Geometria 2

Anno accademico 2024-2025

Foglio di esercizi n.6

12 aprile 2025

1) Dimostrare che per ogni $R_\theta, S_\theta \in \mathrm{SO}(2)$ si ha: $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$ e $(S_\theta)^{-1} = S_\theta$.

2) Dimostrare che se $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ ha una matrice $M \in \mathrm{SO}(2)$ rispetto ad una certa base ortonormale, allora ϕ ha la stessa matrice M oppure M^{-1} rispetto a qualunque altra base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ *(suggerimento: utilizzare la Proposizione 2.4.6)*.

3) Sia $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{E}^n_{\mathbb{R}})$ un'affinità che preserva le distanze, cioè

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$$

per ogni $P, Q \in \mathbb{E}^n$. Dimostrare che $f \in \mathrm{Is}(\mathbb{E}^n)$.

4) Rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane di $\mathbb{E}^2$, verificare che l'affinità di equazioni

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2 + 2\sqrt{3} \\ \\ y_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - 1 \end{cases}$$

è un'isometria di $\mathbb{E}^2$ e classificarla.

5) Classificare l'isometria di $\mathbb{E}^2$ di equazione

$$Y = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

con $X = {}^t(x_1, x_2)$, $Y = {}^t(y_1, y_2)$.

6) Determinare l'equazione della riflessione σ_r di sostegno la retta di $\mathbb{E}^2$

$$r : 3x + 4y - 1 = 0.$$

7) Determinare l'equazione di $f = \sigma_r \circ \sigma_s$, dove σ_r e σ_s sono associate alle rette

$$r : 3x + 4y - 1 = 0, \quad s : x - y = 0$$

e classificare l'isometria f.

8) Sia $v = (2, -1)$ un vettore di $\mathbb{R}^2$. Scrivere la traslazione t_v di $\mathbb{E}^2$ come composizione di due riflessioni.

9) Dimostrare che le omotetie di $\mathbb{E}^n$ preservano gli angoli. Come variano le distanze?

10) Si consideri $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale reale (rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali), munito del prodotto scalare che rende la base $\{1, i\}$ una base ortonormale. In questo modo $\mathbb{C}$ diventa un piano euclideo. Dimostrare che le affinità complesse di $\mathbb{C}$ preservano gli angoli. Caratterizzare le affinità complesse che sono isometrie euclidee e dire di che tipo sono.