PRINCIPI VARIAZIONALI

Il moto (come la configurazione del sistema varia nel tempo) è descritto da una funz. $\bar{q} : \mathbb{R} \longmapsto Q$, $t \longmapsto \bar{q}(t)$

Finora, il moto di un sistema (soggetto a forze) è stato predetto risolvendo delle EQUAZIONI DIFFERENZIALI la cui incognita era una funzione del tempo.

↳ Eq. di Lagrange (Newton)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\left(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t\right) - \frac{\partial L}{\partial q_h}\left(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t\right) = 0$$

incognita

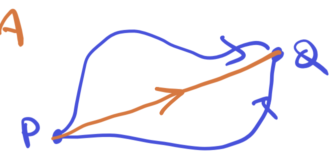
vale punto per punto nella retta reale $\mathbb{R}_t$ (LOCALE)

> I moti effettivamente compiuti dal sistema sono descritti da funzioni $q_1(t), \dots, q_m(t)$ che soddisfano una certa equazione differenziale (locale).

Ora descriveremo il moto effettivam. seguito dal sistema usando PROPRIETÀ GLOBALI (INTEGRALI) della funz. $\bar{q}(t)$

Esempio di proprietà globale che permette di selezionare una traiettoria fra tutte quelle possibili:

dati due pti in $\mathbb{R}^3$, la traiettoria da selezionare fra quelle che congiungono due pti dati (P, Q) è quella che ottiene LUNGHEZZA MINIMA



FUNZIONI :

- data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$

  i pti stazionari di f sono quelli che risolvono $f'(x)=0$

- data una funz. a più variabili $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $(x_1,\dots,x_N) \mapsto F(x_1,\dots,x_N)$

  i pti stazionari di F sono gli che risolvono $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x})=0 \quad \forall i=1,\dots,N$

- ora considereremo il caso in cui F non opera su uno spazio vett. finito-dimensionale $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$, ma su uno spazio (infinito-dim.) di FUNZIONI

  $\rightsquigarrow$ F detto FUNZIONALE

__Def__. Dato uno spazio $\mathcal{U}$ di funzioni, si dice FUNZIONALE definito nel dominio $\mathcal{U}$ una MAPPA F che ad ogni funzione $u \in \mathcal{U}$ associa un numero (reale)

$$F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto F[u] \in \mathbb{R}$$

ES) $\mathcal{U} = \{$ funzioni regolari definite sull'intervallo $[0,1]\}$

$u \in \mathcal{U}$

1) $F[u] = \int_0^1 u(t)\,dt$

$u(t) = \operatorname{sen}(\pi t)$

$$F[u] = \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}\xi\, d\xi = \frac{2}{\pi} \in \mathbb{R}$$

2) $F[u] = u(t_0)$ dove t_0 è un valore fissato in $[0,1]$

$t_0 = 1/2$ $\quad u(t) = \text{sen}(\pi t)$

$F[u] = \text{sen}(\pi \cdot \tfrac{1}{2}) = 1 \in \mathbb{R}$

3) $F[u] = u'(t_0)$ $\qquad F[u] = \pi\cos(\pi t)\big|_{t=1/2} = 0$

4) $F[u] = \sqrt{\int_0^1 u^2(t)\,dt}$ $\qquad F[u] = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\uparrow$
sen πt

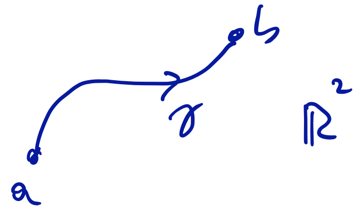
Es 1,2,3 sono FUNZIONALI LINEARI

$$F[c_1 u_1 + c_2 u_2] = c_1 F[u_1] + c_2 F[u_2] \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$u_1, u_2 \in \mathcal{U}$

Un funzionale di notevole interesse è quello che data una curva γ, restituisce la sua LUNGHEZZA

$$\gamma \mapsto F[\gamma] = \text{lunghezza di } \gamma$$



In che senso una curva "è una funzione"?

↳ La curva è descritta da una funzione

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \gamma(t) \qquad \text{e t.c.} \quad \gamma(0) = a \quad \gamma(1) = b$$

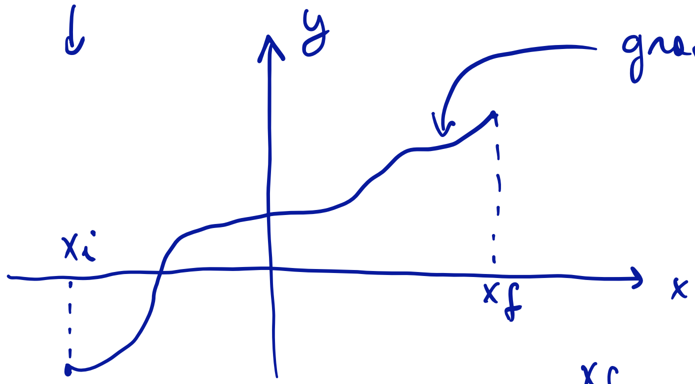


grafico di $y = u(x)$

usiamo x come parametro

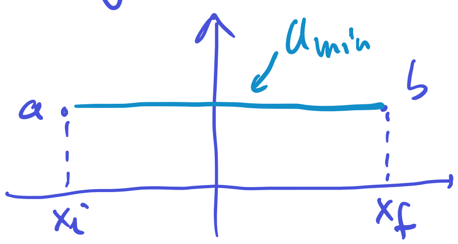
→ Lunghezza: $$F[u] = \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx \qquad (*)$$

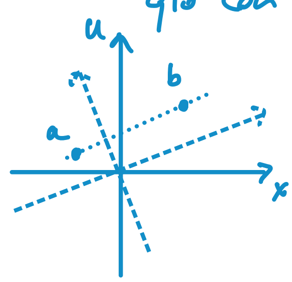
GEODETICHE

Problema classico: trovare le linee più corte tra due punti dati (in $\mathbb{R}^2$)

Nel nostro esempio sul piano $\mathbb{R}^2$, chiediamo quali sono le curve che minimizzano $(*)$.

Ci restringiamo al caso in cui $u(x_i) = u(x_f)$ → Altri casi sono riconducibili a qto con una rotaz.





$$F[u] = \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx$$

definito positivo ⇒ minimizzato da $u'(x) = 0 \quad \forall x$

↳ cioè la funzione che minimizza F è

$u(x) = c \quad$ con $\quad c = u(x_i) = u(x_f)$

RETTA

Un altro problema importante (meccanica, ottica) è il calcolo del tempo di percorrenza di una traiettoria γ assegnata, per cui la velocità dipende in maniera nota dalla posizione.

Moto piano, traiettorie sono parametrizzabili da $y = u(x)$

TEMPO di PERCORRENZA

$$T[u] = \int_\gamma \frac{ds}{v} = \int_{x_i}^{x_f} \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}\,dx}{v(x,u(x))} \qquad v = v(x,y)$$

- In MECCANICA: se sistema è conservativo $\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x,y))}$

In particolare, se la forza è gravitazionale

$$v = \sqrt{2gy} \qquad T[u] = \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{\frac{1+u'(x)^2}{2gu(x)}}\,dx$$

- In OTTICA: $v = \dfrac{c}{n(x,y)}$ ← indice rifrazione nel mezzo

$$T[u] = \frac{1}{c}\int_{x_i}^{x_f} n(x,u(x))\sqrt{1+u'(x)^2}\,dx$$

PRINCIPIO di FERMAT: tra tutte le traiettorie possibili, la luce segue quelle che minimizzano $T[u]$.

una derivata

- Noi considereremo funzionali dipendenti esplicitamente da u e u', ma in generale un funzionale può dipendere da un numero arbitrario di derivate di u.

- Esistono funzionali dipendenti da più funzioni

$$F : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u,v) \longmapsto F[u,v] \overset{ES}{=} \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx \in \mathbb{R}$$

ES.) lunghezza di una curva in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da $\gamma : t \mapsto (u(t), v(t), w(t))$

$$F[\gamma] = F[u,v,w] = \int_0^1 \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2 + w'(t)^2}\, dt$$

VARIAZIONE DI UN FUNZIONALE

Preliminarmente, consideriamo l'es. di funzione a più variabili

$$F : U \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_N) \in U \longmapsto F(\bar{x}) \in \mathbb{R}$$

Fissiamo una direzione in $\mathbb{R}^N$, scegliendo un vettore

$$\delta\bar{x} = (\delta x_1, \dots, \delta x_N) \in \mathbb{R}^N$$

e consideriamo i valori di F nei punti VARIATI $\bar{x} + \alpha\,\delta\bar{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

La DERIVATA DIREZIONALE (o VARIAZIONE) δF della funzione F nel pto $\bar{x}$ e relativa al vett. $\delta\bar{x}$ è def. da

$$\delta F(\bar{x}, \delta\bar{x}) = \frac{d}{d\alpha} F(\bar{x} + \alpha\,\delta\bar{x}) \Big|_{\alpha=0}$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x})\, \delta x_i \quad \leftarrow = dF[\delta\bar{x}]$$
$$= \overline{\nabla} F \cdot \delta\bar{x} \quad \leftarrow \text{dice quanto velocemente varia } F \text{ nella direzione } \delta\bar{x}.$$

F è stazionario in $\bar{x} \iff \delta F$ si annulla in $\bar{x}$, $\forall \delta\bar{x}$

$\left(\text{cioè} \quad \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \right)$

cioè se $dF = 0$ in $\bar{x}$.

Consideriamo ora un funzionale $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$

- fissiamo una direzione $\delta u(t)$
- consideriamo la famiglia a un parametro di funzioni variate

$$u^\alpha(t) = u(t) + \alpha\,\delta u(t)$$

<u>Def.</u> La VARIAZIONE δF del funzionale F in u, relativa alla variazione δu, si definisce a partire da $F[u^\alpha] = F[u + \alpha\,\delta u]$ e ponendo

Per u e δu fissati, $F[u^\alpha]$ è una funzione di α: $\alpha \mapsto F[u^\alpha] \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\delta F[u, \delta u] = \frac{d}{d\alpha} F[u + \alpha\,\delta u]\Big|_{\alpha=0}} \qquad (*)$$

δF è un funzionale nelle due funzioni u e δu.

- Il funzionale si dice DIFFERENZIABILE in u se la derivata $(*)$ esiste $\forall\, \delta u$

- Procedendo in maniera intuitiva, si può immaginare δu come "piccolo" e definire δF come la PARTE LINEARE in δu dell' INCREMENTO

$$\Delta F = F[u+\delta u] - F[u]$$

Il risultato è lo stesso di ($\star$).

ES 1) $F[u] = \int_0^1 u(t)\,dt$

- $F[u^\alpha] = \int_0^1 (u(t) + \alpha\,\delta u(t))\,dt$

$$\delta F = \frac{d}{d\alpha}\left(F[u^\alpha]\right)\Big|_{\alpha=0} = \int_0^1 \delta u(t)\,dt$$

- $\Delta F = F[u+\delta u] - F[u] = \int_0^1 (u+\delta u)\,dt - \int_0^1 u\,dt = \underbrace{\int_0^1 \delta u\,dt}_{\text{lineare in } \delta u} = \delta F$ //

2) $F[u] = \int_0^1 u(x)^2\,dx$

- $\delta F = \frac{d}{d\alpha}\int_0^1 (u+\alpha\,\delta u)^2\,dt\Big|_{\alpha=0} =$

$$= 2\int_0^1 (u+\alpha\delta u)\,\delta u\,dt\Big|_{\alpha=0} = 2\int_0^1 u\,\delta u\,dt$$

- $\Delta F = \int_0^1 (u+\delta u)^2\,dt - \int_0^1 u^2\,dt =$

$$= \cancel{\int_0^1 u^2\,dt} + \underbrace{2\int_0^1 u\,\delta u\,dt}_{\text{parte lineare}} + \int_0^1 \delta u^2\,dt - \cancel{\int_0^1 u^2\,dt}$$

parte lineare $\Rightarrow \delta F = 2\int_0^1 u\,\delta u\,dt$ //

3) $F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L(u(x), u'(x), x)\, dx$ $\qquad L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\qquad (u, u', x) \mapsto L(u, u', x)$

$$\delta F[u, \delta u] = \frac{d}{d\alpha} \int_{x_i}^{x_f} L\left(u(x) + \alpha\, \delta u(x),\, u'(x) + \alpha\, \delta u'(x),\, x\right) dx \Big|_{\alpha=0}$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial u}\left(u(x), u'(x), x\right) \delta u(x) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial u'}\left(u(x), u'(x), x\right) \delta u'(x)}_{} \right\} dx$$

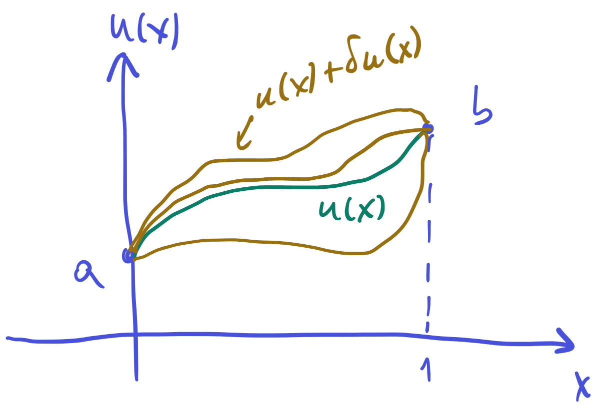
$\leftarrow$ integraz. per parti $\qquad f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' g$

$$= \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} \right) \delta u + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial u'} \cdot \delta u \right) \right\} dx =$$

$$\delta F[u, \delta u] = \frac{\partial L}{\partial u'} \delta u \Big|_{x_i}^{x_f} - \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right\} \delta u\, dx$$

In particolare, se ci si restringe a VARIAZIONI $\delta u(x)$ NULLE AGLI ESTREMI ($\delta u(x_i) = 0$ $\delta u(x_f) = 0$), si trova

$$\delta F[u, \delta u] = - \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right\} \delta u\, dx$$



Stiamo restringendo il dominio $\mathcal{U}$ a tutte e sole le funzioni u t.c. $u(x_i) = a$ $\quad u(x_f) = b$

finora $\Rightarrow$ $\delta u(x_i) = 0 = \delta u(x_f)$

ES. $$F = \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{1+u'(x)^2}\, dx = \int_{x_i}^{x_f} L(u, u', x)\, dx$$

dove

$$L(u,u',x) = \sqrt{1+u'^2}$$

$$\delta F[u, \delta u] = -\int_{x_i}^{x_f} \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right) \delta u\, dx =$$

$$\frac{\partial L}{\partial u'} = \frac{\cancel{2} u'}{\cancel{2}\sqrt{1+u'^2}} \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} = \frac{u''}{\sqrt{1+u'^2}} - \frac{u' \cancel{2} u' u''}{\cancel{2}(1+u'^2)^{3/2}} =$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0 \qquad = \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}\left(1+u'^2 - u'^2\right) = \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}$$