Geometria 3 - Curve e superfici 2024/2025
Foglio di esercizi 6

Prof. Valentina Beorchia

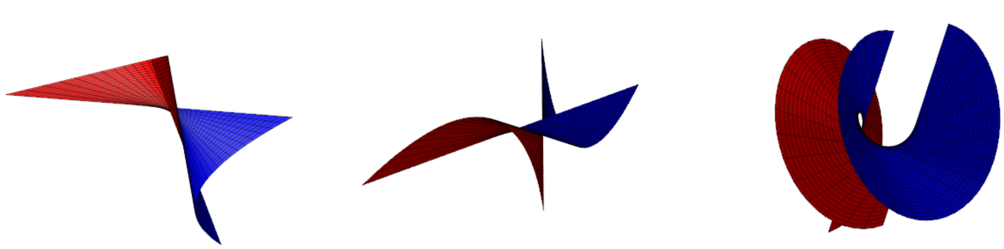
15 aprile 2025

1. Si verifichi che la definizione di applicazione differenziabile tra superfici regolari non dipende dalla scelta delle parametrizzazioni locali.

2. Si consideri la sfera unitaria $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ e l'elissoide $E = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$. Si verfichi che l'applicazione $\Phi : \mathbb{S}^2 \to E$ data da $\Phi(x, y, z) = (ax, by, cz)$ verifica
$$\Phi(\mathbb{S}^2) = E.$$

3. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata regolare, e supponiamo che la curvatura di α non si annulli mai: $k(t) > 0$, per ogni $t \in I$. Poniamo
$$\varphi : I \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(t, s) = \alpha(t) + s\alpha'(t),$$
dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Si dimostri che $\varphi(I \times \mathbb{R}^*) \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie, detta *sviluppabile delle tangenti*, che verifica le condizioni 1 e 3 della definizione di superficie regolare.



Si verifichi, inoltre, che i piani tangenti alla superficie lungo le curve $\varphi(\mathrm{cost}, s)$ sono costanti.

4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $p \in S$.

   (a) Sia $\nabla_S F(p)$ la proiezione ortogonale del vettore gradiente $\nabla F(p)$ sul piano tangente vettoriale T_pS.
   Si dimostri che se $\alpha : I \to S$ è una curva tale che $\alpha(I) \subset S$ e $\alpha(t_0) = p$, allora vale

   $$(\nabla_S F(p)) \cdot \alpha'(t_0) = \frac{d}{dt}_{|t=t_0} F(\alpha(t)).$$

   Se ne deduca che se la restrizione $F_{|S}$ ad S ha un minimo locale o un massino locale in p, allora $\nabla_S F(p) = (0, 0, 0)$.

   (b) Supponiamo che S ammetta un'equazione implicita $g(x, y, z) = 0$. Si dimostri che se la restrizione $F_{|S}$ ad S ha un minimo locale o un massino locale in $p \in S$, allora

   $$\nabla F(p) = \lambda \nabla g(p)$$

   per un opportuno scalare λ (detto *moltiplicatore di Lagrange*).