Geometria 3 - Curve e superfici 2024/2025
Foglio di esercizi 5

Prof. Valentina Beorchia

14 aprile 2025

1. Si consideri la sfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.
   (a) Si verifichi che per ogni $v \in \mathbb{S}^2$ vale che $v \perp T_v\mathbb{S}^2$, dove $T_v\mathbb{S}^2$ è il piano vettoriale tangente a $\mathbb{S}^2$ in v.
   (b) Si consideri $N = (0,0,1)$ il polo nord di $\mathbb{S}^2$ e si definisca l'applicazione
   $$p_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$$
   ponendo $p_n(y) = \overline{Ny} \cap \{z = 0\}$, dove $\overline{Ny}$ indica la retta per N ed y. La mappa p_N si chiama *proiezione stereografica* di $\mathbb{S}^2$ dal polo nord.
   Analogamente si definisca p_S dove $S = (0,0,-1)$ è il polo sud.
   Si dimostri che $\{(\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, p_N), (\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, p_S)\}$ è un atlante per $\mathbb{S}^2$.

2. Si consideri la funzione $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $\Phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv)$ con $b > 0$.
   (a) Si verifichi che $S = \Phi(\mathbb{R}^2)$ è una superficie regolare.
   (b) Si descrivano le curve coordinate, cioè del tipo $\Phi(u_0, t)$ e $\Phi(t, v_0)$ con $u_0 \in mR^2$ e $v_0 \in \mathbb{R}^2$ fissati.
   (c) Si verifichi che l'asse z è contenuta in S.
   (d) Si determinino le equazioni cartesiane del piano tangente e del piano tangente affine in un punto generico della superficie.
   (e) Si verifichi che localmente la superficie è esprimibile come grafico di una funzione, dando esplicitamente delle espressioni per le funzioni utilizzate.

3. Si consideri il piano $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$. Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ l'aperto

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > v\}$$

e sia $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ data da $\Phi(u, v) = (u + v, u + v, uv)$.

   (a) Si calcoli la matrice jacobiana di Φ e se ne calcoli il rango in un punto generico.

   (b) Si verifichi che $\Phi(U) \subset H$.
   La funzione Φ è una parametrizzazione locale di H?
   $\Phi(U)$ è un aperto di H?
   Φ è una parametrizzazione locale di $\Phi(U)$?
   Si giustifichino le risposte.

4. Si definisca una curva regolare $C \subset \mathbb{R}^n$ in analogia con una superficie regolare. Si provi che

   (a) La preimmagine di un valore regolare c per una funzione differenziabile $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eè una curva regolare $C \subset \mathbb{R}^2$.
   Si dia un esempio di una tale curva non connessa.

   (b) La preimmagine di un valore regolare c per una funzione differenziabile $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è una curva regolare $C \subset \mathbb{R}^3$.