Lezione 19 marzo 2025

mercoledì 19 marzo 2025 09:07

Visto: TRIEDRO DI FRENET

$\alpha: I \to \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ PLA; di classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 3$

$T(s) := \alpha'(s)$ versore TG; $T: I \to \mathbb{R}^3$ classe $\mathcal{C}^{k-1}$

$n(s) := \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$, $n: I \to \mathbb{R}^3$, classe $\mathcal{C}^{k-2}$

$\|\alpha''(s)\| =: k(s) \geq 0$ CURV. DI α in s

$k: I \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ di classe $\mathcal{C}^{k-2}$

se α è BIREGOLARE

cioè regolare e $\alpha''(s) \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\forall s \in I$

Con le notazioni: $T'(s) = k(s) \cdot n(s)$

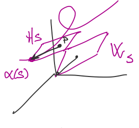
Def.: Il PIANO OSCULATORE VETTORIALE $W_s := \mathrm{Span}(T(s), n(s))$

$T(s) \perp n(s) \Rightarrow T(s), n(s)$ LIN. INDIP.

Il Piano OSCULATORE AFFINE H_s: è il piano affine passante per $\alpha(s) \in \mathbb{R}^3$, con giacitura $\mathrm{Span}(T(s), n(s))$

cioè: $P \in H_s \Longleftrightarrow P - \alpha(s) \in \mathrm{Span}(T(s), n(s))$

$\Downarrow$



$\exists\, w \in \mathrm{Span}(T(s), n(s))$ tale che

$P - \alpha(s) = w$; siccome $\{T(s), n(s)\}$ è una base di W_s,

esistono $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$: $w = t_1 \cdot T(s) + t_2\, n(s)$

$\Rightarrow P - \alpha(s) = t_1 \cdot T(s) + t_2\, n(s)$

$$\boxed{P = \alpha(s) + \underset{\sim\sim}{t_1} \cdot T(s) + t_2\, n(s) \quad \text{eq. vettoriale del piano affine}}$$

da cui si deducono delle equazioni affini come segue:

se $P = (y_1, y_2, y_3)$

$\alpha(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$

$T(s) = (x_1'(s), x_2'(s), x_3'(s))$

$n(s) = \frac{1}{k(s)} (x_1''(s), x_2''(s), x_3''(s))$

$$\boxed{\begin{cases} y_1 = x_1(s) + t_1\, x_1'(s) + \frac{t_2}{k(s)}\, x_1''(s) \\ y_2 = x_2(s) + t_1\, x_2'(s) + \frac{t_2}{k(s)}\, x_2''(s) \\ y_3 = x_3(s) + t_1\, x_3'(s) + \frac{t_2}{k(s)}\, x_3''(s) \end{cases}}$$

$t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ parametri liberi

Def.: α PLA biregolare

$b(s) := T(s) \wedge n(s)$ VETT. BINORM., $b: I \to \mathbb{R}^3$ di classe $\mathcal{C}^{k-2}$

$b(s) \perp T(s)$, $b(s) \perp n(s)$

$\Rightarrow b(s) \perp W_s$

OSS. Si ha $\|b(s)\| = 1$ $\forall s \in I$; infatti $\underbrace{\|b(s)\|}_{=\text{area di quadrato}} = \|T(s)\| \cdot \|n(s)\| \sin\alpha$

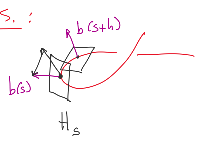
$= \|T(s)\| \cdot \|n(s)\| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\Rightarrow \{T(s), n(s), b(s)\}$ è BASE ORTONORMALE

TRIEDRO DI FRENET

che ha la stessa orientazione della base canonica.

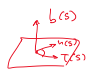
OSS.:



Voglio studiare la variazione infinitesimale del piano osculatore $\Rightarrow$ studio variaz. di $b(s)$

Cons. $b'(s)$: che direzione ha?

OSS.: Se $b(s)$ è costante $\Rightarrow W_s$ è costante



OSS. $\|b(s)\|^2 = 1$ $\forall s \in I$

$\Rightarrow \frac{d}{ds}(b(s) \cdot b(s)) = \frac{d}{ds}(1)$

$\cancel{2}\, b'(s) \cdot b(s) = 0$

$\Rightarrow \boxed{b'(s) \perp b(s)}$

Inoltre: $b(s) = T(s) \wedge n(s)$

$b'(s) = \frac{d}{ds}(T(s) \wedge n(s))$

$= \underbrace{\underbrace{T'(s)}_{k(s)\, n(s)} \wedge n(s)}_{=0} + T(s) \wedge n'(s)$

$= T(s) \wedge n'(s)$

$\Rightarrow \boxed{b'(s) \perp T(s)}$

$\Longrightarrow b'(s) \parallel n(s)$

parallelo

$\Longrightarrow \forall s \in I$, $\exists$ una costante $\tau(s)$ tale che

$$\boxed{b'(s) = \tau(s)\, n(s)}$$

Def.: $\tau(s) \in \mathbb{R}$ si dice TORSIONE DI α in s.

OSS.: $\tau: I \to \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^{k-3}$

infatti

se $b(s) = \begin{pmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \\ b_3(s) \end{pmatrix}$, $n(s) = \begin{pmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \\ n_3(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{k(s)} \begin{pmatrix} x_1''(s) \\ x_2''(s) \\ x_3''(s) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

poichè α biregolare

$\Rightarrow \forall s \in I$, $\exists\, x_i''(s) \neq 0$

$\Rightarrow$ trovo $\tau(s) = \frac{b_i'(s)}{n_i(s)}$ $\quad (b'(s) = \tau(s)\, n(s))$

$$\begin{pmatrix} b_1'(s)\\ b_2'(s)\\ b_3'(s)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tau(s)\, n_1(s)\\ \tau(s)\, n_2(s)\\ \tau(s)\, n_3(s)\end{pmatrix}$$

e per il Teo. Perm. del segno, $\tau(s) = \frac{b_i'(s)}{n_i(s)}$ in un intorno aperto di s.

Ricapitolo: α PLA, biregolare ⇝ $k(s)$ di C^{k-2}
$\tau(s)$ classe C^{k-3}

Vedremo: Teorema Fondamentale della Teo. locale delle curve:

Date $k: I \to \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+ = \{r > 0\}$) classe C^{p+1}

$\tau : I \to \mathbb{R}$ classe C^{p}

$\Longrightarrow \exists !$, a meno di movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$,

curva $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ PLA e biregolare, di classe C^{p+3}

con curvatura k e torsione τ.

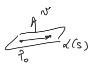
Per la dim. dobbiamo lavorare ancora.

PROP. Sia α PLA e biregolare.
Allora α è piana (cioè $\alpha(I) \subseteq H$ piano affine)

$\Longleftrightarrow \tau(s) \equiv 0 \quad \forall s \in I$

Dim.: $\Longrightarrow$ supp. $\alpha(I) \subseteq H$, fisso $P_0 \in H$

e $\nu \perp H$, $\nu \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$



$(\alpha(s) - P_0) \cdot \nu = 0 \quad \forall s \in I$

$$\frac{d}{ds}\Big((\alpha(s) - P_0) \cdot \nu \Big) = 0$$

$$= \alpha'(s) \cdot \nu + \underbrace{(\alpha(s) - P_0) \cdot \nu'}_{=0} = 0 \ \forall s \in I$$

$= T(s) \cdot \nu$

$$\Longrightarrow \frac{d}{ds}\big(\alpha'(s) \cdot \nu\big) = 0$$

$$= \alpha''(s) \cdot \nu + \underbrace{\alpha'(s) \cdot \nu'}_{=0} = 0$$

$= k(s) \cdot n(s) \cdot \nu$, $\quad k(s) \neq 0$

$\Longrightarrow n(s) \cdot \nu = 0$

$\Longrightarrow \mathrm{Span}(T(s), n(s)) = W_s$

è costante, perché $\perp \nu$ ${}_{\ni \alpha(s)}$

e siccome W_s è la giacitura di H_s, è $\perp \nu$

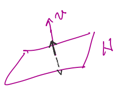
ma $H \ni \alpha(t)$ è $\perp \nu$

$\Longrightarrow H_s = H \quad \forall s \in I$

Inoltre: abbiamo scoperto $T(s) \cdot \nu = 0$ $\forall s$
$n(s) \cdot \nu = 0$

$\Longrightarrow b(s) \parallel \nu$, $b(s)$ versore

$$b(s) = \begin{cases} \dfrac{\nu}{\|\nu\|} \\[2mm] -\dfrac{\nu}{\|\nu\|} \end{cases}$$



Ora: b almeno continua
I connesso
$\Longrightarrow b(I)$ è connesso $\Longrightarrow b(I)$ è un vettore costante

$\Longrightarrow b(s)$ è costante

$\Longrightarrow b'(s) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \cdot n(s)$

$\Longrightarrow \tau(s) = 0 \quad \forall s \in I$

Viceversa: Supp. $\tau(s) \equiv 0 \ \forall s$

$\Longrightarrow b'(s) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \forall s$

$\Longrightarrow b(s) = \nu$ costante

$\boxed{\nu \perp T(s)}$ & $\nu \perp n(s) \quad \forall s$

$\Longrightarrow$ il piano osculatore è costante

sia $s_0 \in I$

$$\frac{d}{ds}\Big((\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot \nu \Big) = \alpha'(s) \cdot \nu$$

$$= \boxed{T(s) \cdot \nu = 0} \quad \forall s$$

$\Longrightarrow (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot \nu = \text{costante} = c \quad \forall s$

per $s = s_0$: $\underbrace{(\alpha(s_0) - \alpha(s_0))}_{= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}} \cdot \nu = c = 0$

$\Longrightarrow c = 0$

$\Longrightarrow (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot \nu = 0$

$\Longrightarrow (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \in$ piano vettoriale $\perp \nu$

= piano osculatore $W_s = W$