Geometria 3 - Curve e superfici 2024/2025
Foglio di esercizi 4

Prof. Valentina Beorchia

7 aprile 2025

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare; al variare di $t \in I$, la tangente, la normale e la binormale parametrizzano delle curve le cui immagini giacciono sulla sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$. Queste curve si chiamano rispettivamente *l'indicatrice delle tangenti*, *l'indicatrice delle normali e l'indicatrice delle binormali*.

1. Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da
$$\alpha(t) = \left(\cos\frac{t}{\sqrt{2}}, \sin\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$
   (a) Si verifichi che α è una curva parametrizzata per lunghezza d'arco.
   (b) Si studino l'indicatrice delle tangenti, delle binormali e delle bitangenti di α.

2. Si dimostri che una curva è una elica circolare se e solo se l'indicatrice delle tangenti è una circonferenza.

3. Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da
$$\alpha(t) = (t, 2t, t^4).$$
   (a) Si verifichi che α è una curva regolare e si individuino eventuali punti di flesso.
   (b) Si calcolino, ove possibile, la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet di α.
   (c) Si verifichi che α è una curva piana e si individui il piano in cui è contenuta.

4. Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da $\varphi(u, v) = (u, v^3, u - v)$.

   (a) Si dimostri che $\varphi(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare.

   (b) Si verifichi che la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(t) = (3t, t^6, 3t - t^2)$ è regolare.

   (c) Si verifichi che esiste un'applicazione $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tale che $\alpha = \varphi \circ \gamma$, e quindi la traccia della curva è contenuta nella superficie $\varphi(\mathbb{R}^2)$.

   (d) Si verifichi che è possibile esprimere $\alpha'(0)$ come combinazione lineare dei vettori $\varphi_u(0, 0)$ e $\varphi_v(0, 0)$.