

Ricapitoliamo:

Def. Dato uno spazio U di funzioni, si dice **FUNZIONALE** definito nel dominio U una MAPPA F che ad ogni funzione $u \in U$ associa un numero (reale)

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto F[u] \in \mathbb{R}$$

Def. **VARIATIONE** di un **FUNZIONALE**:

$$\delta F[u, \delta u] = \left. \frac{d}{d\alpha} F[u + \alpha \delta u] \right|_{\alpha=0}$$

← generalizzazione di
funzionali delle
derivate direzionali
di funzioni a
più variabili

Caso particolare:

$$F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L(u(x), u'(x), x) dx \Rightarrow \delta F[u, \delta u] = \left. \frac{\partial L}{\partial u'} \cdot \delta u \right|_{x_i}^{x_f} - \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right\} \delta u dx$$

Def. Diciamo che un funzionale F definito su U è
STAZIONARIO in u_0 , o che u_0 è pto di stazionarietà per F ,
se

$$\delta F[u_0, \delta u] = 0 \quad \underline{\underline{\forall \delta u}} \quad (\text{t.c. } u_0 + \delta u \in U)$$

Prop. Dato $F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L(u(x), u'(x), x) dx$, allora

u_0 è pto di staz. per F

per variazioni nulle

agli estremi

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'}(u_0(x), u_0'(x), x) - \frac{\partial L}{\partial u}(u_0(x), u_0'(x), x) = 0$$

dette EQ. di EULERO-LAGRANGE
associate al funzionale F

Dim

$$\delta F[u, \delta u] = \left. \frac{\partial L}{\partial u'} \delta u \right|_{x_i}^{x_f} - \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right\} \delta u dx$$

$= 0 \quad \delta u = 0$

$$\Leftarrow : \text{ovvio} \leadsto \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}(u_0(x)) = 0 \Rightarrow \delta F[u_0, \delta u] = 0 \quad \forall \delta u$$

$\Rightarrow$: dobbiamo dir. che se $\delta F[u_0, \delta u] = 0 \quad \forall \delta u$,

$$\text{allora } \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \Big|_{u=u_0} = 0$$

dim. per assurdo: assumiamo per assurdo che $u_0(x)$

non soddisfa eq. di Lagr. $\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right) \Big|_{u=u_0} (x) \neq 0$,

cioè $\exists$ almeno un $\bar{x} \in [x_i, x_f]$ t.c.

$$\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right) \Big|_{u=u_0(x)} (\bar{x}) \neq 0$$

allora per continuità

$$\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right) \Big|_{u=u_0(x)} (x) \neq 0 \quad \text{in } x \in I_{\bar{x}} \quad \text{intervallo di } \bar{x}$$

e prendendo intervallo suff. piccolo $\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right) \Big|_{u=u_0(x)}$ ha segno def.

questo ci permette di trovare un δu t.c. $\delta F[u_0, \delta u] \neq 0$:

cioè δu t.c. $\delta u(x) = 0$ se $x \notin I_{\bar{x}}$, $\delta u(x) > 0$ se $x \in I_{\bar{x}}$

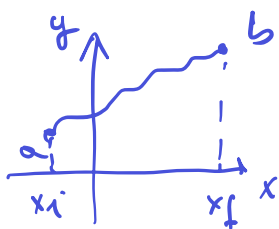
$$\Rightarrow \int_{x_i}^{x_f} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right) \Big|_{u=u_0(x)} (x) \delta u(x) dx =$$

$$= \int_{I_{\bar{x}}} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right) \Big|_{u=u_0(x)} (x) \delta u(x) dx \neq 0$$

" $\neq 0$ > 0 //

ES

$$L = (1 + u'^2)^{1/2}$$



$$F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L(u(x), u'(x), x) dx$$

↑
lunghezza della curva

u che minimizza F , cioè t.c. $\delta F[u, \delta u] = 0 \quad \forall \delta u$

$\Rightarrow$ u soddisfa eq. di Lagr. :

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} = \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} = 0 \Leftrightarrow u'' = 0$$

$$u(x) = ux + q \text{ RETTA}$$

PRINCIPIO DI HAMILTON

In meccanica abbiamo a che fare con funzioni nel tempo t che descrivono il moto del sistema: $q_k(t)$, le cui derivate sono $\dot{q}_n(t)$

Iniziamo con un sistema a 1 grado di lib. $n=1$

$$L(q, \dot{q}, t) \quad \text{lagrangiana} \quad L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Se sostituiamo alle variabili $q, \dot{q}$, le funz. $q(t), \dot{q}(t)$,
 otteniamo $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ che è una funz. int

Definisco **AZIONE HAMILTONIANA** il funzionale

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

→ Un moto $q(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, rende STAZIONARIO $S[q]$,
 per variazioni arbitrarie $\delta q(t)$ (nulle agli estremi)
 se e solo se $q(t)$ soddisfa le eq. di lag.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$$

→ Tra tutti i moti possibili tra $q_1 = q(t_1)$ e $q_2 = q(t_2)$
 il moto reale è quello che rende stazionario

il funzionale AZIONE $S[q]$, cioè $q(t)$ t.c.

$$\delta S[q, \delta q] = 0 \quad \forall \delta q$$

Generalizziamo a n gradi di libertà

$$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \quad L: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{Lagrangiana}$$

$$S[\bar{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) dt \quad \text{AZIONE HAMILTONIANA}$$

Prop. La variazione del funzionale S è data da

$$\delta S[\bar{q}, \delta \bar{q}] = \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right] dt$$

= 0 se δq_k si annulla in t_1 e t_2

Prop. **PRINCIPIO DI HAMILTON.** Il moto $\bar{q}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, rende STAZIONARIO il funzionale AZIONE S , per variazioni $\delta q_1(t), \dots, \delta q_n(t)$ arbitrarie e nulle agli estremi

$\Leftrightarrow \bar{q}(t)$ soddisfa le eq. di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k=1, \dots, n$$

Noi siamo partiti da PRINCIPIO di $\bar{F} = m\bar{a} \Rightarrow$ principio di Hamilton

Si poteva anche formulare la MECCANICA CLASSICA

assumendo come principio il PRINCIPIO di HAMILTON $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{eq. Lag} \Rightarrow \text{eq. } \bar{F}_i = m\bar{a}_i$$

Vediamo ora che le proprietà di invarianza delle eq. di Lagrange sono facilmente ricavabili utilizzando la formulazione variazionale.

1) Inv. in CAMBIAMENTO DI COORDINATE

$$\bar{q} = \bar{q}(\tilde{q}, t)$$

$$\tilde{L}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t) = L(\bar{q}(\tilde{q}, t), \dot{\bar{q}}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t), t)$$

Il moto $\bar{q}(t) = \bar{q}(\tilde{q}(t), t)$

Allora

$$\int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) dt$$

stazionario in

$$\tilde{q}(t)$$



$\tilde{q}(t)$ risolve
eq. di Lagr.
in $\tilde{L}$

$\Leftrightarrow$

stazionario in

$$\bar{q}(t) = \bar{q}(\tilde{q}(t), t)$$



$\bar{q}(t)$ risolve
eq. di Lagr.
in L

$\Leftrightarrow$

2) Abbiamo stesse eq. di Lagrange se L e L' differiscono
in una certa $\Phi(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t)$ t.c.

$$\Phi(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) = \frac{d}{dt} F(\tilde{q}(t), t) \leftarrow \text{DERIVATA TOTALE}$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) dt \quad S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) dt$$

$$\begin{aligned}
 \text{ma} \quad \delta' &= \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(\bar{q}(t), t) dt \\
 &= S + F(\bar{q}(t), t) \Big|_{t_1}^{t_2}
 \end{aligned}$$

Devo fare variazioni di termine di destra e di sinistra

$$\begin{aligned}
 \delta \delta' &= \delta S + \delta \left(F(\bar{q}(t), t) \Big|_{t_1}^{t_2} \right) \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{proporzionale a } \delta q(t_1) \\
 &\quad \quad \circ \delta q(t_2) \\
 &\Rightarrow = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Downarrow \\
 \delta \delta' &= \delta S \quad //
 \end{aligned}$$