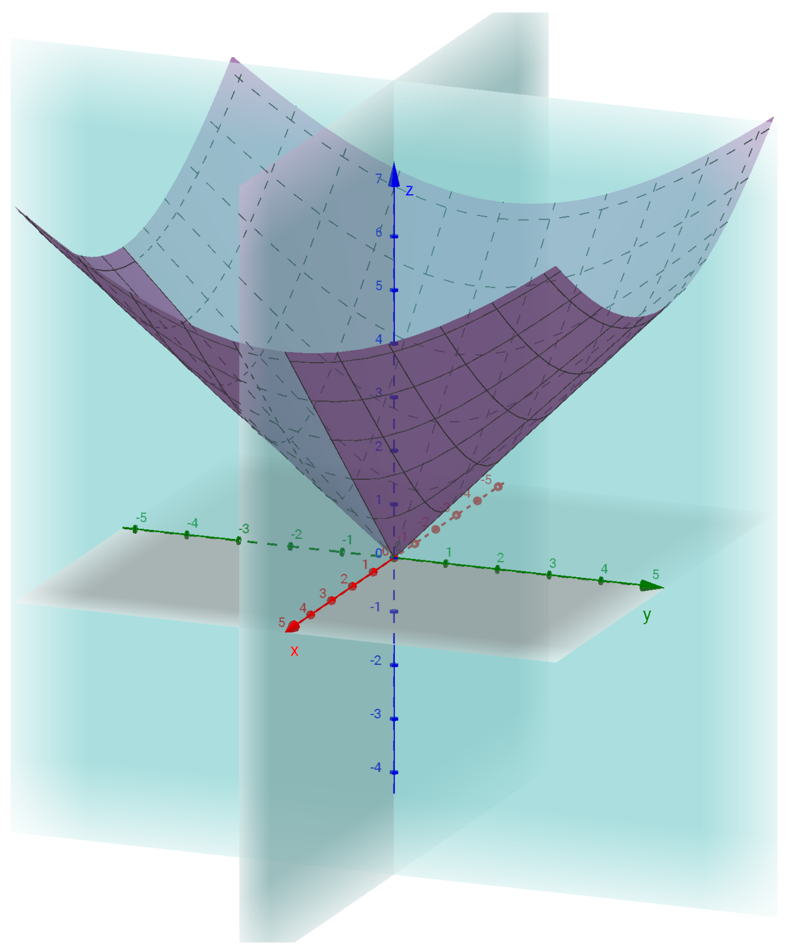
Lezione 3 aprile 2025

giovedì 3 aprile 2025 10:06

Ieri: Ogni sup. reg. è localmente un grafico

COR.: $S = \{(x,y,z) : z = \sqrt{x^2+y^2}\} = \{(x, y, \sqrt{x^2+y^2})\}$

non è una superficie regolare.



Dim.:

S non è regolare in $(0,0,0)$; se per ass. lo fosse, dovrebbe $\exists$ aperto $W \ni (0,0,0)$

su cui S è un grafico

- se S loc. $(x, y, f(x,y)) \Rightarrow f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

  non è diff. in $(0,0)$

- se S loc. $(x, g(x,z), z) \Rightarrow$ ogni retta ortogonale al piano xz dovrebbe intersecare $S \cap W$ in al più 1 punto

  generica retta $\perp$ piano xz: vettore direzione $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ passante per $Q = (q_1, 0, q_3) \in$ piano xz

  $$L: \begin{cases} x = q_1 \\ y = t \\ z = q_3 \end{cases}, \quad q_1, q_2$$

  Sostituisco nell'eq. $z = \sqrt{x^2+y^2}$: $q_3 = \sqrt{q_1^2+t^2}$ se t_0 è soluzione, lo è anche $-t_0$

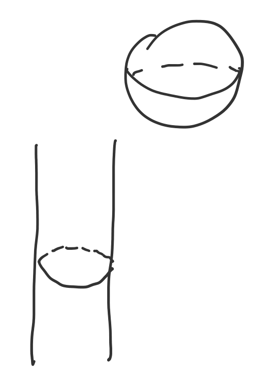
  $\Rightarrow$ se L interseca $S \cap W$ in un punto $\neq (0,0,0)$, la interseca in 2 punti distinti (vedi figura)

- Se S è loc. $(h(y,z), y, z)$: ragionamento analogo al precedente

Pb.: Quando una S in eq. implicita è SPR?

Es.: $x^2+y^2+z^2=1$

$x^2+y^2=1$



Def.: Sia $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diff.
U aperto

$p \in U$ si dice **PUNTO CRITICO** se

$$dF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

NON è SURIETTIVO

(in particolare, se $m > n$, tutti i punti sono critici)

Se p CRITICO, $F(p) \in \mathbb{R}^m$ si dice **VALORE CRITICO**

Infine: se $q \in \mathbb{R}^m$ non è valore critico, allora si dice **PUNTO REGOLARE**

(in part. se $q \notin F(U)$, è regolare)

se $q \in F(U)$, $\forall p \in F^{-1}(q)$, p non è punto critico, $dF(p)$ è suriettivo

OSS.: Se $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diff.

$dF(p) = {}^t\nabla F(p)$: $J(F)(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(p) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(p) \end{pmatrix} = \nabla F(p)$

p è critico $\Leftrightarrow \nabla F(p) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$dF(p) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Teo. Sia $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diff.

e $a \in F(U)$ VALORE REGOLARE

$\Rightarrow F^{-1}(a) \subseteq \mathbb{R}^3$ è una sup. reg. di $\mathbb{R}^3$

Es.: $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

con $1 \in \mathbb{R}$

$1 = F(1,0,0) \in F(\mathbb{R}^3)$

è valore regolare?

$\nabla F = \begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix}$

$(0,0,0)$ unico punto critico

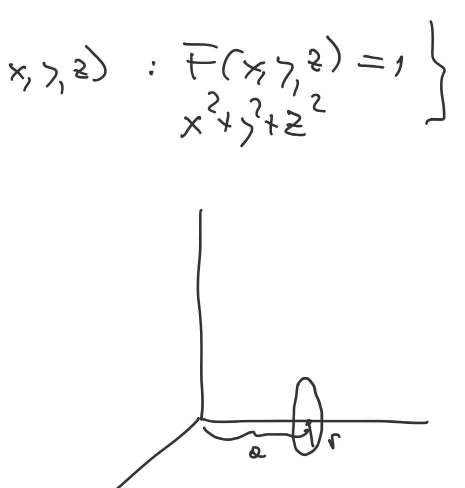
$F(0,0,0) = 0 \neq 1$

$\Rightarrow 1$ valore regolare

$F^{-1}(1) =$ sup. reg.

$= \{(x,y,z) : \underbrace{F(x,y,z)}_{x^2+y^2+z^2} = 1\}$

Es. Toro:



eq. $\left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2 + z^2 = r^2$, con $r < a$

cons. $F(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2 + z^2$

$\nabla F = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ CALCOLARE PER ESERCIZIO

r^2 è un valore regolare