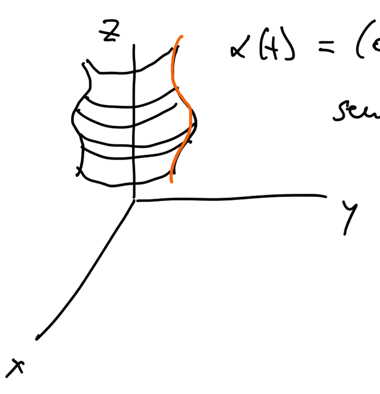
Lezione 10 aprile 2025

giovedì 10 aprile 2025 10:11

Visto: sup. di rotazione



$\alpha(t) = (0, y(t), z(t))$ semplice e regolare

$y(t) > 0$

$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$

$f : I \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$

$$f(t, \theta) = (y(t)\cos\theta,\ y(t)\sin\theta,\ z(t))$$

$$Jf(t) = \begin{pmatrix} y'(t)\cos\theta & -y(t)\sin\theta \\ y'(t)\sin\theta & y(t)\cos\theta \\ z'(t) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg} Jf(t) < 2 \iff \begin{cases} y'(t)\,y(t) = 0 \\ -z'(t)\,y(t)\sin\theta = 0 \\ z'(t)\,y(t)\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$y(t) > 0 \Rightarrow \boxed{y'(t) = 0}$ $\forall t \in I$

$\boxed{z'(t) = 0}$ NO perché $\alpha(t)$ regolare

$\begin{cases} \sin\theta = 0 \\ \cos\theta = 0 \end{cases}$ MAI

cioè $\alpha'(t) \neq (0,0,0)$
$= (0, y'(t), z'(t))$

① & ③ ok

② devo verificare f iniettiva e f^{-1} sia continua (NON FACCIAMO)

$f(t, \theta) = (y(t)\cos\theta,\ y(t)\sin\theta,\ z(t))$

Sup. $f(t_1, \theta_1) = f(t_2, \theta_2)$

$(y(t_1)\cos\theta_1,\ y(t_1)\sin\theta_1,\ z(t_1)) =$
$= (y(t_2)\cos\theta_2,\ y(t_2)\cos\theta_2,\ z(t_2))$

$\Rightarrow \boxed{z(t_1) = z(t_2)}$

$\begin{cases} \cancel{y(t_1)}\cos\theta_1 = \cancel{y(t_1)}\cos\theta_2 \\ \cancel{y(t_1)}\sin\theta_1 = \cancel{y(t_1)}\sin\theta_2 \end{cases}$ $/^2$ $+$

$y^2(t_1) = y^2(t_2)$ $\quad y(t) > 0\ \forall t \in I$

$\Rightarrow \boxed{y(t_1) = y(t_2)}$

$\alpha(t_1) = (0, y(t_1), z(t_1))$
$\alpha(t_2) = (0, y(t_2), z(t_2))$

$t_1 \neq t_2$ NO: perché α è semplice

$\Rightarrow t_1 = t_2$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta_1 = \cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 = \sin\theta_2 \end{cases} \iff \theta_1 = \theta_2$

$\theta_1, \theta_2 \in (0, 2\pi)$

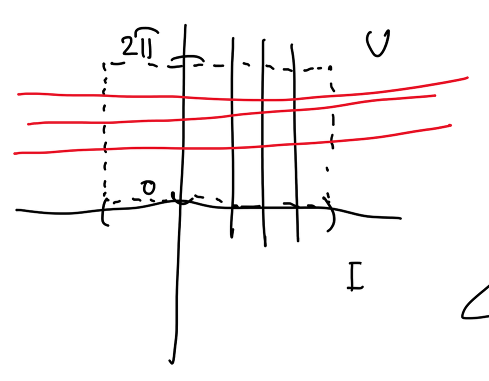
$f^{-1}\big|_{f(I \times (0,2\pi))}$ è continua su S

$\iff f$ è aperta.

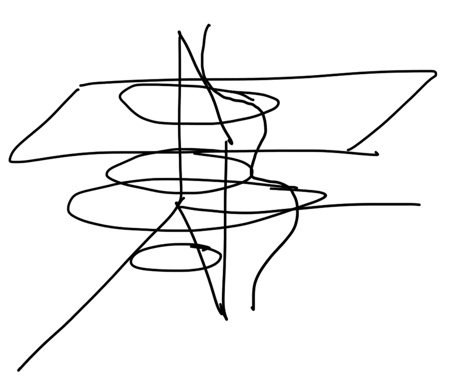
Omettiamo.

$$f(t, \theta) = (y(t)\cos\theta,\ y(t)\sin\theta,\ z(t))$$

$t = k$ $\quad (\underbrace{y(k)}_{k}\cos\theta,\ \underbrace{y(k)}_{\text{costante}}\sin\theta,\ \underbrace{z(k)}_{})$ PARALLELI



$f(k, \theta)$



è contenuta nel piano $z = z(k)$

se invece $\theta = \beta$ angolo costante

$\alpha_\beta(t) := f(t, \beta) = (y(t)\cos\beta,\ y(t)\sin\beta,\ z(t))$

MERIDIANI

cons. il piano H_β di eq.: $(\sin\beta)\cdot x - (\cos\beta)\,y = 0$

$\alpha_\beta(I) \subseteq H_\beta$

(sono parte del piano $x = 0$)

asse di rotaz. asse z: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

fascio di piani con supp. asse z: $\lambda x + \mu y = 0$