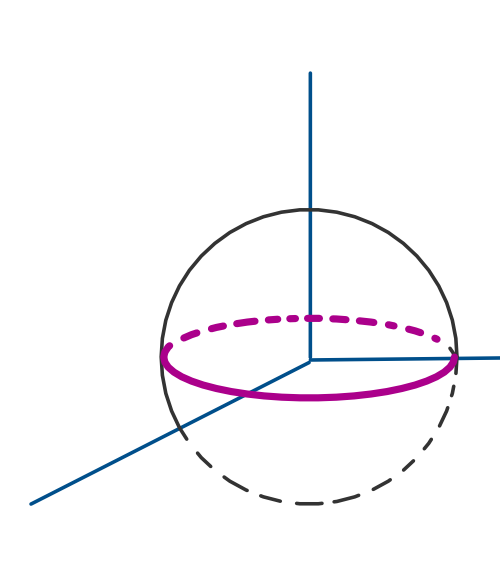
$\varphi_2(V)$ è una sup. regolare ed è la semisfera inferiore (aperta)



Non abbiamo ancora considerato i punti

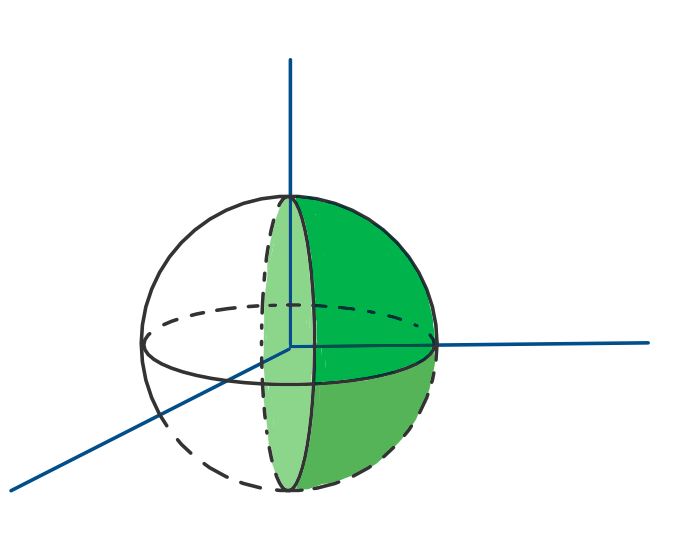
sull'Equatore:

$S^2 \cap \{z=0\}$



Cons. $\varphi_3 : V \to \mathbb{R}^3$

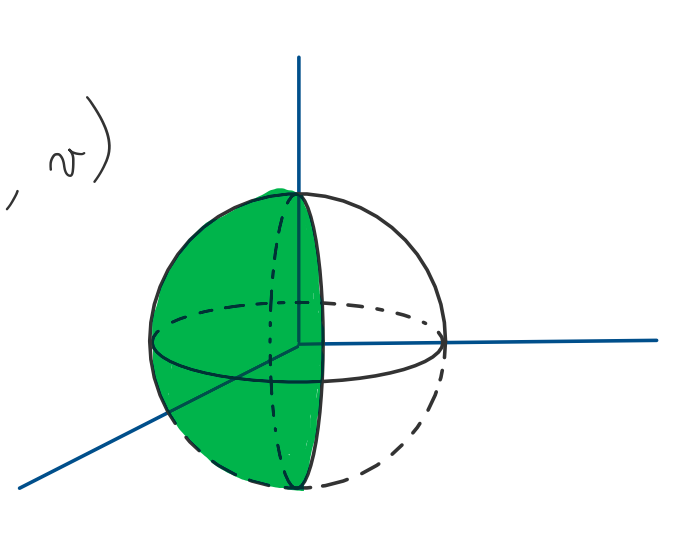
$\varphi_3(u,v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$



$x^2+y^2+z^2 = 1$

$y^2 = 1-x^2-z^2$

$\varphi_4(u,v) = (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v)$

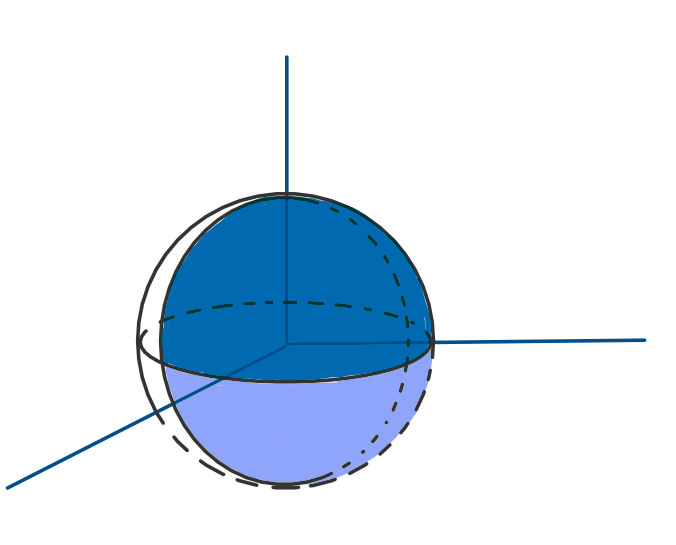


Sono rimasti esclusi 2 punti $(1,0,0)$
e $(-1,0,0)$

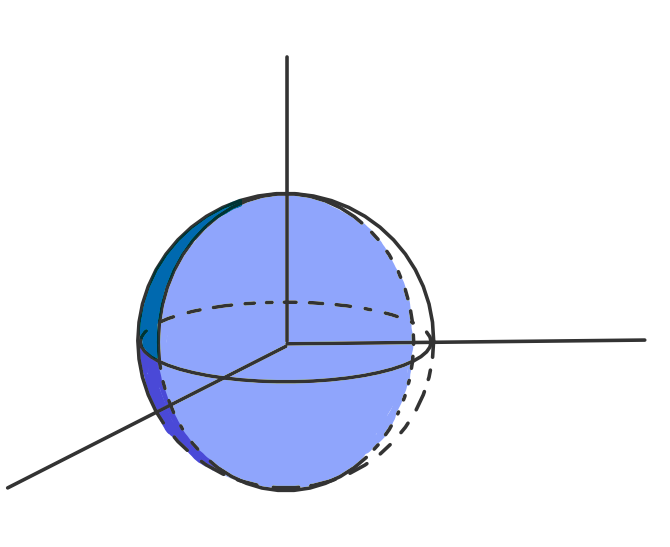
Cons. $x^2+y^2+z^2 = 1$

$x^2 = 1-y^2-z^2$

$\varphi_5 : V \to \mathbb{R}^3$, $\varphi_5(u,v) = (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$



$\varphi_6(u,v) = (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$



⟹ un atlante per S^2 è $\{(\varphi_i, V) : i = 1, \dots, 6\}$

Vediamo un altro atlante per S^2:

$U = \{(\theta, \Phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < \pi,\ 0 < \Phi < 2\pi\}$

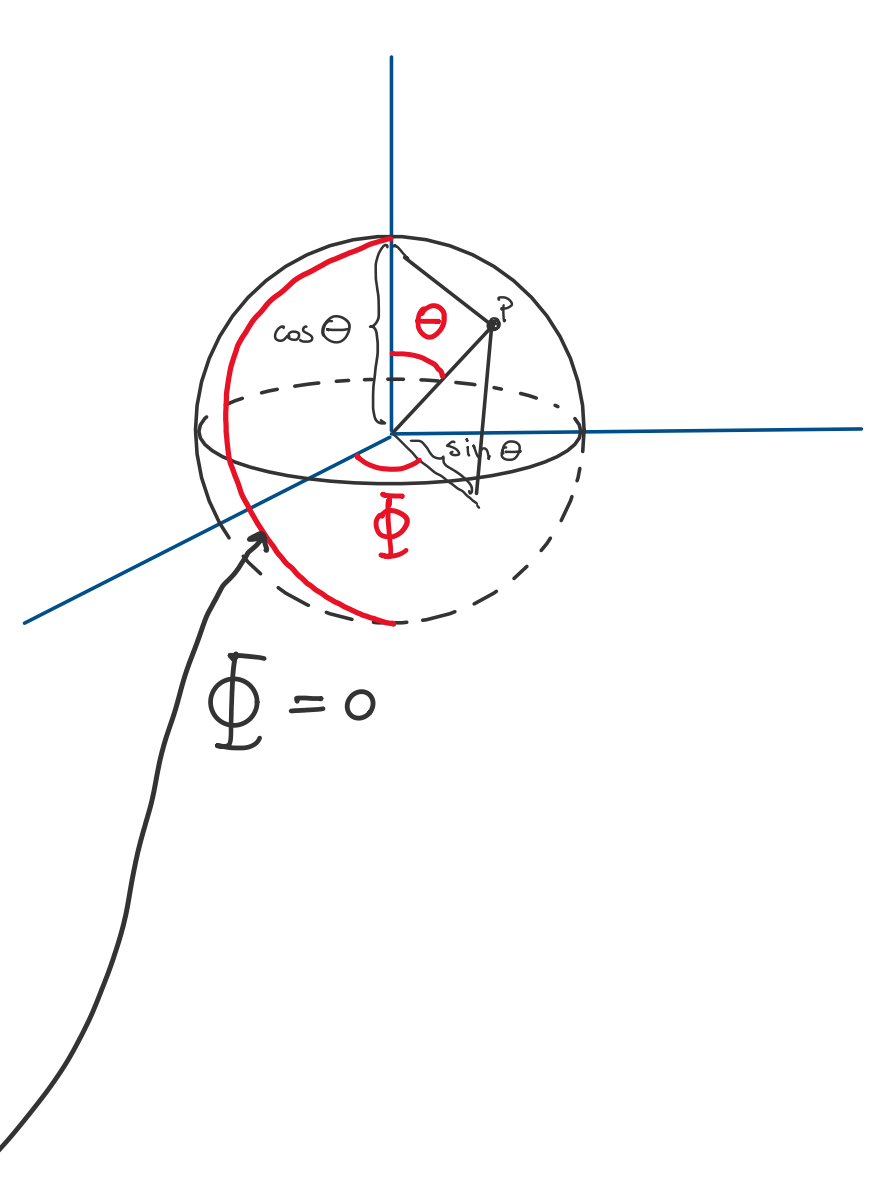
$\varphi_1 : U \to \mathbb{R}^3$

$\varphi_1(\theta,\Phi) = (\sin\theta\cos\Phi, \sin\theta\sin\Phi, \cos\theta)$

$= (x(\theta,\Phi), y(\theta,\Phi), z(\theta,\Phi))$

si ha: $x^2(\theta,\Phi) + y^2(\theta,\Phi) + z^2(\theta,\Phi) = 1 \Rightarrow \varphi_1(U) \subseteq S^2$

$\varphi_1(U) = ?$



$\Phi = 0$

Per Φ fissato, $0 < \theta < \pi$ ⟹ P viaggia tra il polo nord e polo sud (poli esclusi!)

⟹ descrive un meridiano (aperto)

$0 < \Phi < 2\pi$ ⟹ trovo tutti i meridiani tranne il meridiano sul piano $y = 0$

φ_1 è param.: ① φ_1 è diff. sì

② φ_1 è omeo $U \to \varphi_1(U) \subseteq S^2$

DIAMO per buono

$$③\ J(\varphi_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\Phi & -\sin\theta\sin\Phi \\ \cos\theta\sin\Phi & \sin\theta\cos\Phi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$\qquad\frac{\partial}{\partial\theta}\qquad\qquad\frac{\partial}{\partial\Phi}$

$\det = \sin^2\theta\cos\Phi$

$0 < \theta < \pi \Rightarrow \sin^2\theta \neq 0$

$\cos\Phi \neq 0 \Rightarrow \det \neq 0$

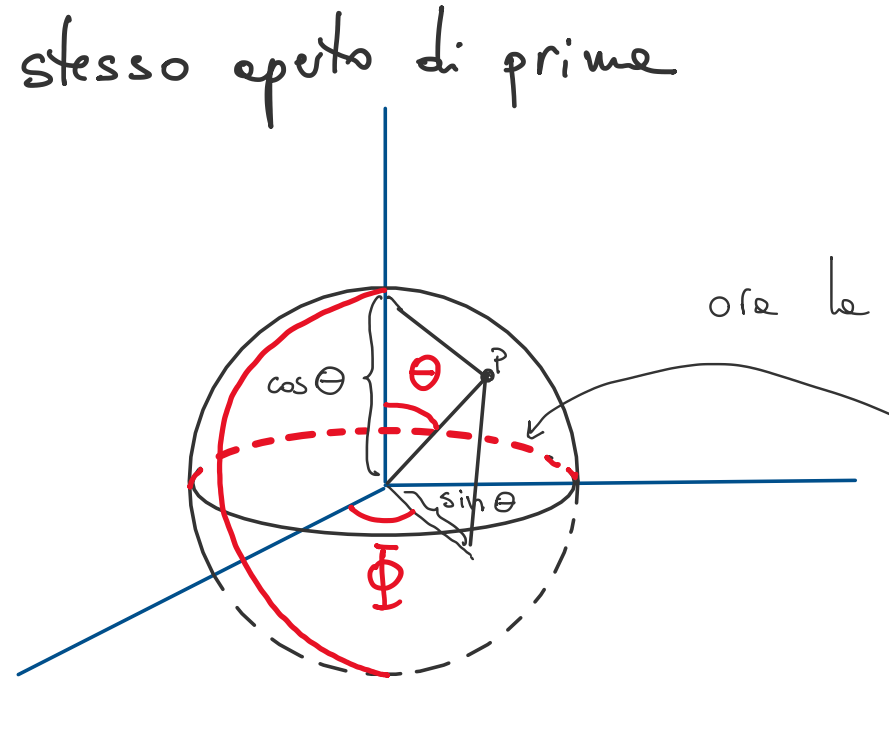
Se $\cos\Phi = 0 \Rightarrow J(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 0 & \mp\sin\theta \\ \pm\cos\theta & 0 \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

$0 < \Phi < 2\pi$

Per param. anche tutti i punti di $\Phi = 0$

Cons. $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{stesso aperto di prima}}}{\varphi_2 : U} \to \mathbb{R}^3$, $\varphi_2(\theta,\Phi) = (-\sin\theta\cos\Phi, \cos\theta, -\sin\theta\sin\Phi)$

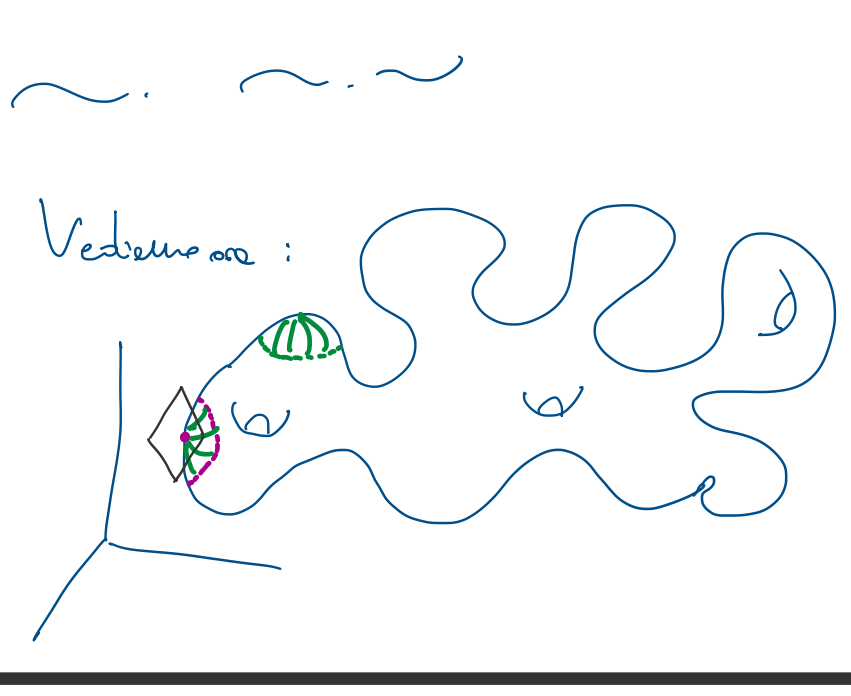


ora la parametrizzazione non comprende il semicerchio chiuso

⟹ $\{(\varphi_1, U), (\varphi_2, U)\}$ è un atlante per S^2

~. ~.~

Vediamo ora:



TEOREMA: ✱ Ogni sup. regolare è localmente un grafico

Più precis.: $\forall\ P \in S$, $\exists\ U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto
$\exists\ \tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ differenziabile
$\exists\ \varphi : U \to S$ parametrizzazione tale che

$\varphi(U) \ni P$ t.c.

$$\varphi(u,v) = \left.\begin{cases} (u, v, f(u,v)) \\ (u, f(u,v), v) \\ (f(u,v), u, v) \end{cases}\right\} \text{ con } f : U \to \mathbb{R} \text{ diff.}$$

Teo. Funz. Inversa:

$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diff.

$q \in U$ t.c. $df_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isomorfismo

⟹ ∃ aperto $A \subseteq U$, $q \in A$, ∃ $W \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

t.c. $f|_A : A \to W$ è DIFFEOMORFISMO

(f invertibile e f^{-1} è diff.)

Dim. del Teorema ✱:

S SPR, cons. una parametrizzata

$p \in S$; $\varphi : U_1 \to \mathbb{R}^3$ par. locale

$p \in \varphi(U_1)$, $p = \varphi(q)$, $q \in U_1 \subseteq \mathbb{R}^2$

$J(\varphi)(q)$ ha rango 2

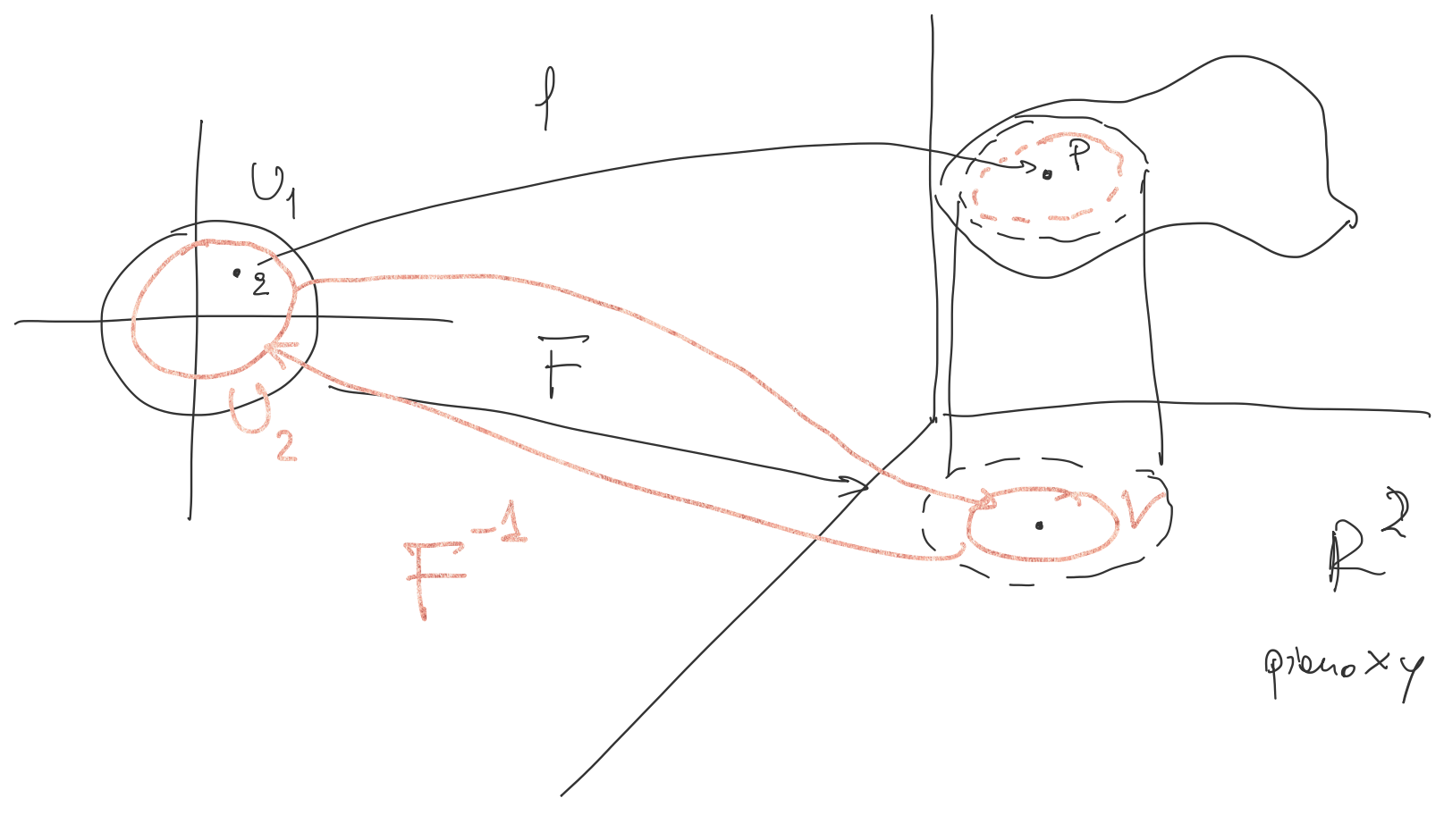
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix}$$

ci 2 righe lin. INDIP
Supp. le prime 2

det ≠ 0

Cons. $F : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$



$(x(F^{-1}(a,b)), y(F^{-1}(a,b)))$
$= F(F^{-1}(a,b))$
$\overset{!}{=} (a,b)$

$JF(q) = (\text{prime 2 righe di } J\varphi(q))$

è inv. $\forall\ q \in U_1$

⟹ $dF(q)$ è isomorfismo

Teo Funz. Inv. ⟹ $\exists\ U_2 \subseteq U_1$ aperto

$\exists\ V \subseteq \mathbb{R}^2$

t.c. $F|_{U_2} : U_2 \to V$ è DIFFEO

$$\begin{tikzcd} \Rightarrow \exists\ F^{-1} : V \arrow[r] & U_2 \text{ diff.} \arrow[d, "\varphi"] \\ & S \end{tikzcd}$$

Cons. $\varphi \circ F^{-1} : V \to S$

$(\varphi \circ F^{-1})(a,b) = (x(F^{-1}(a,b)), y(F^{-1}(a,b)), z(F^{-1}(a,b)))$

$\overset{!}{=} (a, b, z(F^{-1}(a,b)))$

$z(u,v) : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd} F^{-1} : V \arrow[r] & U_2 \subseteq U_1 \arrow[d, "z"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$z \circ F^{-1} : \underset{\subseteq \mathbb{R}^2}{V} \to \mathbb{R}$ è diff.